

Kalkulus előadás

Nagy Noémi

Elérhetőségek

Előadó: Nagy Noémi (nagyn.bme@gmail.com)

Fogadóóra: hétfő 14-15 (H épület 3. emelet 310-es ajtó)

A pontos tárgykövetelmények a
https://math.bme.hu/~nn/kalkulus_bevmat_23o.html oldalon
találhatóak.

A mátrix definíciója

Mátrixnak egy n sorból és k oszlopból álló (szám)táblázatot nevezünk, például:

$$A = \begin{bmatrix} 2.5 & 4 \\ 5 & 6 \\ 8 & -7 \end{bmatrix}$$

esetén $n = 3$, $k = 2$. Ekkor az n, k számpárt a mátrix méretének vagy dimenziójának nevezzük és úgy jelöljük, hogy $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$.

Megjegyzés: A mátrixok a vektorok általánosításai. Egy vektor annyi dimenziós, amennyi elemből áll. Például: $(2, 1, 3, 1, 5)$ egy ötdimenziós vektor, de tekinthető egy 1×5 dimenziós mátrixnak is.

Indexelés

A mátrixot többnyire nagy betűvel, az elemeit kisbetűvel jelöljük. A mátrix elemeinek helyét a táblázaton belül az adott elem **indexével** jellemezzünk. Az első szám azt mondja meg, hogy hányadik sorban, a második szám pedig azt, hogy hányadik oszlopban van. Ezeket a kisbetű alsó indexébe írjuk.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{bmatrix}$$

Ekkor $a_{1,2}$ elem az első sor második oszlopában lévő elem, itt $a_{1,2} = 4$.

Lineáris kombináció mátrixokkal

Hasonlóan a vektorokhoz a mátrixokat is lehet konstanssal szorozni és egymással összeadni, kivonni, tehát mátrixok **lineáris kombinációját** venni.

Lineáris kombináció mátrixokkal

Hasonlóan a vektorokhoz a mátrixokat is lehet konstanssal szorozni és egymással összeadni, kivonni, tehát mátrixok **lineáris kombinációját** venni.

- Egy **mátrix és egy valós szám szorzatát** úgy képezzük, hogy a mátrix minden elemét megszorozzuk az adott számmal, például

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}, \quad 0.5A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2.5 & 3 \\ 4 & 3.5 \end{bmatrix}$$

Lineáris kombináció mátrixokkal

Hasonlóan a vektorokhoz a mátrixokat is lehet konstanssal szorozni és egymással összeadni, kivonni, tehát mátrixok **lineáris kombinációját** venni.

- Egy **mátrix és egy valós szám szorzatát** úgy képezzük, hogy a mátrix minden elemét megszorozzuk az adott számmal, például

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}, \quad 0.5A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2.5 & 3 \\ 4 & 3.5 \end{bmatrix}$$

Lineáris kombináció mátrixokkal

Hasonlóan a vektorokhoz a mátrixokat is lehet konstanssal szorozni és egymással összeadni, kivonni, tehát mátrixok **lineáris kombinációját** venni.

- Egy **mátrix és egy valós szám szorzatát** úgy képezzük, hogy a mátrix minden elemét megszorozzuk az adott számmal, például

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}, \quad 0.5A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2.5 & 3 \\ 4 & 3.5 \end{bmatrix}$$

Lineáris kombináció mátrixokkal

Hasonlóan a vektorokhoz a mátrixokat is lehet konstanssal szorozni és egymással összeadni, kivonni, tehát mátrixok **lineáris kombinációját** venni.

- Egy **mátrix és egy valós szám szorzatát** úgy képezzük, hogy a mátrix minden elemét megszorozzuk az adott számmal, például

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}, \quad 0.5A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2.5 & 3 \\ 4 & 3.5 \end{bmatrix}$$

- Mátrixok összeadása:** Két mátrixot csak abban az esetben tudunk összeadni, ha dimenziójuk megegyezik. Ekkor az azonos pozíciókban lévő elemeket adjuk össze. Például:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A + B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$$

Lineáris kombináció mátrixokkal

Hasonlóan a vektorokhoz a mátrixokat is lehet konstanssal szorozni és egymással összeadni, kivonni, tehát mátrixok **lineáris kombinációját** venni.

- Egy **mátrix és egy valós szám szorzatát** úgy képezzük, hogy a mátrix minden elemét megszorozzuk az adott számmal, például

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}, \quad 0.5A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2.5 & 3 \\ 4 & 3.5 \end{bmatrix}$$

- Mátrixok összeadása:** Két mátrixot csak abban az esetben tudunk összeadni, ha dimenziójuk megegyezik. Ekkor az azonos pozíciókban lévő elemeket adjuk össze. Például:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A + B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$$

Lineáris kombináció mátrixokkal

Hasonlóan a vektorokhoz a mátrixokat is lehet konstanssal szorozni és egymással összeadni, kivonni, tehát mátrixok **lineáris kombinációját** venni.

