Kalkulus 1. gyakorlat megoldások

Molnár Dániel

2020. szeptember 27.

1.feladat

(a) $A \in \mathbb{R}^{2\times 4}$

(b) $a_{1,4} = 6$

(c) $\nexists\ a_{4,1}$

2.feladat

(a) $0,5A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2,5 & 3 \\ 2,5 & 3 & -0,5 & -11,5 \end{bmatrix}$

(b) $\nexists$

(c) $A + 2A = 3A = \begin{bmatrix} 6 & 12 & 15 & 18 \\ 15 & 18 & -3 & -69 \end{bmatrix}$

(d) $AB = \begin{bmatrix} 106 & -8 \\ -178 & 128 \end{bmatrix}$

(e) $\nexists$

(f) $\nexists$

(g) $A^{\mathrm{T}}\mathrm{B}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 37 & -5 & 32 & -7 \\ 46 & 2 & 48 & 6 \\ -2 & 28 & 26 & 50 \\ -155 & 99 & -56 & 169 \end{bmatrix}$

(h) $B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} = (AB)^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 106 & -178 \\ -8 & 128 \end{bmatrix}$

(i) $\nexists$

(j) $\nexists$

(k) $CA = \begin{bmatrix} 21 & 38 & 39 & 25 \\ 43 & 58 & 13 & -137 \end{bmatrix}$

(l) $\nexists$

(m) $B(C + D) = \begin{bmatrix} 37 & 47 \\ 33 & 7 \\ 70 & 54 \\ 61 & 15 \end{bmatrix}$

(n) $\nexists$

(o) $BC + BD = B(C + D) = \begin{bmatrix} 37 & 47 \\ 33 & 7 \\ 70 & 54 \\ 61 & 15 \end{bmatrix}$

Extra: igaz-e, hogy $(C + D)^2 = C^2 + 2CD + D^2$? Nem, mivel a mátrix szorzás nem kommutatív.

A helyes képlet: $(C + D)^2 = (C + D)(C + D) = C^2 + CD + DC + D^2$, ellenőrizzük ezeket a képleteket.

3.feladat

Lássuk be a determináns kiszámítása nélkül, hogy az

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix nem invertálható. (Megj.: $\exists M^{-1} \iff \det(M) \neq 0$)

Megoldás indirekt bizonyítással: Tegyük fel, hogy ∃M inverze M^{-1}, akkor definíció szerint

$$MM^{-1} = M^{-1}M = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Az inverz elemeit a következőképpen elnevezzük: $M^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

Majd az ismeretlen inverz négy elemére kaphatunk egyenleteket, ha behelyettesítünk az inverz definicíójába:

$$MM^{-1} = I \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vagyis $a + c = 1,\ b + d = 0,\ a + c = 0,\ b + d = 1$. Mivel $a + c$ (és $b + d$) nem lehet egyszerre 0 és 1 is, ezért ellentmondásra jutottunk, tehát az eredeti feltevésünk, hogy létezik az M mátrixnak inverze hamis volt.