Komplex számok - megoldások

1. Határozza meg a $\dfrac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$ komplex szám algebrai alakját, ha $z_1 = 3 - 2i$ és $z_2 = 2 + i$!

   Ha $z_1 = 3 - 2i$ *és* $z_2 = 2 + i$, *akkor*

$$\frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2} = \frac{3+2i}{2-i} = \frac{(3+2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{6+3i+4i-2}{5} = \frac{4}{5} + \frac{7}{5}i$$

2. Hozza algebrai alakra az alábbi kifejezéseket!

   a, $3\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

   b, $\dfrac{2+i}{i(1-4i)}$

   Megoldások: a) $3\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right) = 3\left(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{3\sqrt{3}}{2}i,$

   b) $\dfrac{2+i}{i(1-4i)} = \dfrac{2+i}{4+i} = \dfrac{(2+i)(4-i)}{(4+i)(4-i)} = \dfrac{8+4i-2i+1}{17} = \dfrac{9}{17} + \dfrac{2}{17}i.$

3. Írjuk fel a következő számok trigonometrikus alakját!

   a, $\sqrt{6} - 2i\sqrt{2}$

   b, -4i

   c, 8

   Megoldások: a) $\sqrt{6} - \sqrt{2}i = \sqrt{6+2}\left(\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{8}} - \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}}i\right) = \sqrt{8}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i\right) = \sqrt{8}\left(\cos\dfrac{11\pi}{6} + i\sin\dfrac{11\pi}{6}\right)$

   b) $-4i = 4\left(\cos\dfrac{3\pi}{2} + i\sin\dfrac{3\pi}{2}\right)$, *c)* $8 = 8(\cos 0 + i\sin 0)$.

4. Végezzük el a következő hatványozásokat!

   a, $(1+i\sqrt{3})^3$

   b, $(1+i)^8$

   c, $(1-i)^4$

   Megoldások: a) $(1+i\sqrt{3})^3 = \left(2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)\right)^3 = 8(\cos\pi + i\sin\pi) = -8.$

   b) $1+i = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$, *így* $(1+i)^8 = (\sqrt{2})^8\left(\cos\dfrac{8\pi}{4} + i\sin\dfrac{8\pi}{4}\right) = 16.$

   c) $1-i = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7\pi}{4} + i\sin\dfrac{7\pi}{4}\right)$, *így* $(1-i)^4 = (\sqrt{2})^4(\cos 7\pi + i\sin 7\pi) = -4.$

5. Végezzük el a következő gyökvonásokat a komplex számok halmazán!

   a, $\sqrt[3]{1}$

b, $\sqrt[4]{-16}$

c, $\sqrt[3]{1+i\sqrt{3}}$

Megoldások: a) $1=\cos 0+i\sin 0$*, tehát a 3 harmadik gyök*

$$\cos 0+i\sin 0=1,\qquad \cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\qquad \cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

b) $-16=16(\cos\pi+i\sin\pi)$ *és* $\sqrt[4]{16}=2$*, tehát a 4 negyedik gyök:*

$$2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}+\sqrt{2}i,\qquad 2\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}+\sqrt{2}i,$$

$$2\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}-\sqrt{2}i,\quad 2\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)=\sqrt{2}-\sqrt{2}i.$$

c) $1+i\sqrt{3}=\sqrt{1+3}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$*, tehát a harmadik gyökök:*

$$\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{9}+i\sin\frac{\pi}{9}\right),\quad \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{9}+i\sin\frac{7\pi}{9}\right),\quad \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{13\pi}{9}+i\sin\frac{13\pi}{9}\right).$$

6. Oldjuk meg a komplex számok halmazán a $z^2+6z+10=0$ másodfokú egyenletet!

A megoldáshoz helyettesítsünk be a másodfokú egyenlet megoldóképletébe: $\dfrac{-6\pm\sqrt{36-40}}{2}=\dfrac{-6\pm\sqrt{-4}}{2}=-3\pm\sqrt{-1}=-3\pm i.$

7. Oldjuk meg a komplex számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a, $z^3=1+i$

b, $|z|-z=1+2i$

c, $z^2=\overline{z}$

d, $2iz^3=(1+i)^8$

e, $\dfrac{7i+3}{7-3i}z^4+8(\sqrt{3}+i)=0$

f, $(z^4-1)(z^2+(5-2i)z+5(1-i))=0$

Megoldások: a) $z^3=1+i$ *egyenlet megoldásai* $1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ *harmadik gyökei, vagyis*

$$\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right),\quad \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right),\quad \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12}+i\sin\frac{17\pi}{12}\right).$$

b) $z=a+bi$ *algebrai alakból az* $\sqrt{a^2+b^2}-a-bi=1+2i$ *egyenletet kapjuk. A két oldal képzetes része megegyezik, vagyis* $b=-2$*. Emiatt a valós részekre* $\sqrt{a^2+4}-a=1$ *adódik, vagyis* $a^2+4=a^2+2a+1$*, így* $a=\frac{3}{2}$*, vagyis a megoldás* $z=\frac{3}{2}-2i$*.*
c) $z=a+bi$ *algebrai alakból* $a^2-b^2+2abi=a-bi$*, vagyis* $2ab=-b$*, tehát* $b=0$ *vagy* $a=-\frac{1}{2}$*. Ha* $b=0$*, akkor* $a^2=a$*, tehát* $a=0$ *vagy* $a=1$*. Ha* $a=-\frac{1}{2}$*, akkor a valós részekre az* $\frac{1}{4}-b^2=-\frac{1}{2}$ *adódik, így* $b=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$*. Az egyenlet megoldásai:* $0,1,-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$*.*

d) $(1+i)^8 = 16$, *tehát* $iz^3 = 8$, *így* $z^3 = -8i = 8\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$, *vagyis a megoldások a harmadik gyökök:*

$$2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2i,$$
$$2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + i,$$
$$2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right) = \sqrt{3} - i.$$

e) $\frac{7i+3}{7-3i} = \frac{i(7-3i)}{7-3i} = i$, *vagyis* $iz^4 = -8(\sqrt{3}+i)$, *tehát*

$$z^4 = 8(\sqrt{3}i - 1) = 8\cdot 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2^4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right),$$

így a megoldások:

$$2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + i, \qquad 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = -1 + \sqrt{3}i$$

$$2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} - i, \quad 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = 1 - \sqrt{3}i$$

f) $z_1 = i, z_2 = -1, z_3 = -i, z_4 = 1, z_5 = i-2, z_6 = i-3.$