- Egy **mátrix és egy valós szám szorzatát** úgy képezzük, hogy a mátrix minden elemét megszorozzuk az adott számmal, például

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}, \quad 0.5A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2.5 & 3 \\ 4 & 3.5 \end{bmatrix}$$

- Mátrixok összeadása:** Két mátrixot csak abban az esetben tudunk összeadni, ha dimenziójuk megegyezik. Ekkor az azonos pozíciókban lévő elemeket adjuk össze. Például:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A + B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$$

Lineáris kombináció mátrixokkal

Hasonlóan a vektorokhoz a mátrixokat is lehet konstanssal szorozni és egymással összeadni, kivonni, tehát mátrixok **lineáris kombinációját** venni.

- Egy **mátrix és egy valós szám szorzatát** úgy képezzük, hogy a mátrix minden elemét megszorozzuk az adott számmal, például

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}, \quad 0.5A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2.5 & 3 \\ 4 & 3.5 \end{bmatrix}$$

- Mátrixok összeadása:** Két mátrixot csak abban az esetben tudunk összeadni, ha dimenziójuk megegyezik. Ekkor az azonos pozíciókban lévő elemeket adjuk össze. Például:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A + B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$$

A műveletek tulajdonságai

- **Asszociativitás** Az összeadás átzárójelezhető, azaz $(A + B) + C = A + (B + C)$
- **Kommutativitás** Az összeadás sorrendje felcserélhető, azaz $A + B = B + A$
- **Zérus elem** Létezik egy olyan mátrix, amellyel tetszőleges A mátrixra $A + 0 = 0 + A = A$, (0 jelöli a csak nullákat tartalmazó mátrixot)
- **Ellentett** Minden A mátrixhoz van olyan $-A$ -val jelölt mátrix, amelyre $-A + A = A + (-A) = 0$ (itt a jobboldalon egy mátrix áll, nem egy szám!)
- **Konstans kiemelhető** Ha c és d valós számok és A és B tetszőleges mátrixok, akkor $(c + d)A = cA + dA$, $c(A + B) = cA + cB$, $(cd)A = c(dA)$
- Megjegyzés: $A - B := A + (-B)$

Tranzponálás

Mátrixokkal olyan műveleteket is lehet végezni amit vektorokkal nem szoktunk. Az első ilyen művelet a tranzponálás.

Az A , $n \times k$ méretű mátrix tranzponáltján azon $k \times n$ -es mátrixot értjük, amelynek sorai megegyeznek az eredeti mátrix oszlopaival.

Jele: A^T . Például:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 4 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

Ugyanezt kapjuk, ha a mátrixot a főátlójára $(a_{1,1}, a_{2,2}, \dots)$ tükrözzük.

Indexekkel kifejezve az A^T mátrix (i, j) -edik eleme megegyezik az eredeti mátrix (j, i) -edik elemével, azaz $a_{i,j}^T = a_{j,i}$.

Tranzponálás

Mátrixokkal olyan műveleteket is lehet végezni amit vektorokkal nem szoktunk. Az első ilyen művelet a tranzponálás.

Az A , $n \times k$ méretű mátrix tranzponáltján azon $k \times n$ -es mátrixot értjük, amelynek sorai megegyeznek az eredeti mátrix oszlopaival.

Jele: A^T . Például:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 4 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

Ugyanezt kapjuk, ha a mátrixot a főátlójára $(a_{1,1}, a_{2,2}, \dots)$ tükrözzük.

Indexekkel kifejezve az A^T mátrix (i, j) -edik eleme megegyezik az eredeti mátrix (j, i) -edik elemével, azaz $a_{i,j}^T = a_{j,i}$.

Mátrixok szorzatának definíciója

Definíció: Legyen A egy $n \times k$ méretű, míg B egy $k \times m$ méretű mátrix. Ekkor az AB mátrix (a két mátrix szorzata) azon $n \times m$ méretű mátrix, amelynek i, j -dik eleme az A mátrix i . sorának és a B mátrix j . oszlopának (mint k elemű vektoroknak) a skalárszorzata.

Az AB mátrixszorzás tehát csak akkor elvégezhető, ha A -nak ugyanannyi oszlopa van, mint ahány sora B -nek. Az ilyen mátrixokat kompatibilisnek nevezzük.

Mátrixok szorzatának definíciója

Definíció: Legyen A egy $n \times k$ méretű, míg B egy $k \times m$ méretű mátrix. Ekkor az AB mátrix (a két mátrix szorzata) azon $n \times m$ méretű mátrix, amelynek i, j -dik eleme az A mátrix i . sorának és a B mátrix j . oszlopának (mint k elemű vektoroknak) a skalárszorzata.

