

Minimum követelmények

A zárthelyin és vizsgán lehetségesen előforduló feladatok

1. Lineáris algebra

- **Mátrix-műveletek. Determináns-számítás, rangszámítás.**

1. Feladat. Legyen $\mathbf{A}$ az alábbi mátrix:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -6 \\ 4 & -1 & 7 \\ 5 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Számolja ki az $\mathbf{A}$ mátrix determinánsát és rangját, illetve végezze el a $\mathbf{A}\underline{b}$ mátrix-vektor szorzást, ahol $\underline{b} = (1, 2, 3)^T$!

- **Lineáris egyenletrendszer megoldása. Determináns-számítás, rangszámítás, inverz létezése.**

2. Feladat. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert Gauss-eliminációval!

$$\begin{aligned} 2x - z &= 24 \\ 6x + 4y - 2z &= 70 \\ -x + 10y + 5z &= -25 \end{aligned}$$

Számítsa ki az együtthatómátrix determinánsát és rangját!

3. Feladat. Legyen $\mathbf{A}$ az alábbi mátrix:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Oldja meg az $\mathbf{A} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ -14 \\ -5 \end{bmatrix}$ egyenletet Gauss-elimináció segítségével, majd számítsa ki $\mathbf{A}$ determinánsát! Van-e az $\mathbf{A}$ mátrixnak inverze? (Nem kell az inverz mátrixot kiszámolni!)

2. Sorozatok

- Nevezetes sorozatok határértéke:

$$\frac{1}{n^k}, \quad n^k, \quad \sqrt[n]{a}, \quad \sqrt[n]{n}, \quad \sqrt[k]{n}, \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

1. **Feladat.** Határozzuk meg az alábbi sorozatok határértékét!

$$a_n = \frac{3}{n^5}, \quad a_n = n^4, \quad a_n = \sqrt[5]{n}, \quad a_n = \sqrt[n]{6}.$$

- Az Euler-sorozat:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

2. **Feladat.** Határozzuk meg az alábbi sorozatok határértékét!

$$a_n = \left(\frac{n-2}{n+4}\right)^n, \quad a_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{3n}.$$

- Határérték és műveletek. Nagyságrendek összehasonlítása:

$$\log_a n \ll n^k \ll a^n \ll n! \ll n^n$$

3. **Feladat.** Határozzuk meg az alábbi sorozatok határértékét!

$$a_n = 2n^2 + 3n^2 + 5 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}, \quad a_n = \sqrt[3]{n} + 3\sqrt[n]{3}.$$

$$a_n = \frac{2n^3 + 1}{n^3 - n^2 - 5}, \quad a_n = \frac{(-3)^{n+1} + 2^{2n+3}}{8 + 5^n}, \quad a_n = \frac{n! - 3^{2n}}{1 + 4n^2 - 7}.$$

- A rendőrlv alkalmazása.

4. **Feladat.** Határozzuk meg az alábbi sorozatok határértékét!

$$a_n = \sqrt[n]{2n^{10} + 3n^2 + 1}, \quad a_n = \sqrt[n]{\frac{n^4 + 3n}{2n^3 + 10}}.$$

- Egy cseles határérték.

5. **Feladat.** Határozzuk meg az alábbi sorozat határértékét!

$$a_n = (\sqrt{2n^4 + n} - \sqrt{2n^4 + 3n^3}).$$

3. Komplex számok

- Műveletek komplex számok algebrai és trigonometrikus alakjával.

1. **Feladat.** Legyen $z_1 = 2 + 3i$ és $z_2 = 4i - 2$. Határozzuk meg az

$$3z_1 - 2\overline{z_2}$$

kifejezés értékét, a megoldást algebrai alakban adjuk meg!

- Komplex számok algebrai és trigonometrikus alakja. Ábrázolás a komplex számsíkon.

2. **Feladat.** Írjuk fel a

$$z = \sqrt{3} - i$$

komplex szám trigonometrikus alakját, majd ábrázoljuk a komplex számsíkon!

