Kalkulus 10. gyakorlat megoldások

October 9, 2024

1.feladat

a, $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ ($a \in \mathbb{R}$): a torlódási pontja D_f-nek, és $\forall K > 0$-ra $\exists \delta > 0$ hogy ha $x \in D_f$ és $x \in K_\delta(a)$ akkor $f(x) < -K$.c

b, $\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$: D_f nem alulról korlátos, és $\forall K > 0$-ra $\exists P > 0$ hogy ha $x \in D_f$ és$x < -P$ akkor $f(x) > K$.

2.feladat

$\lim_{x\to a} f(x) = A$: a torlódási pontja D_f-nek, és $\forall \epsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ hogy ha $x \in D_f$ és $0 < |x-a| < \delta$ akkor $|f(x) - A| < \epsilon$

a, $|3x + 4 - 7| = |3x - 3| = 3|x - 1| < \epsilon \to |x - 1| < \epsilon/3 \Leftarrow |x - 1| < \delta := \epsilon/3$

b, $|\frac{8-2x^2}{x+2} - 8| = |\frac{-2x^2-8x-8}{x+2}| = |\frac{-2(x+2)^2}{x+2}| = 2|x + 2| < \epsilon \to |x + 2| < \epsilon/2 \Leftarrow |x + 2| < \delta := \epsilon/2$

c, $|\sqrt{1 - 5x} - 4| = |\frac{1-5x-16}{\sqrt{1-5x}+4}| = \frac{5|x+3|}{\sqrt{1-5x}+4} < \frac{5|x+3|}{4} < \epsilon \to |x + 3| < 4\epsilon/5 \Leftarrow |x + 3| < \delta := 4\epsilon/5$

d, $|\frac{1-2x}{x+3} + 2| = \frac{7}{x+3} < \epsilon \to 7/\epsilon - 3 < x \Leftarrow x > K := 7/\epsilon - 3$

3.feladat

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{-x^4 - 2x^2}{2x^3 + 1} = -1$

b) $\lim\limits_{x\to \pi} (\sin x + \tan(2x)) = 0$

c) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{70}{2x - 10} \nexists$

d) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{1}{(2x - 10)^2} = +\infty$

e) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = -1$

f) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 6}{x^2 - 3x + 2} \nexists$

g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+5x}{2x-x^2} = \frac{5}{2}$

h) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-3x+2}{2x-2x^2} = \frac{1}{2}$

i) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2+3x-10}{(x^2-4)^2} = -\infty$

j) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+3x-10}{(x^2-4)^2} \nexists$

k) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{3x^2+1}-2x} = -2$

l) $\lim\limits_{x\to 3+} (2+5\{x\}) = 2$

m) $\lim\limits_{x\to 3-} (2+5\{x\}) = 7$

n) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{1}{\sqrt{x^2-4x+4}} + \frac{1}{x-2} \nexists$

4.feladat

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} (x^3-2x+3) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to -\infty} (x^3-2x+3) = -\infty$

c) $\lim\limits_{x\to -\infty} (-4x^2-\frac{2}{x}) = -\infty$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{-x^4-2x^2}{3x^3+1} = -\infty$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x^5-3x^2+1}{x^7+4x^3+5} = 0$

f) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x^5-3x^2+1}{x^7+4x^3+5} = 0$

g) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2+3x-10}{(x^2-4)^2} = 0$

h) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x^3-3}{5x-4x^3+1} = -\frac{3}{4}$

i) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^7-5x^4-x^2}{10x-3x^5+11x^2} = -\infty$

j) $\lim\limits_{x\to -\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-3}\right) = 2$

5.feladat

a, $a_n := \frac{1}{n2\pi}$, $b_n := \frac{1}{n2\pi+\pi}$ $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$ $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} \cos(n2\pi) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$, $\lim_{n\to\infty} f(b_n) = \lim_{n\to\infty} \cos(n2\pi + \pi) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$

b, $a_n := n2\pi$, $b_n := n2\pi + \pi$ $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} \sin^2(n2\pi) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$, $\lim_{n\to\infty} f(b_n) = \lim_{n\to\infty} \sin^2(n2\pi + \pi) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$