2020 január 28.
Munkaidő: 110 perc

KALKULUS VIZSGA

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet

Név:

Neptun kód:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	+	$\sum$	Pót

1. (20p) Legyen $\mathbf{A}$ az alábbi mátrix:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tekintsük az $\mathbf{A}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}$ egyenletet. Mennyi $\mathbf{A}$ sorrangja, mennyi a kibővített mátrix sorrangja? Hány megoldása van az egyenletnek? Adja meg a megoldás(oka)t!

Megoldás:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}(2p) \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \end{bmatrix}(3p) \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}(3p)$$

A sorrangja a nem nulla sorok száma $= 3$*(2p), a kibővített mátrix sorrangja 3(2p). Tehát egy megoldás van(2p). A megoldás:* $z = -2$ *(2p),* $y + 2z = 4 \Rightarrow y = 8$*(2p),* $x + y + 3z = 5 \Rightarrow x = 3$*(2p).*

2. (15p) Oldja meg az alábbi egyenletet a komplex számok halmazán!

$$z^2 - \overline{z}^2 + z = 1 + 5i$$

Megoldás:

Írjuk fel z*-t* $z = a + ib$*(2p) algebrai alakban, ekkor:*

$$a^2 - b^2 + 2abi - (a^2 - 2abi - b^2) + a + bi = 1 + 5i(4p)$$

ami rendezve

$$a + (4ab + b)i = 1 + 5i(2p)$$

Ekkor a valós részre a következőt kapjuk:

$$a = 1(3p)$$

A képzetes részre a következőt kapjuk:

$$5b = 5(2p)$$

amiből $z = 1 + i$ *(2p)*

3. (15 p) Hol van értelmezve a

$$f(x) = x - \ln(x)$$

függvény? Adja meg azon legbővebb nyílt intervallumokat, amelyeken a fenti függvény monoton nő, illetve csökken!

Megoldás:
Látható, hogy a logaritmus miatt $D_f = (0{,}\infty)$(3p). Ekkor $f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$(3p). A f függvény monoton nő, ha $f'(x) \geq 0$(2p). Ez teljesül, ha

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{x} &\geq 0 \\ 1 &\geq \frac{1}{x} \\ x &\geq 1 \qquad (3p) \end{aligned}$$

(ne feledjük, hogy $x \in (0{,}\infty)$) így a $(0{,}1)$ intervallumon f monoton csökken(2p), Ha $x > 1$, akkor $f'(x) > 0$, így a $(1{,}\infty)$ intervallumon f monoton nő(2p).

4. (15 p) Számítsa ki az alábbi határértékeket, amennyiben léteznek!

$$a)\ \lim_{x\to\pi} \frac{\cos(x)+1}{\sin(x)} \qquad\qquad b)\ \lim_{x\to 1} \frac{|x^2-1|}{x-1}$$

Megoldás:
a)

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\cos(x)+1}{\sin(x)} = \frac{0}{0} = L'H(3p) = \lim_{x\to\pi} \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}(3p) = \frac{0}{-1} = 0(1p)$$

b)

$$\lim_{x\to 1} \frac{|x^2-1|}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{|x-1||x+1|}{x-1} = \lim_{x\to 1} |x+1| \frac{|x-1|}{x-1}(2p) = 2 \lim_{x\to 1\pm} \frac{|x-1|}{x-1}(3p) = \pm 2.(2p)$$

Tehát nincs határértéke (1p).

5. (15 p) Mennyi a határértéke?

$$a)\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3n+6}{7n-3}} \qquad\qquad b)\ \lim_{n\to\infty} \frac{7^n + 300n^{15} + 13456}{7^n + 12\sqrt{n} + \log(n)}$$

Megoldás:
a)

$$(3p)1 \leftarrow \sqrt[n]{\frac{6}{7}}\sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{6}{7n}} < \sqrt[n]{\frac{3n+6}{7n-3}} < \sqrt[n]{\frac{3n+6n}{4n}} = \sqrt[n]{\frac{9}{4}} \to 1(3p)$$