Az AB mátrixszorzás tehát csak akkor elvégezhető, ha A -nak ugyanannyi oszlopa van, mint ahány sora B -nek. Az ilyen mátrixokat kompatibilisnek nevezzük.

Mátrixok szorzatának definíciója

Definíció: Legyen A egy $n \times k$ méretű, míg B egy $k \times m$ méretű mátrix. Ekkor az AB mátrix (a két mátrix szorzata) azon $n \times m$ méretű mátrix, amelynek i, j -dik eleme az A mátrix i . sorának és a B mátrix j . oszlopának (mint k elemű vektoroknak) a skalárszorzata.

Az AB mátrixszorzás tehát csak akkor elvégezhető, ha A -nak ugyanannyi oszlopa van, mint ahány sora B -nek. Az ilyen mátrixokat kompatibilisnek nevezzük.

Példa

Vegyük az alábbi két mátrixot, és döntsük el, hogy összeszorozhatóak-e.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & 5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Az AC szorzás elvégezhető, mert A -nak 2 oszlopa van, C -nek pedig 2 sora. Ugyanakkor a CA szorzás nem végezhető el, mert C -nek 4 oszlopa van, de A -nak csak 3 sora.

Megjegyzés: $A \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ és $C \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$

Példa

Vegyük az alábbi két mátrixot, és döntsük el, hogy összeszorozhatóak-e.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & 5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Az AC szorzás elvégezhető, mert A -nak 2 oszlopa van, C -nek pedig 2 sora. Ugyanakkor a CA szorzás nem végezhető el, mert C -nek 4 oszlopa van, de A -nak csak 3 sora.

Megjegyzés: $A \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ és $C \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$

Példa

Vegyük az alábbi két mátrixot, és döntsük el, hogy összeszorozhatóak-e.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & 5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Az AC szorzás elvégezhető, mert A -nak 2 oszlopa van, C -nek pedig 2 sora. Ugyanakkor a CA szorzás nem végezhető el, mert C -nek 4 oszlopa van, de A -nak csak 3 sora.

Megjegyzés: $A \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ és $C \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$ és $AC \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$.

Példa

Az AC szorzat kiszámításához rendezzük el átlósan a két mátrixot.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 6 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & 5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Példa

A szorzat első sorának első eleme az A mátrix első sorának, és a C mátrix első oszlopának skalárszorzata.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & 5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Most $(2, 4)$ -nek és $(6, 5)$ -nek kell a skalárszorzata. Két vektor skalárszorzata úgy számítható ki, hogy az azonos pozíciókban lévő elemeket összeszorozzuk, majd a szorzatokat összeadjuk. Itt:
 $\langle (2, 4), (6, 5) \rangle = 2 \cdot 6 + 4 \cdot 5 = 32$.

Példa

A szorzat első sorának első eleme az A mátrix első sorának, és a C mátrix első oszlopának skalárszorzata.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & 5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Most $(2, 4)$ -nek és $(6, 5)$ -nek kell a skalárszorzata. Két vektor skalárszorzata úgy számítható ki, hogy az azonos pozíciókban lévő elemeket összeszorozzuk, majd a szorzatokat összeadjuk. Itt:

$$\langle (2, 4), (6, 5) \rangle = 2 \cdot 6 + 4 \cdot 5 = 32.$$

Példa

A többi elemen végighaladva:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & 5 & 0.5 \\ 32 & -2 & 24 & 2 \\ 36 & -5 & 32 & 3 \\ 48 & 8 & 16 & 0 \end{bmatrix}$$

A kapott 3×4 -es mátrix az AC szorzat.

Példa

A többi elemen végighaladva:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & 5 & 0.5 \\ 32 & -2 & 24 & 2 \\ 36 & -5 & 32 & 3 \\ 48 & 8 & 16 & 0 \end{bmatrix}$$

A kapott 3×4 -es mátrix az AC szorzat.

Példa

A többi elemen végighaladva:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & 5 & 0.5 \\ 32 & -2 & 24 & 2 \\ 36 & -5 & 32 & 3 \\ 48 & 8 & 16 & 0 \end{bmatrix}$$

A kapott 3×4 -es mátrix az AC szorzat.

Példa

A többi elemen végighaladva:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & 5 & 0.5 \\ 32 & -2 & 24 & 2 \\ 36 & -5 & 32 & 3 \\ 48 & 8 & 16 & 0 \end{bmatrix}$$

A kapott 3×4 -es mátrix az AC szorzat.

Példa

A többi elemen végighaladva:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & 5 & 0.5 \\ 32 & -2 & 24 & 2 \\ 36 & -5 & 32 & 3 \\ 48 & 8 & 16 & 0 \end{bmatrix}$$

A kapott 3×4 -es mátrix az AC szorzat.

Példa

A többi elemen végighaladva:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & 5 & 0.5 \\ 32 & -2 & 24 & 2 \\ 36 & -5 & 32 & 3 \\ 48 & 8 & 16 & 0 \end{bmatrix}$$

A kapott 3×4 -es mátrix az AC szorzat.

