

Kalkulus 14. és 15. gyakorlat megoldások

2025. november 15.

1.feladat

a. $f'(0) = -5$, $f'(4) = 3$. Az érintő egyenlete: $y = 10 - 5x$, $y = 3x - 6$.

b, $f'(2) = -\frac{2}{3}$. Az érintő egyenlete: $y = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}x$.

c, $f'(\frac{\pi}{2}) = -2$. Az érintő egyenlete: $y = \pi - 2x$.

d, $f'(\frac{\pi}{4}) = 0$. Az érintő egyenlete: $y = 1$.

e, $f'(0) = 1$. Az érintő egyenlete: $y = x$.

2.feladat

Legyenek a és b tetszőleges valós paraméterek,

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{(3x-1)}, & \text{ha } x \leq 1 \\ ax+b, & \text{ha } x < 1 \end{cases}$$

Megválasztható-e a és b értéke úgy, hogy f folytonos legyen? És úgy, hogy deriválható is?

Folytonossághoz: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \rightarrow \frac{1}{2} = a + b$

Differenciálhatósághoz: $\frac{-3}{4} = a \Rightarrow b = \frac{5}{4}$

3.feladat

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Nincsenek zérushelyei, mert $e^x > 0$, minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.

$$f(x) = \frac{e^x}{x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{xe^x}{(x+1)^2},$$

ezért $(-\infty, -1)$ -en és $(-1, 0)$ -án monoton fogyó, $(0, +\infty)$ -en monoton növvő a függvény. Minimum hely: $x = 0$, minimum érték: $f(0) = 1$.

4.feladat

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{5\}$. Zérushely: $x = 0$.

$$f(x) = \frac{x^2}{x-5} \Rightarrow f'(x) = \frac{x(x-10)}{(x-5)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{50}{(x-5)^3},$$

ezért $(-\infty, 5)$ -ön konkáv, $(5, +\infty)$ -en konvex a függvény. Inflexiós pont nincs.