2020 január 7.
Munkaidő: 110 perc

KALKULUS VIZSGA

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet

Név:

Neptun kód:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	$\sum$	$+$

1. (15p) Számítsa ki az alábbi sorozat határértékét!

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{5n^3+7}{2n+1}}$$

Megoldás:
Csak rendőr-elvvel lehet kiszámítani ezt a határértéket. Ehhez alsó és felső becslésre van szükség:

$$\frac{1}{\sqrt[n]{3}\sqrt[n]{n}} = \sqrt[n]{\frac{1}{2n+n}} \leq \sqrt[n]{\frac{5n^3+7}{2n+1}} \leq \sqrt[n]{\frac{13n^3}{1}} = \sqrt[n]{13}(\sqrt[n]{n})^3$$

Mivel minden $p \in \mathbb{R}^+$ konstansra $\sqrt[n]{p} \to 1$, továbbá $\sqrt[n]{n} \to 1$, így az alsó és felső becslés is 1-hez tart, azaz a rendőr-elv miatt az eredeti határérték is 1.

2. (20 p) Adja meg azon legbővebb nyílt intervallumokat, amelyeken az $f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x + 11$ függvény szigorú monoton! Hol van a függvénynek lokális szélső értéke? Hol van inflexiója?

Megoldás:
A monotonitást az első derivált segítségével vizsgálhatjuk, ehhez:

$$f'(x) = x^2 - 6x + 8 = (x-2)(x-4)$$

A derivált főegyütthatója pozitív, ez egy felefele nyíló parabola, amely a két gyöke között negatív. Tehát $f'(x) \geq 0$ vagyis monoton nő ha $x \leq 2$ vagy $x \geq 4$ és $f'(x) \leq 0$ vagyis monoton csökken ha $2 \leq x \leq 4$. A 2-ben monoton növőből csökkenőbe megy át, vagyis lokális maximuma van. A 4-ben monoton csökkenőből növőbe megy át, vagyis lokális minimum van. Inflexiós pontja csak ott lehet a függvénynek ahol konvexitást vált, ehhez $f''(x) = 0$ szükséges feltétel (ha kétszer deriválható a függvény). Így

$$f''(x) = 2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$$

3-ban a második derivált előjelet vált, így ott inflexiós pontj van.

Megjegyzés: a szigorú monoton növekedéshez a feltétel: f'(x)>0, így a relációs jelek mindig szigorúak a megoldás során.

3. (15 p) Számítsa ki az alábbi határértékeket, amennyiben léteznek!

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{\tan(5x)} \qquad\qquad b)\ \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{3x}-3}{\sqrt{5x+10}-5}$$

Megoldás:
a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{\tan(5x)}=\lim_{x\to 0}\frac{5x\sin(3x)\cos(5x)}{3x\sin(5x)}\frac{3}{5}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{3x}\cdot\frac{5x}{\sin(5x)}\cdot\frac{3}{5}\cos(5s)=\frac{3}{5}$$

felhasználva, hogy $\lim_{a\to 0}\frac{\sin(a)}{a}=1$.
b)

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{3x}-3}{\sqrt{5x+10}-5}=\lim_{x\to 3}\frac{(3x-9)(\sqrt{5x+10}+5)}{(5x+10-25)(\sqrt{3x}+3)}=\lim_{x\to 3}\frac{3(x-3)(\sqrt{5x+10}+5)}{5(x-3)(\sqrt{3x}+3)}=$$
$$=\frac{3(10)}{5(6)}=1$$

4. (15 p) Határozza meg az alábbi függvény érintőegyenesének egyenletét az $x_0=1$ pontban!

$$f(x)=x\ln(x)$$

Megoldás:
Az érintőegyenes egyenlete x_0-ban:

$$y_e=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

Ehhez $f(x_0)=f(1)=1\ln(1)=0$, *illetve*

$$f'(x)=\ln(x)+x\frac{1}{x}=\ln(x)+1$$

Innen $f'(1)=1$, *azaz a keresett egyenes egyenlete:* $y_e=1(x-1)+0=x-1$

5. (15 p) Ábrázolja, és határozza meg az $f(x)=x^2$ és a $g(x)=x+2$ függvények görbéje által határolt korlátos síkidom területét!

