

Kalkulus tizennyolcadik feladatsor - megoldás

Alap integrálási szabályok, Parciális integrálás

1. Számítsa ki az alábbi határozatlan integrálokat!

- a) $\int \cos^2(x) dx$
- b) $\int \sin^2(5x) dx$
- c) $\int \sin(x) \cos(x) dx$
- d) $\int \cos^3(x) \sin(x) dx$
- e) $\int \cos(x) \sin^6(x) dx$

Megoldás:

- a) $\int \cos^2(x) dx$
Felhasználva, hogy

$$\begin{aligned}\cos^2(x) + \sin^2(x) &= 1 \\ \cos^2(x) - \sin^2(x) &= \cos(2x).\end{aligned}$$

Ha összeadjuk a két egyenletet, és elosztjuk kettővel az eredményt, az alábbi azonosságot kapjuk:

$$\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}.$$

Az integrál tehát

$$\int \cos^2(x) dx = \int \frac{1 + \cos(2x)}{2} dx = \int \frac{1}{2} dx + \int \frac{\cos(2x)}{2} dx.$$

A második tag egy egyszerű összetett függvény:

$$\frac{1}{4} \int 2 \cdot \cos(2x) dx = \frac{1}{4} \int (2x)' \cdot \cos(2x) dx = \frac{1}{4} \sin(2x) + C.$$

A végeredmény tehát

$$\int \cos^2(x) dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} + C = \frac{x + \sin(x) \cos(x)}{2} + C,$$

utolsó lépésként akár ki is fejthetjük a végeredményt egyszeres szöget tartalmazó szögfüggvényekkel (tetszőleges).

- b) $\int \sin^2(5x) dx$
Itt hasonlóan a

$$\begin{aligned}\cos^2(y) + \sin^2(y) &= 1 \\ \cos^2(y) - \sin^2(y) &= \cos(2y)\end{aligned}$$

azonosságokat felhasználva a különbség felére kapjuk, hogy

$$\sin^2(y) = \frac{1 - \cos(2y)}{2}.$$

Ezt felhasználva $y = 5x$ behelyettesítéssel

$$\begin{aligned} \int \sin^2(5x) dx &= \int \frac{1 - \cos(10x)}{2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int 1 dx - \frac{1}{20} \int 10 \cos(10x) dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(10x)}{20} + C. \end{aligned}$$

c) $\int \sin(x) \cos(x) dx$

$$\int \sin(x) \cos(x) dx$$

Felhasználva, hogy $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$:

$$\int \sin(x) \cos(x) dx = \frac{1}{2} \int \sin(2x) dx = \frac{1}{4} \int 2 \cdot \sin(2x) dx = -\frac{1}{4} \cos(2x) + C$$

d) A következő integrálási szabályt használjuk: $\int f'(x) f^\alpha(x) dx = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + C, C \in \mathbb{R}, \text{ ld. 17. gyakorlat/4.c)}$

2. Határozza meg, hogy milyen típusú az integrál, majd számítsa ki a határozatlan integrált! *(Vegyes feladatok, Mo: Kónya 5.1 fejezet)*

a) $\int (2x + 3)^5 dx$

b) $\int \frac{1}{(2x+3)^5} dx$

c) $\int \frac{2}{9x+1} dx$

d) $\int \frac{2}{(9x+1)^2} dx$

e) $\int \frac{2}{9x^2+1} dx$

f) $\int \frac{2}{9x^2+3} dx$

g) $\int \frac{2x}{9x^2+3} dx$

h) $\int \frac{2x+4}{9x^2+3} dx$

i) * $\int \frac{2}{9x^2+6x+3} dx$

j) * $\int \frac{18x+8}{9x^2+6x+3} dx$

3. Számítsa ki az alábbi határozatlan integrálokat!

a) $\int x \cos(2x) dx$

b) $\int x e^{-x} dx$

c) $\int (x^2 + 1) e^x dx$

d) $\int (3x - 1) \sin(5x + 3) dx$ (K87)

e) $\int x^3 \ln(2x) dx$ (K87)

f) $\int \ln(x) dx$

g) $\int \arctan(2x) dx$ (K87)

- h) $\int \ln(5x) \, dx$
 i) $\int (2x + 5) \ln(5x) \, dx$
 j) $\int (5x + 2) \sinh(4x) \, dx$
 k) $\int x^2 \cos(3x) \, dx$

Megoldás: A parciális integrálás képlete: $\int f'g = fg - \int fg'$

$$h) \int \ln(5x) \, dx = \int \overbrace{1}^{f'} \cdot \overbrace{\ln(5x)}^g \, dx = x \ln(5x) - \int x \frac{1}{5x} 5 \, dx = x \ln(5x) - \int 1 \, dx = x \ln(5x) - x + C$$

$$i) \int (2x+5) \ln(5x) \, dx = \int \overbrace{(2x+5)}^{f'} \cdot \overbrace{\ln(5x)}^g \, dx, \text{ Ekkor } f(x) = x^2 + 5x \\ \int (2x+5) \ln(5x) \, dx = (x^2 + 5x) \ln(5x) - \int (x^2 + 5x) \frac{1}{5x} 5 \, dx = \\ (x^2 + 5x) \ln(5x) - \int x + 5 \, dx = (x^2 + 5x) \ln(5x) - \left(\frac{x^2}{2} + 5x\right) + C$$

$$j) \int (5x+2) \sinh(4x) \, dx = \int \overbrace{(5x+2)}^g \cdot \overbrace{\sinh(4x)}^{f'} \, dx \text{ Ekkor } f = \frac{\cosh(4x)}{4} \\ \int (5x+2) \sinh(4x) \, dx = (5x+2) \frac{\cosh(4x)}{4} - \int \frac{\cosh(4x)}{4} 5 \, dx = (5x+2) \frac{\cosh(4x)}{4} - \frac{\sinh(4x)}{16} 5 + C$$

$$k) \int x^2 \cos(3x) \, dx = \int \overbrace{x^2}^g \cdot \overbrace{\cos(3x)}^{f'} \, dx \text{ Ekkor } f = \frac{\sin(3x)}{3}, \\ \int x^2 \cos(3x) \, dx = x^2 \frac{\sin(3x)}{3} - \int 2x \frac{\sin(3x)}{3} \, dx$$

$$\int 2x \frac{\sin(3x)}{3} \, dx = \frac{2}{3} \int \overbrace{x}^g \cdot \overbrace{\sin(3x)}^{f'} \, dx \text{ Ekkor } f = -\frac{\cos(3x)}{3}, \\ \int 2x \frac{\sin(3x)}{3} \, dx = \frac{2}{3} \left(-\frac{x \cos(3x)}{3} - \int -\frac{\cos(3x)}{3} \, dx \right) =$$

$$= -\frac{2x \cos(3x)}{9} + \frac{2 \sin(3x)}{27} + C$$

$$\int x^2 \cos(3x) \, dx = x^2 \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{2x \cos(3x)}{9} - \frac{2 \sin(3x)}{27} + C$$