Kalkulus 4. gyakorlat megoldások

2024. október 6.

1.feladat

a, $a_n = 1 + \frac{1}{n}$: Korlátos. Biz: $1 \leq 1 + \frac{1}{n} \leq 2 \rightarrow 0 \leq \frac{1}{n} \leq 1 \rightarrow 0 \leq 1 \leq n$. Monoton fogyó, határértéke: 1, konvergens.

b, Korlátos, nem monoton (ugrál), határértéke: 0, konvergens.

c, $c_n = 2^n$: Nem korlátos. Biz.: $\forall$ P $\exists$ N(P)$\in \mathbb{R}$: $\forall n >$N(P) esetén $c_n = 2^n >$ P $\rightarrow n \log_2(2) > log_2$(P) $\rightarrow n > log_2$(P) $\rightarrow$ N(P) $= log_2$(P). Monoton növő. $\lim 2^n = +\infty$, divergens.

d, Nem korlátos, monoton csökkenő, határértéke: $-\infty$, divergens.

e, Nem korlátos, nem monoton (ugrál), nincs határértéke, divergens.

f, Korlátos, nem monoton, nincs határértéke, divergens.

2.feladat

a, nincs ilyen sorozat;

b, Például: $x_n = (-1)^n$;

c, Például: $x_n = n^2$;

d, Például: $x_n = -\frac{1}{n}$;

e, Például: $x_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$;

f, Például: $x_n = -n - 1$;

g, Például: $x_n = n^2$;

3.feladat

a, $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2} = 0$;

b, $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$;

c, Nincs ilyen, ugyanis a $a_n \rightarrow +\infty$ és $b_n \rightarrow +\infty$ feltételek miatt elég nagy n-re a számláló és a nevező is pozitív, így nem tarthat a hányados negatív számhoz.

d, $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n-1} = +\infty$;

4.feladat

a, $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+3n^2-7}{5n^3+9n} = \frac{1}{5}$

b, $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+7n}{n^3-12n} = 0$

c, $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+3n^2+7}{3n^2+17} = \infty$

d, $\lim_{n\to\infty} \frac{n-3n^2-1}{5-n} = \infty$

e, $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-n^6-n^5}{n-4n^5+n^8} = 0$

f, $\lim_{n\to\infty} \frac{n^4}{5-4\sqrt{n}-6n^4} = -\frac{1}{6}$

5.feladat*

b, $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+4n+7}{n^2+n+1} = 3$ Biz.: $|\frac{3n^2+4n+7}{n^2+n+1} - 3| = |\frac{n+4}{n^2+n+1}| \leq |\frac{n+4n}{n^2+n+1}| < |\frac{5n}{n^2+n}| = |\frac{5}{n+1}| = \frac{5}{n+1} < \epsilon \to \frac{5}{\epsilon} - 1 < n \to$ $\mathrm{N}_\epsilon := \frac{5}{\epsilon} - 1$

c, $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-10^8}{5n^6+2n^3-1} = 0$ Biz.: Ha $n > 10^4$: $|\frac{n^2-10^8}{5n^6+2n^3-1} - 0| < |\frac{n^2}{5n^6+2n^3-1}| < |\frac{n^2}{5n^6+2n^3-n^2}| = |\frac{1}{5n^4+2n-1}| < \frac{1}{5n^4-1} < \epsilon \to \frac{1}{\epsilon} < 5n^4 - 1 \to (\frac{1}{\epsilon} + 1)^{\frac{1}{4}} < n \to \mathrm{N}_\epsilon := \max(10^4, (\frac{1}{\epsilon} + 1)^{\frac{1}{4}})$