Példa

A többi elemen végighaladva:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & 5 & 0.5 \\ 32 & -2 & 24 & 2 \\ 36 & -5 & 32 & 3 \\ 48 & 8 & 16 & 0 \end{bmatrix}$$

A kapott 3×4 -es mátrix az AC szorzat.

Példa

A többi elemen végighaladva:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & 5 & 0.5 \\ 32 & -2 & 24 & 2 \\ 36 & -5 & 32 & 3 \\ 48 & 8 & 16 & 0 \end{bmatrix}$$

A kapott 3×4 -es mátrix az AC szorzat.

Példa

A többi elemen végighaladva:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & 5 & 0.5 \\ 32 & -2 & 24 & 2 \\ 36 & -5 & 32 & 3 \\ 48 & 8 & 16 & 0 \end{bmatrix}$$

A kapott 3×4 -es mátrix az AC szorzat.

Példa

A többi elemen végighaladva:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & 5 & 0.5 \\ 32 & -2 & 24 & 2 \\ 36 & -5 & 32 & 3 \\ 48 & 8 & 16 & 0 \end{bmatrix}$$

A kapott 3×4 -es mátrix az AC szorzat.

Példa

A többi elemen végighaladva:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & 5 & 0.5 \\ 32 & -2 & 24 & 2 \\ 36 & -5 & 32 & 3 \\ 48 & 8 & 16 & 0 \end{bmatrix}$$

A kapott 3×4 -es mátrix az AC szorzat.

Példa

A többi elemen végighaladva:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & 5 & 0.5 \\ 32 & -2 & 24 & 2 \\ 36 & -5 & 32 & 3 \\ 48 & 8 & 16 & 0 \end{bmatrix}$$

A kapott 3×4 -es mátrix az AC szorzat.

Megjegyzés: $A \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ és $C \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$ és $AC \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$.

Példa

A többi elemen végighaladva:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & 5 & 0.5 \\ 32 & -2 & 24 & 2 \\ 36 & -5 & 32 & 3 \\ 48 & 8 & 16 & 0 \end{bmatrix}$$

A kapott 3×4 -es mátrix az AC szorzat.

Megjegyzés: $A \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ és $C \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$ és $AC \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$.

Mátrix szorzása vektorral

Hasonlóan történik a szorzás, ha mátrixot vektorral szorzunk:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 \\ 60 \\ 83 \end{bmatrix}$$

Mátrix szorzása vektorral

Hasonlóan történik a szorzás, ha mátrixot vektorral szorzunk:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 \\ 60 \\ 83 \end{bmatrix}$$

Mátrix szorzása vektorral

Hasonlóan történik a szorzás, ha mátrixot vektorral szorzunk:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 \\ 60 \\ 83 \end{bmatrix}$$

Mátrix szorzása vektorral

Hasonlóan történik a szorzás, ha mátrixot vektorral szorzunk:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 \\ 60 \\ 83 \end{bmatrix}$$

Mátrix szorzása vektorral

Hasonlóan történik a szorzás, ha mátrixot vektorral szorzunk:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 \\ 60 \\ 83 \end{bmatrix}$$

Mátrix szorzása vektorral

Hasonlóan történik a szorzás, ha mátrixot vektorral szorzunk:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 \\ 60 \\ 83 \end{bmatrix}$$

Mátrix szorzása vektorral

Hasonlóan történik a szorzás, ha mátrixot vektorral szorzunk:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 \\ 60 \\ 83 \end{bmatrix}$$

Mátrix szorzása vektorral

Hasonlóan történik a szorzás, ha mátrixot vektorral szorzunk:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 \\ 60 \\ 83 \end{bmatrix}$$

Tehát

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 \\ 60 \\ 83 \end{bmatrix}$$

Mátrix szorzása vektorral 2

Újabb érdekes példa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & -5 \\ -3 & -5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Mátrix szorzása vektorral 2

Újabb érdekes példa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & -5 \\ -3 & -5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Mátrix szorzása vektorral 2

Újabb érdekes példa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & -5 \\ -3 & -5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 3y + 2z \\ -2x - 4y - 5z \\ -3x - 5y + 4z \end{pmatrix}$$

Mátrix szorzása vektorral 2

Újabb érdekes példa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & -5 \\ -3 & -5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 3y + 2z \end{pmatrix}$$

Mátrix szorzása vektorral 2

Újabb érdekes példa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & -5 \\ -3 & -5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 3y + 2z \\ -2x - 4y - 5z \\ -3x - 5y + 4z \end{pmatrix}$$

Mátrix szorzása vektorral 2

Újabb érdekes példa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & -5 \\ -3 & -5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 3y + 2z \\ -2x - 4y - 5z \\ -3x - 5y + 4z \end{pmatrix}$$