3. **Feladat.** Adjuk meg a

$$z = \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right)$$

komplex szám algebrai alakját és ábrázoljuk a komplex számsíkon!

- Valós együtthatós negatív diszkriminánsú másodfokú egyenletek megoldása a komplex számok halmazán.

4. **Feladat.** Oldjuk meg a

$$z^2 - 4z + 13 = 0$$

egyenletet a komplex számok halmazán!

4. Függvények folytonossága és határértéke

- Függvények határértéke. Bal- és jobboldali határértéke. Szakadási helyek típusai.

1. **Feladat.** Határozzuk meg az alábbi $\pm\infty$ -ben vett határértékeket!

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{2x}, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x^2 - 3x + 5), \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x^3 - 3x + 1).$$

2. **Feladat.** Határozzuk meg az alábbi függvények bal- és jobb oldali határértékeit az adott pontokban!

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x^2 - 5x}, \quad \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{x - 5}, \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x + 1}{x^2 - 2x - 3}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}.$$

3. **Feladat.** Vizsgáljuk meg az alábbi függvények szakadási helyét és a szakadás típusát!

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}, \quad f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad f(x) = \begin{cases} x - 1, & x < 0, \\ x + 2, & x \geq 0. \end{cases}$$

- Inverz függvény fogalma. Kompozíció függvény fogalma.

4. Feladat. Határozzuk meg az alábbi függvények inverzét! Adja meg az értelmezési tartományt és az értékkészletet is!

$$f(x) = \ln(3x - 1) + 2, \quad f(x) = 5x - 4, \quad f(x) = \frac{2^{x-2}}{3}$$

5. Feladat. Határozzuk az $f \circ g$ és $g \circ f$ összetett függvényeket!

$$f(x) = x^2 - 1, \quad g(x) = \frac{1}{x}, \quad \text{illetve} \quad f(x) = 1 - \sqrt{x}, \quad g(x) = e^x$$

5. Deriválás

• **Differenciálhatóság fogalma. Derivált jelentése.**

1. Feladat. Határozzuk meg az alábbi függvények deriváltját a megadott pontban a derivált definíciója alapján!

$$f(x) = 3x^2 - 5x + 1, \quad x_0 = 2, \quad f(x) = \frac{1}{x}, \quad x_0 = 1, \quad f(x) = \sqrt{x}, \quad x_0 = 4.$$

• **Deriválási szabályok és elemi függvények deriváltjai. Magasabb rendű deriváltak meghatározása.**

2. Feladat. Határozzuk meg az alábbi függvények deriváltjait!

a) $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 7x - 5$

b) $f(x) = 3\sqrt{x} + \frac{2}{x} - 3x$

c) $f(x) = x^2 \sin(x)$

d) $f(x) = (2x - 1)(x^2 + 3)$

e) $f(x) = e^x \ln(x)$

f) $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$

g) $f(x) = \frac{\sin(x)}{x^2}$

h) $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$

i) $f(x) = \frac{\ln(x)}{\cos(x)}$

3. Feladat. Határozzuk meg az alábbi függvények másodrendű deriváltjait!

$$f(x) = x^2 - 5x + 3, \quad f(x) = e^{2x}, \quad f(x) = \cos(x).$$

• **Kompozíció függvények deriváltjai.**

4. Feladat. Határozzuk meg az alábbi függvények deriváltjait!

- a) $f(x) = \tan(2x)$
- b) $f(x) = \sqrt{\ln(x)}$
- c) $f(x) = e^{-x^2+1}$
- d) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 6x - 5}$
- e) $f(x) = (x^2 \sin(x))^9$
- f) $f(x) = \sin\left(\frac{e^x}{x+1}\right)$
- g) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$

————— **Idáig tart a zh anyaga.** —————

• **Függvényvizsgálat.**

5. Feladat. Végezzünk függvényvizsgálatot és vázlatosan ábrázoljuk a függvényt! (értelmezési tartomány, zérushelyek, paritás, határértékek és szakadási pontok, monotonitás, lokális szélsőértékek, függvény alakja, inflexiós pontok, aszimptoták, ábra, értékkészlet)

$$f(x) = x^3 - 3x, \quad f(x) = \frac{2x}{(x-1)^2}, \quad f(x) = e^{-x^2}.$$

(A vizsgán a függvényvizsgálat lépések közül tipikusan csak párat kérdeznek. Pl. értelmezési tartomány, monotonitás, szélsőértékhelyek, konvexitás, inflexiós pontok.)

