2020 január 7.
Munkaidő: 110 perc

KALKULUS VIZSGA

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet

Név:

Neptun kód:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	+	$\sum$	Pót

1. (15p) Legyen **A** az alábbi mátrix:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \end{bmatrix}.$$

Mik az $\mathbf{A}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 15 \\ 1 \end{bmatrix}$ egyenlet megoldásai és mennyi **A** sorrangja?

Megoldás:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & -1 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 15 \\ 0 & -3 & -3 & 1 \end{bmatrix} (2p) \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 7 \\ 0 & -3 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & 1 \end{bmatrix} (3p) \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 7 \\ 0 & -3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (3p)$$

Innen $z = t$, $y = -\frac{1}{3} - t$ $x = 8 + t$ *(4p) (vagyis* $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$*) A sorrangja a nem nulla sorok száma* $= 2$*(3p)*

2. (15p) Oldja meg az alábbi egyenletet a komplex számok halmazán!

$$|z|^2 + 5z = 7 + 5i$$

Megoldás:
Írjuk fel z-t $z = a + ib$ *algebrai alakban, ekkor:*

$$a^2 + b^2 + 5a + 5bi - 7 - 5i = 0$$

Ekkor a képzetes részre a következőt kapjuk:

$$5b - 5 = 0$$

ahonnan $b = 1$. *Ezt beírva a valós részről szóló egyenletbe:*

$$a^2 + 1 + 5a - 7 = a^2 + 5a - 6 = (a-1)(a+6) = 0$$

amiből $a = 1$, *vagy* $a = -6$.
Tehát 2 megoldást kaptunk: $z_1 = 1 + i$, $z_2 = -6 + i$.

3. (20 p) Adja meg azon legbővebb nyílt intervallumokat, amelyeken az $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2+x-7}$ függvény konvex illetve konkáv, hol van lokális szélsőértéke?

Megoldás:
Ott van lokális szélsőértéke ahol $f'(x)$ előjelet vált.

$$f'(x) = (1-2x)\,\mathrm{e}^{-x^2+x-7}$$

vagyis az $x = \frac{1}{2}$-ben. A konvexitást a második derivált segítségével vizsgálhatjuk, ehhez második derivált:

$$f''(x) = -2\,\mathrm{e}^{-x^2+x-7} + \mathrm{e}^{-x^2+x-7}(1-2x)^2 = (4x^2-4x-1)\,\mathrm{e}^{-x^2+x-7}$$

Az exponenciális tag mindig pozitív, tehát azt kell nézni hogy $(4x^2-4x-1)$ hol pozitív, hol negatív. Két gyöke van: $x_{1,2} = \frac{4\pm\sqrt{16+16}}{8}$. Így:
konvex ha $x \in (-\infty, \frac{1-\sqrt{2}}{2}] \cup [\frac{1+\sqrt{2}}{2}, \infty)$, konkáv, ha $x \in [\frac{1-\sqrt{2}}{2}, \frac{1+\sqrt{2}}{2}]$.

4. (20 p) Számítsa ki az alábbi határértékeket, amennyiben léteznek!

$$a)\ \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{x^3}-1}{x^2\sin(x)} \qquad\qquad b)\ \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{\cosh(x)}$$

Megoldás:
a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{x^3}-1}{x^2\sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{x^3}-1}{x^3}\frac{x}{\sin(x)} = 1$$

felhasználva, hogy $\lim_{a\to 0}\frac{\sin(a)}{a} = 1$ és $\lim_{a\to 0}\frac{\mathrm{e}^a-1}{a} = 1$.
b)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{\cosh(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\,\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{1+\mathrm{e}^{-2x}} = 2$$

5. (15 p) Határozza meg az alábbi függvény negyedfokú Taylor-polinomját az $x_0 = 0$ körül!

$$f(x) = \mathrm{e}^{x^2}$$

Megoldás:
Mint tudjuk a Taylor polinom:

*(x-x_0)

$$\begin{aligned} T_4(x) =& f(x_0) + f'(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x-x_0)^4 \\ =& f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 \end{aligned}$$