Mátrix szorzása vektorral 2

Újabb érdekes példa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & -5 \\ -3 & -5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 3y + 2z \\ -2x - 4y - 5z \\ -3x - 5y + 4z \end{pmatrix}$$

A mátrixszorzás nem kommutatív

Ha AB elvégezhető, attól még lehet, hogy BA nem végezhető el. Ha mindkettő értelmezett és egyforma méretű is lenne (ez sem biztos), általában akkor sem igaz, hogy $AB = BA$. Például:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 59 & 27 \\ 15 & 7 \end{bmatrix}, \quad BA = \begin{bmatrix} 38 & 48 \\ 22 & 28 \end{bmatrix}$$

Létezik egységelem a mátrixszorzásra nézve

Az a **négyzetes**, azaz $n \times n$ -es mátrix aminek a főátlójában 1-esek mindenütt másutt meg nullák állnak az **egységmátrix** vagy **identitás mátrix**. Jele I (identitás) bármilyen kompatibilis mátrixszal bármilyen irányból megszorozva az eredeti mátrixot adja vissza.

Például

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

A mátrixszorzás tulajdonságai

- **Asszociativitás** Ha a mátrixok kompatibilisek, akkor a mátrixok szorzása átzárójelezhető, azaz $A(BC) = (AB)C$
- **Disztributivitás(ok)!** Ha a megfelelő mátrixok kompatibilisek, akkor $A(B + C) = AB + AC$, és $(A + B)C = AC + BC$
- **Konstans kiemelhető** Ha a megfelelő mátrixok kompatibilisek, akkor $d(AB) = (dA)B = A(dB)$
- **Egységmátrix** Az $n \times n$ -es mátrixok körében egyértelműen létezik egy olyan I mátrix (egységmátrix), amellyel $AI = IA = A$. Ez a mátrix egyébként a főátlójában csupa egyest, egyébként nullákat tartalmazó mátrix.

Mátrixok inverze

Ha az A $n \times n$ -es **négyzetes** mátrixhoz létezik olyan mátrix amivel megszorozva azt az $n \times n$ -es identitás mátrixot kapjuk, akkor azt mondjuk, hogy A **invertálható**, és inverzét A^{-1} -el jelölöm.

Tehát $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

Mátrixok inverze

Ha az A $n \times n$ -es **négyzetes** mátrixhoz létezik olyan mátrix amivel megszorozva azt az $n \times n$ -es identitás mátrixot kapjuk, akkor azt mondjuk, hogy A **invertálható**, és inverzét A^{-1} -el jelölöm.

Tehát $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

- Példa: $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ mátrix inverze az $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}$, ugyanis

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ és } \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Mátrixok inverze

Nem minden mátrixnak van inverze. Például a

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrixnak nincs inverze. Miért?

Mátrixok inverze

Nem minden mátrixnak van inverze. Például a

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrixnak nincs inverze. Miért?

Kérdés: Hogyan dönthetjük el, hogy egy mátrix invertálható-e vagy nem? Ennek a kérdésnek a megválaszolásához szükségünk lesz a determináns fogalmára.

Mi a determináns?

- Minden A **négyzetes**, azaz $n \times n$ -es mátrixnak van determinánsa, jele: $\det(A)$ vagy $|A|$.

Mi a determináns?

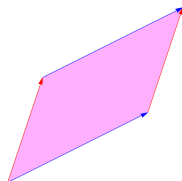
- Minden A **négyzetes**, azaz $n \times n$ -es mátrixnak van determinánsa, jele: $\det(A)$ vagy $|A|$.
- Ha $n = 2$, akkor a determináns

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Mi a determináns?

- Minden A **négyzetes**, azaz $n \times n$ -es mátrixnak van determinánása, jele: $\det(A)$ vagy $|A|$.
- Ha $n = 2$, akkor a determináns az oszlopvektorok által kifeszített síkidom **előjeles területe**

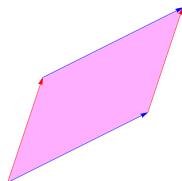
$$\left[\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} 1 \\ 3 \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{c} 4 \\ 2 \end{array} \right] \end{array} \right]$$



Mi a determináns?

- Minden A **négyzetes**, azaz $n \times n$ -es mátrixnak van determinánusa, jele: $\det(A)$ vagy $|A|$.
- Ha $n = 2$, akkor a determináns az oszlopvektorok által kifeszített síkidom **előjeles területe**, ha $n = 3$, akkor pedig

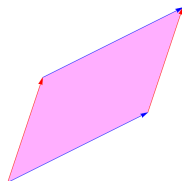
$$\left[\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} 1 \\ 3 \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{c} 4 \\ 2 \end{array} \right] \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{ccc} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{array} \right]$$



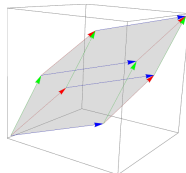
Mi a determináns?