Tehát rendőrelvből $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3n+6}{7n-3}} = 1$ (2p).
b)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{7^n + 300n^{15} + 13456}{7^n + 12\sqrt{n} + \log(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{300n^{15}}{7^n} + \frac{13456}{7^n}}{1 + \frac{12\sqrt{n}}{7^n} + \frac{\log(n)}{7^n}} = 1(7p)$$

6. (15 p) Számítsa ki az alábbi integrálokat! Ha szükséges használja az $e^x = t$ helyettesítést!

$$a) \int \frac{e^x}{1+e^x} dx \qquad b) \int \frac{e^x}{1+2e^x+e^{2x}} dx$$

Megoldás:

a) Az első integrál $\frac{f'}{f}$ alakú:

$$\int \frac{\overbrace{e^x}^{f'}}{\underbrace{1+e^x}_{f}} dx = \ln|1+e^x| + C \quad (7p)$$

b)A második integrál $\int f' f^\alpha = \frac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ alakú tehát:

$$\int \frac{e^x}{1+2e^x+e^{2x}} dx = \int e^x(1+e^x)^{-2} dx = -(1+e^x)^{-1} + C \quad (8p)$$

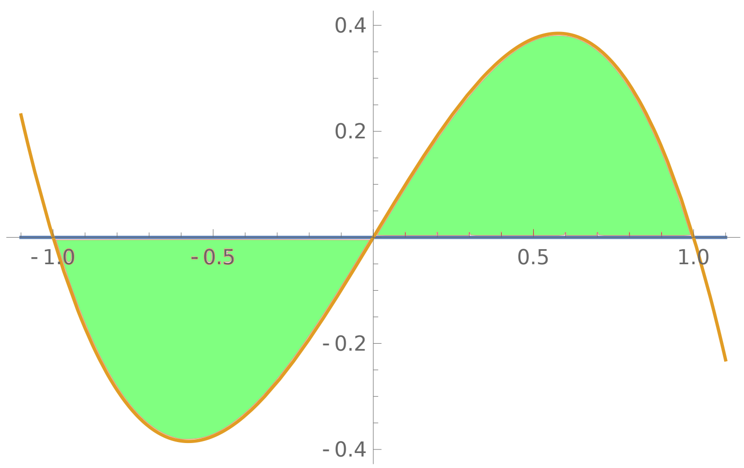
(+15 p) *(Ezen feladat megoldása nem szükséges a maximum pontszám eléréséhez.)* Mekkora az

$$f(x) = x(1-x^2)$$

függvény és az $x = 0$ egyenes által közbezárt tartomány területe.

Megoldás:

Az ábrán látható zöld területet kell kiszámolni.



A zöld terület egyenlő

$$2\int_0^1 x(1-x^2)dx(8p) = -\int_0^1 \underbrace{-2x}_{f'}\underbrace{(1-x^2)}_{f}(3p)dx = -\left[\frac{(1-x^2)^2}{2}\right]_0^1 (3p) = -[0-\frac{1}{2}] = \frac{1}{2}(1p)$$

Két oldalas a feladatsor.

Az alábbi feladatot csak a 40% eléréséhez javítjuk ki.
(15 p) Mennyi a határértéke?

$$a)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-7}{n+3}\right)^{n-4} \qquad\qquad b)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-7}{n+3}\right)^{n^2}$$

Megoldás:
a)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-7}{n+3}\right)^{n-4} = \lim_{n\to\infty}\frac{(1-\frac{7}{n})^n}{(1+\frac{3}{n})^n}\left(\frac{n+3}{n-7}\right)^4 = \frac{\mathrm{e}^{-7}}{\mathrm{e}^3} = \mathrm{e}^{-10}$$

b) Nyilván

$$0 < \left(\frac{n-7}{n+3}\right)^n < \mathrm{e}^{-10} + 0{,}1 < 0{,}2$$

Ha n elég nagy. Ebből

$$0 < \left(\frac{n-7}{n+3}\right)^{n^2} < (0{,}2)^n \to 0$$

Tehát Rendőrelvből következik, hogy $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-7}{n+3}\right)^{n^2} \to 0$