

# Kalkulus tizedik feladatsor, megoldások

## Komplex számok

1. Egy síkbeli pont koordinátái az alábbiak. Mekkora szöget zár be pontba mutató vektor az  $x$  tengely pozitív felével? Milyen távolságra van a pont az origótól? Ábrázoljuk a vektorokat a koordináta-rendszerben!

a,  $(2\sqrt{3}, 2)$

b,  $(-\sqrt{5}, \sqrt{5})$

c,  $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

*Megoldások:*

a)  $r = 4, \alpha = \frac{\pi}{6},$

b)  $r = \sqrt{10}, \alpha = \frac{3\pi}{4},$

c)  $r = 1, \alpha = \frac{4\pi}{3}.$

2. Határozza meg a  $\bar{z}_1$ , a  $z_1 - 3\bar{z}_2$ , a  $z_1 \cdot z_2$ ,  $\frac{z_1}{z_2}$ , majd  $\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$  komplex szám algebrai alakját, ha  $z_1 = 3 - 2i$  és  $z_2 = 2 + i$ !

*Megoldások:*

*Az utolsó esetben például, ha  $z_1 = 3 - 2i$  és  $z_2 = 2 + i$ , akkor*

$$\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = \frac{3 + 2i}{2 - i} = \frac{(3 + 2i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = \frac{6 + 3i + 4i - 2}{5} = \frac{4}{5} + \frac{7}{5}i$$

3. Hozza algebrai alakra az alábbi kifejezéseket! Ábrázoljuk őket a komplex számsíkon!

a,  $3\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right)$

b,  $\frac{2}{2i-1}$

c,  $2(4-i) + \frac{3}{i}$

d,  $\frac{2+i}{i(1-4i)}$

*Megoldások:*

a)  $3\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right) = 3\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i,$

b)  $-0.4 - 0.8i,$

c)  $8 - 5i,$

d)  $\frac{2+i}{i(1-4i)} = \frac{2+i}{4+i} = \frac{(2+i)(4-i)}{(4+i)(4-i)} = \frac{8+4i-2i+1}{17} = \frac{9}{17} + \frac{2}{17}i.$

4. Írjuk fel a következő számok trigonometrikus alakját! Ábrázoljuk őket a komplex számsíkon!

a,  $\sqrt{6} - i\sqrt{2}$

b,  $-4i$

c,  $8$

d,  $2i-2$

*Megoldások:*

a)  $\sqrt{6} - \sqrt{2}i = \sqrt{6+2} \left( \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{8}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}}i \right) = \sqrt{8} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = \sqrt{8} \left( \cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right)$

b)  $-4i = 4 \left( \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right)$

c)  $8 = 8 (\cos 0 + i \sin 0)$

d)  $2i - 2 = 2\sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right).$

5. Oldjuk meg a komplex számok halmazán a  $z^2 + 6z + 10 = 0$  másodfokú egyenletet! A megoldáshoz helyettesítsünk be a másodfokú egyenlet megoldóképletébe:  $\frac{-6 \pm \sqrt{36 - 40}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{-4}}{2} = -3 \pm \sqrt{-1} = -3 \pm i.$

6. Oldjuk meg a komplex számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a,  $(z + 1)(\bar{z} - 3i + z(2 + i)) = 0$

b,  $* |z| - z = 1 + 2i$

c,  $* z^2 = \bar{z}$

*Megoldások:*

a)  $z_1 = -1, z_2 = \frac{3}{4} + \frac{9}{4}i.$

b)  $z = a + bi$  algebrai alakból az  $\sqrt{a^2 + b^2} - a - bi = 1 + 2i$  egyenletet kapjuk. A két oldal képzetes része megegyezik, vagyis  $b = -2$ . Emiatt a valós részekre  $\sqrt{a^2 + 4} - a = 1$  adódik, vagyis  $a^2 + 4 = a^2 + 2a + 1$ , így  $a = \frac{3}{2}$ , vagyis a megoldás  $z = \frac{3}{2} - 2i$ .

c)  $z = a + bi$  algebrai alakból  $a^2 - b^2 + 2abi = a - bi$ , vagyis  $2ab = -b$ , tehát  $b = 0$  vagy  $a = -\frac{1}{2}$ . Ha  $b = 0$ , akkor  $a^2 = a$ , tehát  $a = 0$  vagy  $a = 1$ . Ha  $a = -\frac{1}{2}$ , akkor a valós részekre az  $\frac{1}{4} - b^2 = -\frac{1}{2}$  adódik, így  $b = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Az egyenlet megoldásai:  $0, 1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ .