Kalkulus 13. és 14. gyakorlat megoldások

2020. november 16.

1.feladat

Legyenek a és b tetszőleges valós paraméterek,

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(3x-1)}, & \text{ha } x \leq 1 \\ ax+b, & \text{ha } x < 1 \end{cases}$$

Megválasztható-e a és b értéke úgy, hogy f folytonos legyen? És úgy, hogy deriválható is?

Folytonossághoz: $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) \to \frac{1}{2} = a + b$

Differenciálhatósághoz: $\frac{-3}{4} = a \Rightarrow b = \frac{5}{4}$

2.feladat

Határozza meg a deriváltfüggvényt, ahol létezik!

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(\cos^2(4x)+3)} - \dfrac{8}{(x-2)^4}, & \text{ha } x \leq 0 \\ \dfrac{\sin^2(3x)}{7x^2}, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$ Mo: Kónya 57.o.

3.feladat

Számítsuk ki az alábbi határértékeket!

a, $\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} \to \lim_{x\to 1} \frac{1/x}{1} = 1$

b, $\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(2x^3)}{\operatorname{arsh}(5x^3)} \to \lim_{x\to 0} \frac{6x^2/(4x^6+1)}{15x^2/\sqrt{25x^6+1}} = \lim_{x\to 0} \frac{6x^2}{15x^2} \frac{\sqrt{25x^6+1}}{4x^6+1} = \frac{2}{5}$

c, $\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(3x^2)}{\tan^2(x)} \to \lim_{x\to 0} \frac{6x/\sqrt{1-9x^4}}{2\sin(x)/\cos^3(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{6x}{2\sin(x)} \frac{\cos^3(x)}{\sqrt{1-9x^4}} = 3$

d, $\lim_{x\to\infty} x^2 e^{-5x} = \frac{x^2}{e^{5x}} \to \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{5e^{5x}} \to \lim_{x\to\infty} \frac{2}{25e^{5x}} = 0$

e, $\lim_{x\to 0+} \sqrt{x}\ln(x^7) = \frac{\ln(x^7)}{x^{-\frac{1}{2}}} \to \lim_{x\to 0+} \frac{7x^6/x^7}{-\frac{1}{2}x^{-\frac{-3}{2}}} = \lim_{x\to 0+} -14x^{\frac{1}{2}} = 0$

f, $\lim_{x\to 1} \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{x\ln(x)-(x-1)}{(x-1)\ln(x)} \to \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)+x/x-1}{\ln x+(x-1)/x} \to \lim_{x\to 1} \frac{1/x}{1/x+1/x^2} = \frac{1}{2}$

g, $\lim_{x\to 0+} x^{\tan(x)} = \lim_{x\to 0+} e^{\ln(x^{\tan(x)})} = \lim_{x\to 0+} e^{\tan(x)\ln(x)} = e^0 = 1$

$\lim_{x\to 0+} \tan(x)\ln(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln(x)}{\cot(x)} \to \lim_{x\to 0+} \frac{1/x}{-1/\sin^2(x)} = \lim_{x\to 0+} -\frac{\sin(x)}{x}\sin(x) = 0$

h, $\lim_{x\to -\infty} \frac{e^{8x}-2e^{-3x}}{e^{5x}+e^{-3x}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{e^{-3x}}{e^{-3x}} \frac{e^{11x}-2}{e^{8x}+1} = -2$

i. $\lim_{x\to\infty} \frac{\sinh(3x-2)}{\cosh(3x+4)} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{3x-2}-e^{-(3x-2)}}{e^{3x+4}+e^{-(3x+4)}} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{3x}}{e^{3x}} \frac{e^{-2}-e^{-6x+2}}{e^4+e^{-6x-4}} = e^{-6}$