2018 november 9. **KALKULUS PÓTZÁRTHELYI**
Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet

Név: **Gyakorlatvezető:**

Neptun kód:

1.	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	$\sum$

---

1. Legyen $\mathbf{A}$ az alábbi mátrix:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{bmatrix}.$$

Oldja meg az $\mathbf{A}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ egyenletet és számítsa ki $\mathbf{A}$ determinánsát és sorrangját!

Megoldás:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 1 \\ -1 & 8 & 3 & 2 \end{bmatrix} (2p) \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix} (2p) \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix} (4p)$$

Innen $z = 1$, $y = 0$ $x = 1$ (3p) A sorrangja a nem nulla sorok száma (2p)$= 3$(2p) $\det(\mathbf{A}) = 2 \cdot 4 \cdot \frac{5}{2} = 20$*(5p) Ha Gauss-eliminációnál kiemel, akkor az utolsó lépésben kapjon 2 pontot, de ha jól számolja ki a determinánst (számon tartja mit emelt ki) akkor arra adjunk 7 pontot*

2. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[4]{n} + 6n^5 + 5\cdot 3^n}{2^n + 3^n}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+5}$

Megoldás:

$$\lim_{n\to 0} \frac{\sqrt[4]{n} + 6n^5 + 5\cdot 3^n}{2^n + 3^n} = \lim_{n\to 0} \frac{\overbrace{\frac{\sqrt[4]{n}}{3^n}}^{\to 0} + 6\cdot \overbrace{\frac{n^5}{3^n}}^{\to 0} + 5\overbrace{\left(\frac{3}{3}\right)^n}^{\to 1}}{\underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^n}_{\to 0} + 1} = \frac{5}{1} = 5$$

Minden $\to$ megállapítása (2) pontot ér, helyes végeredmény (2p).

$$1 = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{5} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+5} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+5n^2} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{6}\,\sqrt[n]{n^2} = 1$$

Jó alsó becslés (4p), jó felső becslés (4p), Renőrelv miatt tart 1-hez (2p)

3. Oldja meg az alábbi egyenletet a komplex számok halmazán!

$$\left(z^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4\right)(z^2+6z+10) = 0$$

Megoldás: $\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} = 1\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ (4p) *(Ha eddig nem jut el, de van jó ábra (2p))*
Így $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 = (\cos(\pi) + i\sin(\pi))\,(2p) = -1(2p)$ *Tehát:*

$$z^2 + 1 = 0(2p) \Rightarrow z^2 = -1 \Rightarrow z_1 = i\; z_2 = -i\;(2p)$$

Valamint:

$$\begin{aligned} z^2 - 6z + 10 = 0(2p) \Rightarrow z_{3,4} &= \frac{6 \pm \sqrt{36-40}}{2}(2p) \\ &= \frac{6 \pm 2i}{2}(2p) \Rightarrow z_3 = 3 + i\; z_4 = 3 - i(2p) \end{aligned}$$

4. Számítsa ki az alábbi függvények határértékét:

a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan(2x)}{\sin(3x)}$

b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{\sqrt{4x^2}-4}$

Megoldás:

$$a) \lim_{x\to 0}\frac{\tan(2x)}{\sin(3x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{\cos(2x)\sin(3x)}(2p) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos(2x)}\frac{\sin(2x)}{\sin(3x)}\frac{3x\cdot 2x}{2x\cdot 3x}(3p) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos(2x)}\frac{\sin(2x)}{2x}\frac{3x}{\sin(3x)}\frac{2}{3}(3p) = 1\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{2}{3}(2p)$$

$$b) \lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{4x^2}-4} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(\sqrt{4x^2}+4)}{4x^2-16}(4p) = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(\sqrt{4x^2}+4)}{4(x-2)(x+2))}(3p)$$
$$= \lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{4x^2}+4)}{4(x+2)}(2p) = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}(1p)$$

5. Deriválja az alábbi függvényeket!

a) $\dfrac{e^{(1+x-x^2)}}{x}$

b) $(2x^3+5x^2+3)\cos(x^2)$

Megoldás:

$$\frac{e^{(1+x-x^2)}}{x} = \frac{(e^{(1+x-x^2)})'(x) - e^{(1+x-x^2)}(x)'}{(x)^2}(3p) =$$
$$= \frac{\overbrace{e^{(1+x-x^2)}(1+x-x^2)'}^{(3p)}(x)\overbrace{-e^{(1+x-x^2)}}^{(1p)}}{x^2} = \frac{e^{(1+x-x^2)}\overbrace{(1-2x)}^{(3p)}x - e^{(1+x-x^2)}}{x^2}$$

$$\begin{aligned}(2x^3+5x^2+3)\cos(x^2) =& (2x^3+5x^2+3)'\cos(x^2) + (2x^3+5x^2+3)(\cos(x^2))'(3p) = \\ =& \underbrace{(6x^2+10x)}_{(3p)}\cos(x^2) + (2x^3+5x^2+3)\underbrace{(-\sin(x^2)(x^2)')}_{(3p)} = \\ =& (6x^2+10x)\cos(x^2) - (4x^4+10x^3+6x)\sin(x^2)(1p)\end{aligned}$$

Minden feladat hibátlan megoldása 20 pontot ér. Részleges megoldásért részpontszám adható, indoklás nélküli eredményközlésért nem jár pont.