

Kalkulus 5. gyakorlat megoldások

2025. október 10.

1.feladat

a, $a_n = 1 + \frac{1}{n}$: Korlátos. Biz: $1 \leq 1 + \frac{1}{n} \leq 2 \rightarrow 0 \leq \frac{1}{n} \leq 1 \rightarrow 0 \leq 1 \leq n$. Monoton fogyó, határértéke: 1, konvergens.

b, Korlátos, nem monoton (ugrál), határértéke: 0, konvergens.

c, $c_n = 2^n$: Nem korlátos. Biz.: $\forall P \exists N(P) \in \mathbb{R} : \forall n > N(P)$ esetén $c_n = 2^n > P \rightarrow n \log_2(2) > \log_2(P) \rightarrow n > \log_2(P) \rightarrow N(P) = \log_2(P)$. Monoton növény. $\lim 2^n = +\infty$, divergens.

d, Nem korlátos, monoton csökkenő, határértéke: $-\infty$, divergens.

e, Nem korlátos, nem monoton (ugrál), nincs határértéke, divergens.

f, Korlátos, nem monoton, nincs határértéke, divergens.

g, Nem korlátos, monoton növény, határértéke: $+\infty$, divergens.

2.feladat

a, nincs ilyen sorozat;

b, Például: $x_n = (-1)^n$;

c, Például: $x_n = n^2$;

d, Például: $x_n = -\frac{1}{n}$;

e, Például: $x_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$;

f, Például: $x_n = -n - 1$;

g, Például: $x_n = n^2$;

3.feladat

a, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2} = 0$;

b, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$;

c, Nincs ilyen, ugyanis a $a_n \rightarrow +\infty$ és $b_n \rightarrow +\infty$ feltételek miatt elég nagy n -re a számláló és a nevező is pozitív, így nem tarthat a hányados negatív számhoz.

d, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1}{n-1} = +\infty$;

e, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-n^3}{n+1} = -\infty$;

4.feladat*

b, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2+4n+7}{n^2+n+1} = 3$ Biz.: $\left| \frac{3n^2+4n+7}{n^2+n+1} - 3 \right| = \left| \frac{n+4}{n^2+n+1} \right| \leq \left| \frac{n+4n}{n^2+n+1} \right| < \left| \frac{5n}{n^2+n} \right| = \left| \frac{5}{n+1} \right| = \frac{5}{n+1} < \epsilon \rightarrow \frac{5}{\epsilon} - 1 < n \rightarrow N_\epsilon := \frac{5}{\epsilon} - 1$

c, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-10^8}{5n^6+2n^3-1} = 0$ Biz.: Ha $n > 10^4$: $\left| \frac{n^2-10^8}{5n^6+2n^3-1} - 0 \right| < \left| \frac{n^2}{5n^6+2n^3-1} \right| < \left| \frac{n^2}{5n^6+2n^3-n^2} \right| = \left| \frac{1}{5n^4+2n-1} \right| < \frac{1}{5n^4-1} < \epsilon \rightarrow \frac{1}{\epsilon} < 5n^4 - 1 \rightarrow \left(\frac{1}{\epsilon} + 1\right)^{\frac{1}{4}} < n \rightarrow N_\epsilon := \max(10^4, \left(\frac{1}{\epsilon} + 1\right)^{\frac{1}{4}})$