Amihez

$$\begin{aligned} f(0) &= = \mathrm{e}^{x^2}\Big|_{x=0} = 1 \\ f'(0) &= = 2x\,\mathrm{e}^{x^2}\Big|_{x=0} = 0 \\ f''(0) &= = 2\,\mathrm{e}^{x^2} + 4x^2\,\mathrm{e}^{x^2}\Big|_{x=0} = 2 \\ f^{(3)}(0) &= = 12x\,\mathrm{e}^{x^2} + 8x^3\,\mathrm{e}^{x^2}\Big|_{x=0} = 0 \\ f^{(4)}(0) &= = 12\,\mathrm{e}^{x^2} + 48x^2\,\mathrm{e}^{x^2} + 16x^4\,\mathrm{e}^{x^2}\Big|_{x=0} = 12 \end{aligned}$$

vagyis

$$T_4(x) = 1 + \frac{2}{2}x^2 + \frac{12}{4!}x^4 = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2}$$

6. (15 p) Számítsa ki az alábbi integrálokat (Segíség:az egyiket parciálisan a másikat $\frac{f'}{f}$ alapján kell integrálni)!

a) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{2x}\cos(3x+1)\mathrm{d}x$ *b)* $\displaystyle\int \frac{1}{(1+9x^2)\arctan(3x)}\mathrm{d}x$

Megoldás:
a) Az első integrált kétszer kell parciálisan integrálni pl.:

$$\int \underbrace{\mathrm{e}^{2x}}_{f'}\underbrace{\cos(3x)}_{g}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\cos(3x) - \int \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\left(-3\sin(3x)\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{\mathrm{e}^{2x}\cos(3x)}{2} + \frac{3}{2}\int \underbrace{\mathrm{e}^{2x}}_{f'}\underbrace{\sin(3x)}_{g}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{2x}\cos(3x)}{2} + \frac{3}{2}\left(\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\sin(2x) - \int \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}3\cos(3x)\mathrm{d}x\right)$$

Így azt kaptuk, hogy

$$\underbrace{\int \mathrm{e}^{2x}\cos(3x)\mathrm{d}x}_{I} = \frac{\mathrm{e}^{2x}\cos(3x)}{2} + \frac{3\,\mathrm{e}^{2x}\sin(3x)}{4} - \frac{9}{4}\underbrace{\int \mathrm{e}^{2x}\cos(3x)\mathrm{d}x}_{I}$$

vagyis

$$I\left(1+\frac{9}{4}\right) = I\frac{13}{4} = \frac{\mathrm{e}^{2x}\cos(3x)}{2} + \frac{3\,\mathrm{e}^{2x}\sin(3x)}{4} + C$$

$$\int \mathrm{e}^{2x}\cos(3x)\mathrm{d}x = I = \frac{2\,\mathrm{e}^{2x}\cos(3x)}{13} + \frac{3\,\mathrm{e}^{2x}\sin(3x)}{13} + C$$

b) Az integrál $\int \frac{f'}{f} = \ln|f| + C$ *alakú tehát:*

$$\int \frac{1}{(1+9x^2)\arctan(3x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \frac{3\frac{1}{1+(3x)^2}}{\arctan(3x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\ln|\arctan(3x)| + C$$

(+15 p) *(Ezen feladat megoldása nem szükséges a maximum pontszám eléréséhez.)* Bizonyítsa az alábbi határértéket!

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{7}{2n}\right)^{n^2} = \infty$$

Megoldás:
Csak speciális rendőr-elvvel lehet kiszámítani ezt a határértéket. Ehhez alsó becslésre van szükség: tudjuk, hogy $\left(1+\frac{7}{2n}\right)^n \to e^{\frac{7}{2}} > 2$ *ha n elég nagy. Ezért elég nagy n-re:*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{7}{2n}\right)^{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{7}{2n}\right)^n\right)^n \geq \lim_{n\to\infty} 2^n = \infty$$

Mivel az alsó becsés végtelenbe tart, ezért az eredeti határérték is végtelen.

Két oldalas a feladatsor.

Az alábbi feladatot csak a 40% eléréséhez javítjuk ki.
Mi a határértéke a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4^n + 7n^{15} + 13627}{2^{2n+1} + \log_7(n^9) + \sqrt[3]{n}}$$

sorozatnak?
Megoldás:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4^n + 7n^{15} + 13627}{2^{2n+1} + \log_7(n^9) + \sqrt[3]{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^n + 7n^{15} + 13627}{2\cdot 4^n + 9\log_7(n) + n^{\frac{1}{2}}} = *$$

Mivel $4^n \gg n^\alpha \gg \log_7(n)$

$$* = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + 7\frac{n^{15}}{4^n} + \frac{13627}{4^n}}{2 + 9\frac{\log_7(n)}{4^n} + \frac{n^{\frac{1}{2}}}{4^n}} = \frac{1+0+0}{2+0+0} = \frac{1}{2}$$