Megoldás:
A felső határoló függvény az $g(x)=x+2$, *az alsó az* $f(x)=x^2$. *A metszéspontok az* $f(x)=g(x)$ *megoldásából* $x+2=x^2$ *azaz* $x^2-x-2=0$, *így* $(x-2)(x+1)=0$. *A két metszéspont tehát az* $x_1=-1$ *és az* $x_2=2$. *Így a keresett terület az alábbi integrál kiszámításával kapható meg:*

$$\int_{-1}^{2}x+2-x^2\mathrm{d}x=\left[\frac{x^2}{2}+2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2}=\left[\frac{4}{2}+4-\frac{8}{3}-\left(\frac{1}{2}-2+\frac{1}{3}\right)\right]=$$
$$=\frac{3}{2}+6-\frac{9}{3}=\frac{9}{2}=4{,}5$$

6. (8+12 p) Számítsa ki az alábbi integrálokat (tipp: az egyik integrál kiszámításához alkalmazza az $t = \mathrm{e}^x$ helyettesítést)!

$$a) \int \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 3} \mathrm{d}x \qquad b) \int \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x} - 1} \mathrm{d}x$$

Megoldás:

a) Az első integrál $\frac{f'}{f}$ *alakú, itt nem szükséges helyettesíteni, hanem közvetlenül*

$$\int \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1} = \ln|\,\mathrm{e}^x + 3| + C,$$

ahol $C \in \mathbb{R}$ *tetszőleges valós konstans.*

b) Alkalmazzuk a $t = \mathrm{e}^x$ *helyettesítést! Ekkor* $e^{2x} = t^2$*, illetve* $e^x = t$*-ből* $x = \ln(t)$*, innen* $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}$*, azaz*

$$\int \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x} - 1} \mathrm{d}x = \int \frac{t}{t^2 - 1} \frac{1}{t} \mathrm{d}t = \int \frac{1}{t^2 - 1} \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{2} [\ln|t-1| - \ln|t+1|] + C = \ln\left(\frac{|t-1|}{|t+1|}\right)^{\frac{1}{2}} + C = \ln\sqrt{\frac{e^x - 1}{e^x + 1}} + C,$$

ahol $C \in \mathbb{R}$ *tetszőleges valós konstans.*

7. (+15 p) *(Ezen feladat megoldása nem szükséges a maximum pontszám eléréséhez.)* Oldja meg az alábbi egyenletet a komplex számok halmazán!

$$z^2 + 4\overline{z} + 4 = 0$$

Megoldás:

Írjuk fel z*-t* $z = a + ib$ *algebrai alakban, ekkor:*

$$(a + ib)^2 + 4\,(a - bi) + 4 = 0$$

$$a^2 + 2abi - b^2 + 4a - 4bi + 4 = 0$$

Ekkor a képzetes részre a következőt kapjuk:

$$2ab - 4b = 2(b)(a - 2) = 0$$

Innen vagy $b = 0$*, vagy* $a = 2$*. Ha* $b = 0$ *akkor a valós része szóló egyenlet:*

$$a^2 + 4a + 4 = (a + 2)^2 = 0$$

amiből $a = -2$*.*

Ha $a = 2$ *akkor a valós részre szóló egyenlet:*

$$4 - b^2 + 8 + 4 = 16 - b^2 = 0$$

vagyis $b = \pm 4$*. Tehát 3 megoldást kaptunk:* $z_1 = -2$*,* $z_2 = 2 + 4i$*,* $z_3 = 2 - 4i$

Két oldalas a feladatsor.

Az alábbi feladatot csak a 40% eléréséhez javítjuk ki.

(15 p) Döntse el, hogy van-e az alábbi mátrixnak inverze! (Ha van, akkor sem kell kiszámolnia, hogy melyik mátrix az).

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 3 \\ -6 & 5 & -3 & 0 \\ 9 & 10 & 10 & 20 \\ -3 & -5 & -5 & -13 \end{bmatrix}$$

Megoldás:

Egy mátrix pontosan akkor invertálható, ha a determinánsa nem nulla, így ennek kiszámításához a fenti mátrixot Gauss-elimináljuk (mivel nincs benne sok 0 a kifejtési tétel itt nem célszerű).

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 3 \\ -6 & 5 & -3 & 0 \\ 9 & 10 & 10 & 20 \\ -3 & -5 & -5 & -13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & 6 \\ 0 & 10 & 4 & 11 \\ 0 & -5 & -3 & -10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

Felső háromszögmátrix determinánsa a főátlóban lévő elemek szorzata, azaz

$$3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot (-5) \neq 0,$$

tehát invertálható a mátrix.