- Minden A **négyzetes**, azaz $n \times n$ -es mátrixnak van determinánusa, jele: $\det(A)$ vagy $|A|$.
- Ha $n = 2$, akkor a determináns az oszlopvektorok által kifeszített síkidom **előjeles területe**, ha $n = 3$, akkor pedig az oszlopvektorok által kifeszített test **előjeles térfogata**

$$\left[\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} 1 \\ 3 \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{c} 4 \\ 2 \end{array} \right] \end{array} \right]$$



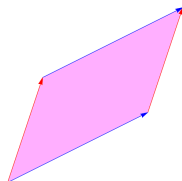
$$\left[\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} 1 \\ 3 \\ 2 \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{c} 4 \\ 2 \\ 1 \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 3 \end{array} \right] \end{array} \right]$$



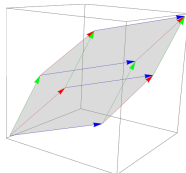
Mi a determináns?

- Minden A **négyzetes**, azaz $n \times n$ -es mátrixnak van determinánusa, jele: $\det(A)$ vagy $|A|$.
- Ha $n = 2$, akkor a determináns az oszlopvektorok által kifeszített síkidom **előjeles területe**, ha $n = 3$, akkor pedig az oszlopvektorok által kifeszített test **előjeles térfogata**

$$\left[\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} 1 \\ 3 \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{c} 4 \\ 2 \end{array} \right] \end{array} \right]$$



$$\left[\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} 1 \\ 3 \\ 2 \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{c} 4 \\ 2 \\ 1 \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 3 \end{array} \right] \end{array} \right]$$



- Ha $n \geq 4$, akkor nem tudom lerajzolni :)

A determináns definíciója

- Válasszunk ki n elemet a mátrixból úgy, hogy minden oszlopból, és minden sorból pontosan egyet veszünk (ezt $n \times n$ -es mátrix esetén $n!$ féleképp lehet megtenni).

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

A determináns definíciója

- Válasszunk ki n elemet a mátrixból úgy, hogy minden oszlopból, és minden sorból pontosan egyet veszünk (ezt $n \times n$ -es mátrix esetén $n!$ féleképp lehet megtenni).

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

A determináns definíciója

- Válasszunk ki n elemet a mátrixból úgy, hogy minden oszlopból, és minden sorból pontosan egyet veszünk (ezt $n \times n$ -es mátrix esetén $n!$ féleképp lehet megtenni).

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

A determináns definíciója

- Válasszunk ki n elemet a mátrixból úgy, hogy minden oszlopból, és minden sorból pontosan egyet veszünk (ezt $n \times n$ -es mátrix esetén $n!$ féleképp lehet megtenni).

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

A determináns definíciója

- Válasszunk ki n elemet a mátrixból úgy, hogy minden oszlopból, és minden sorból pontosan egyet veszünk (ezt $n \times n$ -es mátrix esetén $n!$ féleképp lehet megtenni).

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

- Majd ezeket a számokat szorozzuk össze, és a szorzatot lássuk el egy előjellel, azaz a $(-1)^k$ szorzóval. A k -t úgy kapjuk, hogy megnézzük, hány sorcsere kellene ahhoz, hogy a kiválasztott elemekből főátlót kapjunk.

A determináns definíciója

- Válasszunk ki n elemet a mátrixból úgy, hogy minden oszlopból, és minden sorból pontosan egyet veszünk (ezt $n \times n$ -es mátrix esetén $n!$ féleképp lehet megtenni).

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

- Majd ezeket a számokat szorozzuk össze, és a szorzatot lássuk el egy előjellel, azaz a $(-1)^k$ szorzóval. A k -t úgy kapjuk, hogy megnézzük, hány sorcsere kellene ahhoz, hogy a kiválasztott elemekből főátlót kapjunk. Tehát most $k = 1$ és az előjeles szorzat: $(-1) \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 2$.

A determináns definíciója

- Válasszunk ki n elemet a mátrixból úgy, hogy minden oszlopból, és minden sorból pontosan egyet veszünk (ezt $n \times n$ -es mátrix esetén $n!$ féleképp lehet megtenni).

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

- Majd ezeket a számokat szorozzuk össze, és a szorzatot lássuk el egy előjellel, azaz a $(-1)^k$ szorzóval. A k -t úgy kapjuk, hogy megnézzük, hány sorcsere kellene ahhoz, hogy a kiválasztott elemekből főátlót kapjunk. Tehát most $k = 1$ és az előjeles szorzat: $(-1) \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 2$.
- Végül az eredeti mátrixban az összes ilyen lehetséges szorzatot a megfelelő előjellel összeadjuk. Ez az összeg a mátrix determinánusa.