6. Végtelen sorok

• **Geometriai sor /Mértani sor.**

1. Feladat. Döntsük el, hogy a következő geometriai sorok konvergensek-e! Ha konvergensek, akkor adjuk meg az összegüket!

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{7}{2}\right)^k, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \left(-\frac{3}{5}\right)^k, \quad \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{5 - 2^{3k+2}}{3^{2k-1}}.$$

• **Triviális kritérium, hiperharmonikus sorok.**

2. Feladat. Döntsük el, hogy a következő sorok konvergensek vagy divergensek!

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{5k-1}, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{k+1}, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{5k^2}, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{\sqrt[3]{k}}\right).$$

7. Integrálás

- **Határozatlan integrál fogalma. Elemi függvények integrálja.**

1. Feladat. Határozzuk meg az alábbi határozatlan integrálokat!

a) $\int (3x^2 - 4x + 5) dx$

b) $\int \left(x^3 - \frac{2}{x} \right) dx$

c) $\int \sqrt{x} dx$

d) $\int \frac{1}{x^2} dx$

e) $\int (e^x + \cos(x)) dx$

f) $\int \left(2 \sin(x) - \frac{3}{x} \right) dx$

g) $\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx$

h) $\int (4x + x^5) dx$

i) $\int \frac{1}{1+x^2} dx$

j) $\int \left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$

- **Alapvető integrálási módszerek:**

* $\int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C, C \in \mathbb{R}$, (ahol $\int f(x)dx = F(x)$) (1. szabály),

* $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C$ (2. szabály),

* $\int f'(x)f^\alpha(x)dx = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + C$ (3. szabály).

2. Feladat. Határozzuk meg az alábbi határozatlan integrálokat!

a) $\int \frac{1}{x-3} dx$

b) $\int \frac{2}{3x+1} dx$

c) $\int e^{2x+1} dx$

d) $\int \cos(x) \sin^2(x) dx$

e) $\int \frac{2x+5}{x^2+5x+1} dx$

f) $\int (x+1)\sqrt{x^2+2x} dx$

g) $\int \frac{3x^2}{\sqrt{x^3+2}} dx$

h) $\int \frac{1}{(x+3)^2+1} dx$

i) $\int \cos(x) \sin^2(x) dx$

j) $\int \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)} dx$

• **Integrálási módszerek: parciális integrálás.**

3. Feladat. Határozzuk meg az alábbi határozatlan integrálokat! (parciális integrálás)

a) $\int x e^x dx$

b) $\int \ln(x) dx$

c) $\int x \cos(2x) dx$

d) $\int \arctan(x) dx$

• **Newton–Leibniz-tétel.**

4. Feladat. Számítsuk ki az alábbi határozott integrálok értékét!

$$\int_0^2 (3x^2 - 2x) dx, \quad \int_0^{\pi/2} \cos x dx.$$

• **Improprius integrál fogalma, integrálszámítás alkalmazásai.**

5. Feladat. Határozzuk meg az alábbi improprius integrálok értékét!

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx, \quad \int_{-\infty}^0 e^x dx, \quad \int_0^1 \frac{1}{x} dx.$$

6. Feladat. Számítsuk ki az alábbi görbék (és egyenesek) által határolt síkidom területét!

a) $f(x) = -x^2 + 4x + 1$ és $g(x) = x^2 - 4x - 9$

b) $f(x) = x^2$ és az x tengely az $[0, 2]$ intervallumon

c) $f(x) = 4 - x^2$ és az x tengely

d) $f(x) = x^2$ és $g(x) = 2x$

e) $f(x) = \sin(x)$ és az x tengely a $[0, \pi]$ intervallumon