

Kalkulus tizenkilencedik feladatsor

Határozott integrál, Newton-Leibniz szabály, Improprius integrál

1. Számítsa ki az alábbi határozott integrálokat! (Kónya 5.4 fejezet)

a) $\int_{-1}^2 x^2 - 1 \, dx$

b) $\int_0^{\pi} \cos^2(x) \, dx$ (Mo: Kónya 92.o.)

c) $\int_0^2 e^{|2x-1|} \, dx$ (Mo: Kónya 93.o.)

d) $\int_{-1}^2 |x^2 - 3x| \, dx$

e) $\int_0^3 \operatorname{sign}(x^2 - 4) \, dx$

Megoldás:

a) Kihasználjuk, hogy függvények összegét lehet tagonként integrálni.

$$\int_{-1}^2 x^2 - 1 \, dx = \int_{-1}^2 x^2 \, dx + \int_{-1}^2 -1 \, dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^2 + [-x]_{-1}^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} + (-2) - 1 = 0$$

d) Az integrált felbontjuk két intervallumra: a $(-1, 0)$ intervallumon $x^2 - 3x > 0$, illetve a $(0, 2)$ intervallumon $x^2 - 3x < 0$, ezért a megfelelő előjel beírásával az abszolút érték elhagyható.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 |x^2 - 3x| \, dx &= \int_{-1}^0 |x^2 - 3x| \, dx + \int_0^2 |x^2 - 3x| \, dx = \int_{-1}^0 x^2 - 3x \, dx + \int_0^2 -(x^2 - 3x) \, dx = \\ &= \int_{-1}^0 x^2 \, dx + \int_{-1}^0 -3x \, dx + \int_0^2 -x^2 \, dx + \int_0^2 3x \, dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^0 + \left[-\frac{3}{2}x^2 \right]_{-1}^0 + \left[-\frac{x^3}{3} \right]_0^2 + \left[\frac{3}{2}x^2 \right]_0^2 = \\ &= 0 - \frac{(-1)^3}{3} - 0 + \frac{3}{2}(-1)^2 - \frac{2^3}{3} + 0 + \frac{3}{2}2^2 - 0 = \frac{31}{6} \end{aligned}$$

2. Számítsa ki az alábbi határozott integrálokat! (Kónya 5.4 fejezet)

a) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(x) \, dx$

b) $\int_{-5}^5 \sin(x) e^{-x^2} \, dx$

c) $\int_{-2}^2 x e^{-x^2} \, dx = ?$

Megoldás:

- a) Az integrált felbontjuk a $(-\pi, 0)$ és $(0, \pi)$ intervallumokra. $\cos^2(x)$ páros függvény, ezért a két intervallumon meg fog egyezni az integrál. Az 1/b feladat alapján $\int_0^\pi \cos^2(x) dx = \pi/2$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(x) dx = \int_{-\pi}^0 \cos^2(x) dx + \int_0^{\pi} \cos^2(x) dx = 2 \int_0^{\pi} \cos^2(x) dx = 2 \frac{\pi}{2} = \pi$$

- b) Az integrált felbontjuk a $(-5, 0)$ és $(0, 5)$ intervallumokra. $\sin(x)e^{-x^2}$ páratlan függvény, mert egy páratlan és egy páros függvény szorzata, ezért a két intervallumon egymás -1 -szerese lesz az integrál.

$$\int_{-5}^5 \sin(x) e^{-x^2} dx = \int_{-5}^0 \sin(x) e^{-x^2} dx + \int_0^5 \sin(x) e^{-x^2} dx = \int_{-5}^0 \sin(x) e^{-x^2} dx - \int_{-5}^0 \sin(x) e^{-x^2} dx = 0$$

3. Számítsa ki az alábbi improprius integrálokat! (Kónya 5.8 fejezet, mo: 103-106.o.)

a) $\int_1^{\infty} \frac{2}{x^2} dx = ?$

b) $\int_{-5}^0 \frac{1}{(x+5)^3} dx = ?$

c) $\int_1^3 \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}} dx = ?$

d) $\int_{-1}^{\infty} \frac{4}{x^2+2x+5} dx = ?$

e) $\int_{-\infty}^{-4} \frac{1}{x^2+2x-3} dx = ?$

f) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\arctan^2(2x)}{1+4x^2} dx = ?$

g) $\int_{-2}^0 \frac{6}{\sqrt{4+2x}} dx = ?$

h) $\int_0^{1/e} \frac{\ln^2(x)}{x} dx = ?$

4. Mekkora az $f(x) = x^2 + 2x$ és a $g(x) = 4 - x^2$ görbéje közötti területet (Kónya 5.5 fejezet, mo: 94.o.)

5. Számítsa ki az $y = \ln(x)$ görbéje, valamint az $y = 0$, $x = \frac{1}{e}$, $x = e$ egyenesek közé eső síkrész területe? (Mo: Kónya 95.o.)

6. Számítsuk ki a 90° -os nyílásszögű körkúp térfogatát!

Megoldás:

Egy folytonos, nem negatív f függvény grafikonjának x tengely körüli elforgatásával kapott forgástest térfogata: $V = \pi \int_a^b f(x) dx$. A 90° -os nyílásszögű körkúp esetén $f(x) = x$, $a = 0$, $b = h$, ahol h a kúp magassága és $r = h$ a kúp alapjának sugara.

$$V(h) = \pi \int_0^h x^2 dx = \pi \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^h = \frac{1}{3} h^3 \pi$$