Kétszer kettes mátrix determinánása

Számoljuk ki definíció szerint! Mivel $n = 2$, $2! = 2$ féleképpen lehet elemeket kiválasztani.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Kétszer kettes mátrix determinánása

Számoljuk ki definíció szerint! Mivel $n = 2$, $2! = 2$ féleképpen lehet elemeket kiválasztani. Az egyik

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Kétszer kettes mátrix determinánása

Számoljuk ki definíció szerint! Mivel $n = 2$, $2! = 2$ féleképpen lehet elemeket kiválasztani. Az **egyik** és a **másik**

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Kétszer kettes mátrix determinánása

Számoljuk ki definíció szerint! Mivel $n = 2$, $2! = 2$ féleképpen lehet elemeket kiválasztani. Az **egyik** és a **másik**

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Látható, hogy a második előjele (-1), így a determináns:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Kétszer kettes mátrix determinánása

Számoljuk ki definíció szerint! Mivel $n = 2$, $2! = 2$ féleképpen lehet elemeket kiválasztani. Az **egyik** és a **másik**

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Látható, hogy a második előjele (-1), így a determináns:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Általában nem a definíció alapján számítjuk ki a mátrix determinánsát. Két gyakran használt módszer a determináns meghatározására a kifejtési tétel és a Gauss-elimináció.

Determináns kiszámítása kifejtési tétellel

Ez egy rekurzív módszer, amelynek segítségével egy $n \times n$ -es determináns kiszámítását visszavezethetjük n db $(n - 1) \times (n - 1)$ determináns kiszámítására.

Determináns kiszámítása kifejtési tétellel

Ez egy rekurzív módszer, amelynek segítségével egy $n \times n$ -es determináns kiszámítását visszavezethetjük n db $(n - 1) \times (n - 1)$ determináns kiszámítására.

Ehhez kiválasztjuk a mátrix egy tetszőleges sorát/oszlopát. Minden pozíciót ellátunk egy előjellel a sakktábla-szabály szerint.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Determináns kiszámítása kifejtési tétellel

Ez egy rekurzív módszer, amelynek segítségével egy $n \times n$ -es determináns kiszámítását visszavezethetjük n db $(n - 1) \times (n - 1)$ determináns kiszámítására.

Ehhez kiválasztjuk a mátrix egy tetszőleges sorát/oszlopát. Minden pozíciót ellátunk egy előjellel a sakktábla-szabály szerint. **Kék pozitív**
piros negatív

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Determináns kiszámítása kifejtési tétellel

Ezután az első elemet megszorozzuk a hozzá tartozó aldeterminánssal. Az aldeterminánst úgy kapjuk, hogy az elemhez tartozó sort és oszlopot elhagyjuk.

$$\begin{vmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

Determináns kiszámítása kifejtési tétellel

Ezután az első elemet megszorozzuk a hozzá tartozó aldeterminánssal. Az aldeterminánst úgy kapjuk, hogy az elemhez tartozó sort és oszlopot elhagyjuk.

$$\begin{vmatrix} \boxed{1} & \cancel{2} & \cancel{3} & \cancel{4} \\ \cancel{1} & 3 & 0 & 0 \\ \cancel{1} & 2 & 1 & 3 \\ \cancel{1} & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

Determináns kiszámítása kifejtési tétellel

Ezután az első elemet megszorozzuk a hozzá tartozó aldeterminánssal. Az aldeterminánst úgy kapjuk, hogy az elemhez tartozó sort és oszlopot elhagyjuk.

$$\begin{vmatrix} 1 & \cancel{2} & \cancel{3} & \cancel{4} \\ \cancel{1} & 3 & 0 & 0 \\ \cancel{1} & 2 & 1 & 3 \\ \cancel{1} & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Determináns kiszámítása kifejtési tétellel

Ezután az első elemet megszorozzuk a hozzá tartozó aldeterminánssal. Az aldeterminánst úgy kapjuk, hogy az elemhez tartozó sort és oszlopot elhagyjuk.

Így folytatjuk a kiválasztott oszlop második elemével ... és ezeket a szorzatokat összeadjuk.

$$\begin{vmatrix} \cancel{1} & 2 & 3 & 4 \\ 0 & \cancel{2} & \cancel{3} & \cancel{4} \\ \cancel{3} & 2 & 1 & 3 \\ \cancel{4} & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Determináns kiszámítása kifejtési tétellel

Ezután az első elemet megszorozzuk a hozzá tartozó aldeterminánssal. Az aldeterminánst úgy kapjuk, hogy az elemhez tartozó sort és oszlopot elhagyjuk.

Így folytatjuk a kiválasztott oszlop második elemével ... és ezeket a szorzatokat összeadjuk.

$$\begin{vmatrix} \cancel{1} & 2 & 3 & 4 \\ \cancel{0} & 3 & 0 & 0 \\ 0 & \cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{3} \\ \cancel{0} & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 0 \cdot |\dots|$$

Determináns kiszámítása kifejtési tétellel

Ezután az első elemet megszorozzuk a hozzá tartozó aldeterminánssal. Az aldeterminánst úgy kapjuk, hogy az elemhez tartozó sort és oszlopot elhagyjuk.

