Kalkulus 2. gyakorlat megoldások

Molnár Dániel

2021. szeptember 13.

1.feladat

(a) $\det(A) = -12$

(b) $\det(B) = -24$

(c) $\det(C) = -102$

(f) $d_{i,2} = 0$, ahol $i = 1, 2, 3 \to \det(D) = 0$

(e) $2 \cdot f_{i,1} = f_{i,2}$, ahol $i = 1, 2, 3 \to \det(F) = 0$

(e) $\det(G) = 0$

2.feladat

$\det(A) = -102$, $\det(B) = 8$

(a) $\det(AB) = \det(A)\det(B) = -816$

(b) $\det(A^{\mathrm{T}}B) = \det(A^{\mathrm{T}})\det(B) = \det(A)\det(B) = -816$

(c) $\det(BA) = \det(B)\det(A) = -816$

(d) $\det(A^{-1}B) = \det(A^{-1})\det(B) = \frac{\det(B)}{\det(A)} = -\frac{4}{51}$

(e) $\det(A^{-1}BA) = \det(A^{-1})\det(B)\det(A) = \det(A^{-1})\det(A)\det(A^{-1}) = \det(A^{-1}A)\det(B) = \det(I)\det(B) = 1 \cdot 8 = 8$

3.feladat

(a) $\det(C) = 1$

(b) $D = C + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} & c_{1,4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \det(D) = \det(C) = 1$ (C első sorát hozzáadtuk a másodikhoz, ettől nem változik a determináns.)

(c) $F = \begin{bmatrix} c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} & c_{2,4} \\ c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} & c_{1,4} \\ c_{3,1} & c_{3,2} & c_{3,3} & c_{3,4} \\ c_{4,1} & c_{4,2} & c_{4,3} & c_{4,4} \end{bmatrix} \to \det(F) = -\det(C) = -1$ (C első két sorát megcseréltük, ettől -1-szeresére változik a determináns.)

(d) $G = \begin{bmatrix} f_{1,1} & f_{1,2} & f_{1,3} & f_{1,4} \\ f_{2,1} & f_{2,2} & f_{2,3} & f_{2,4} \\ f_{3,1} & f_{3,2} & f_{3,3} & f_{3,4} \\ 6f_{4,1} & 6f_{4,2} & 6f_{4,3} & 6f_{4,4} \end{bmatrix} \to \det(G) = 6\det(F) = -6$ (F utolsó sorát megszoroztuk hattal, ettől 6-szorosára változik a determináns.)

(e) $H = F^{\mathrm{T}} \to \det(H) = \det(F) = -6$ (A transzponálás nem változtatja meg a determinánst.)

4.feladat

Legyen $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, ahol $\det(A) = ad - bc = 1$, $B = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

$AB = \begin{bmatrix} ad - bc & -ab + ba \\ -cd + dc & -cb + da \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Ha $C = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$, $\det(C) = eh - fg \neq 0$, akkor $C^{-1} = \frac{1}{\det(C)} \begin{bmatrix} h & -f \\ -g & e \end{bmatrix}$

Biz.: $\frac{1}{\det(C)} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h & -f \\ -g & e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} eh - fg & -ef + fe \\ gh - hg & -fg + he \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(C)} \begin{bmatrix} \det(C) & 0 \\ 0 & \det(C) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

5.* feladat

(a) $\det(M) = 0$

(b) $\det(M) = (a - b_1)(a - b_2)...(a - b_n)$

(c) $\det(M) = (a + b^{n-1})(a - b)^{n-1}$, $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$