2020 január 21.
Munkaidő: 110 perc

KALKULUS VIZSGA

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet

Név:

Neptun kód:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	+	$\sum$	Pót

1. (15p) Legyen $\mathbf{A}$ az alábbi mátrix:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Hány megoldása van az $\mathbf{A}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$ egyenletnek, mennyi $\mathbf{A}$ sorrangja, mennyi a kibővített mátrix sorrangja?

Megoldás:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} (2p) \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} (3p) \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} (3p)$$

Látható, hogy a $0x + 0y + 0z = 2$ egyenletnek nincs megoldása (2p). A sorrangja a nem nulla sorok száma $= 2$(3p), a kibővített mátrix sorrangja 3(2p).

2. (20p) Oldja meg az alábbi egyenletet a komplex számok halmazán!

$$z^2 + 2\overline{z} - \left(\frac{z+\overline{z}}{2}\right)^2 = 1 + 2i$$

Megoldás:
Írjuk fel z-t $z = a + ib$ algebrai alakban, ekkor:

$$a^2 - b^2 + 2abi + 2a - 2bi - a^2 - 1 - 2i = 0$$

Ekkor a képzetes részre a következőt kapjuk:

$$2ab - 2b - 2 = 2b(a-1) - 2 = 0$$

ahonnan $b = \frac{1}{a-1}$. A valós részre a következőt kapjuk:

$$-b^2 + 2a - 1 = 0$$

$b = \frac{1}{a-1}$ kifejezést beírva a valós részről szóló egyenletbe:

$$-\frac{1}{(a-1)^2} + 2a - 1 = 0$$
$$-1 + 2a(a-1)^2 - (a-1)^2 = 0.$$

Ez egy harmadfokú egyenletre bezet, így nem oldjuk tovább. Aki idáig eljutott, az megkapta a 20 pontot.

3. (15 p) Adja meg azon legbővebb nyílt intervallumokat, amelyeken az $f(x) = \sqrt{x^2+2x+2}$ függvény monoton nő, illetve csökken!

Megoldás:
Látható, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $x^2+2x+2 = (x+1)^2+1 \geq 0$, tehát $D(f) = \mathbb{R}$. Az f függvény mindenhol differenciálható és $f'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$. Ha $x < -1$, akkor $f'(x) < 0$, így a $(-\infty, -1)$ intervallumon f monoton csökken. Ha $x > -1$, akkor $f'(x) > 0$, így a $(-1, +\infty)$ intervallumon f monoton nő.

4. (20 p) Számítsa ki az alábbi határértékeket, amennyiben léteznek!

$$a)\ \lim_{x\to 0} \frac{(\mathrm{e}^x - 1)x}{x\sin(x)} \qquad\qquad b)\ \lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{3x}-3}{x-3}$$

Megoldás:
a) (10 p)

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\mathrm{e}^x - 1)x}{x\sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}\frac{x}{\sin(x)} = 1$$

felhasználva, hogy $\lim_{a\to 0} \frac{\sin(a)}{a} = 1$ és $\lim_{a\to 0} \frac{\mathrm{e}^a - 1}{a} = 1$.
b) (10 p)

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{3x}-3}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{3x}-3}{x-3} \cdot \frac{\sqrt{3x}+3}{\sqrt{3x}+3} = \lim_{x\to 3} \frac{3x-9}{(x-3)(\sqrt{3x}+3)} = \lim_{x\to 3} \frac{3}{\sqrt{3x}+3} = \frac{3}{3+3} = \frac{1}{2}.$$

5. (15 p=7p+8p) Mennyi a határértéke?

$$a)\ \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+3}{n-2}\right)^{n+1} \qquad\qquad b)\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3n+6}$$

Megoldás:
a)

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+3}{n-2}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1+\frac{3}{n}}{1-\frac{2}{n}}\right)^n \frac{1+\frac{3}{n}}{1-\frac{2}{n}} = \frac{\mathrm{e}^3}{\mathrm{e}^{-2}} = \mathrm{e}^5$$

b)

$$\underbrace{\sqrt[n]{3}}_{\to 1}\underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1} = \sqrt[n]{3n} \leq \sqrt[n]{3n+6} \leq \sqrt[n]{9n} = \underbrace{\sqrt[n]{9}}_{\to 1}\underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1}$$

Rendőrelvből következik, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3n+6} = 1$.

6. (15 p) Számítsa ki az alábbi integrálokat!

$$a) \int x\cos(3x+1)\mathrm{d}x \qquad\qquad b) \int \frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

Megoldás:
a) Az első integrált parciálisan kell integrálni:

$$\int \underbrace{x}_{u}\underbrace{\cos(3x+1)}_{v'}\mathrm{d}x = x\frac{\sin(3x+1)}{3} - \int \frac{\sin(3x+1)}{3}\cdot 1\mathrm{d}x =$$

$$= x\frac{\sin(3x+1)}{3} - \frac{-\cos(3x+1)}{9} = x\frac{\sin(3x+1)}{3} + \frac{\cos(3x+1)}{9} + C \quad (10p)$$

b) Az integrál $\int \frac{f'}{f} = \ln|f| + C$ *alakú tehát:*

$$\int \frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \ln|1+x^2| + C \quad (5p)$$

(+15 p) *(Ezen feladat megoldása nem szükséges a maximum pontszám eléréséhez.)*
Létezik-e és mennyi a

$$f(x) = x\sqrt{1-x}$$

függvény maximuma/minimuma a $[0;1]$ intervallumon. *Megoldás:*
Weierstrass tétele szerint létezik. A maximum/minimum lokális szélsőértékben és az intervallum szélén lehet. Az intervallum szélein a függvényérték 0. Lokális szélsőértéke van ahol $f'(x)$ *előjelet vált*

$$f'(x) = \sqrt{1-x} - \frac{x}{2\sqrt{1-x}}$$

Amiből

$$f'(x) = \frac{2(1-x)-x}{2\sqrt{1-x}} = \frac{2-3x}{2\sqrt{1-x}}$$

Látjuk, hogy előjelet vált a $\frac{2}{3}$*-ban. Pozitívból-negatívba tehát itt lok. max. hely van. Tehát maximuma van a* $\frac{2}{3}$*-ban melynek értéke* $\frac{2}{3\sqrt{3}}$*, minimuma a 0-ban és 1-ben melynek értéke 0.*

Két oldalas a feladatsor.

Az alábbi feladatot csak a 40% eléréséhez javítjuk ki.

(15 p) Adjuk meg az $f(x) = \ln 2x + \frac{1}{x^2}$ függvény érintőjének az egyenletét az $x_0 = \frac{1}{2}$ pontban!

Megoldás:

$f(x_0) = f(\frac{1}{2}) = \ln 1 + 4 = 4,$ $f'(x) = \frac{2}{2x} - \frac{2}{x^3},$ $f'(x_0) = 2 - 2 \cdot 8 = -14,$ *így az érintő egyenlete:* $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = -14(x - \frac{1}{2}) + 4,$ *azaz* $y = -14x + 11.$