Így folytatjuk a kiválasztott oszlop második elemével ... és ezeket a szorzatokat összeadjuk.

$$\begin{vmatrix} \cancel{1} & 2 & 3 & 4 \\ \cancel{0} & 3 & 0 & 0 \\ \cancel{0} & 2 & 1 & 3 \\ 0 & \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{2} \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 0 \cdot |\dots| - \dots$$

Determináns kiszámítása kifejtési tétellel

Most az egyetlen megmaradt 3×3 -as determinánst számoljuk tovább kifejtési tétellel,

$$1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \left(\quad \quad \quad \right)$$

Determináns kiszámítása kifejtési tétellel

Most az egyetlen megmaradt 3×3 -as determinánst számoljuk tovább kifejtési tétellel, mondjuk az első sor szerint kifejtve.

$$1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \left(\quad \quad \quad \right)$$

Determináns kiszámítása kifejtési tétellel

Most az egyetlen megmaradt 3×3 -as determinánst számoljuk tovább kifejtési tétellel, mondjuk az első sor szerint kifejtve.

$$1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \left(3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right)$$

Determináns kiszámítása kifejtési tétellel

Most az egyetlen megmaradt 3×3 -as determinánst számoljuk tovább kifejtési tétellel, mondjuk az első sor szerint kifejtve.

Folytatjuk a sakktábla szabály szerint ...

$$1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \left(3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right)$$

Determináns kiszámítása kifejtési tétellel

Most az egyetlen megmaradt 3×3 -as determinánst számoljuk tovább kifejtési tétellel, mondjuk az első sor szerint kifejtve.

Folytatjuk a sakktábla szabály szerint ...

$$1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \left(3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right)$$

Determináns kiszámítása kifejtési tétellel

Így a végeredmény:

$$1 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

Determináns kiszámítása kifejtési tétellel

Így a végeredmény:

$$1 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot (1 \cdot 2 - 3 \cdot 1)$$

Determináns kiszámítása kifejtési tétellel

Így a végeredmény:

$$1 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot (1 \cdot 2 - 3 \cdot 1) = -3$$

Determináns kiszámítása kifejtési tétellel

Így a végeredmény:

$$1 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot (1 \cdot 2 - 3 \cdot 1) = -3$$

Tehát

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -3.$$

Felső háromszögmátrix determinánása

- Egy felső háromszögmátrix determinánása a főátlóban lévő elemek szorzata, hiszen az első oszlop szerint kifejtve:

$$\begin{vmatrix} 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Felső háromszögmátrix determinánása

- Egy felső háromszögmátrix determinánása a főátlóban lévő elemek szorzata, hiszen az első oszlop szerint kifejtve:

$$\begin{vmatrix} 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6 \cdot 5 \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Felső háromszögmátrix determinánása

- Egy felső háromszögmátrix determinánása a főátlóban lévő elemek szorzata, hiszen az első oszlop szerint kifejtve:

$$\begin{vmatrix} 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Felső háromszögmátrix determinánása

- Egy felső háromszögmátrix determinánása a főátlóban lévő elemek szorzata, hiszen az első oszlop szerint kifejtve:

$$\begin{vmatrix} 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Felső háromszögmátrix determinánása

- Egy felső háromszögmátrix determinánása a főátlóban lévő elemek szorzata, hiszen az első oszlop szerint kifejtve:

$$\begin{vmatrix} 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

A determináns tulajdonságai

- Ha a főátló alatt minden elem 0, akkor a determináns a főátlóban lévő elemek szorzata.
- Ha valamelyik sor vagy oszlop minden eleme 0, akkor a determináns is 0.
- Ha két sor megegyezik, akkor a determináns 0. Ugyanez oszlopra is igaz.
- Ha egyik sor a másik λ -szoros, akkor a determináns 0. Ugyanez oszlopra is igaz.

A determináns tulajdonságai

- Ha egy sorhoz hozzáadjuk egy másik sor λ -szorosát, akkor a determináns nem változik. Ugyanez oszlopra is igaz.
- Ha két sort felcserélünk, akkor a determináns (-1) -szeresére változik. Ugyanez oszlopra is igaz.
- Ha valamelyik sor minden elemét λ -val megszorozzuk, akkor a determináns is λ -val szorzódik. Ugyanez oszlopra is igaz.
- A mátrix transzponáltjának determinánása megegyezik az eredeti mátrixéval, azaz $\det(A^T) = \det(A)$.

Szorzástétel Az AB mátrixszorzat determinánása megegyezik az A és B mátrixok determinánásának szorzatával, azaz $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

A determináns és az inverz kapcsolata

- Pontosán azon mátrixoknak létezik inverze, amelyeknek a determinánsa nem 0. Tehát

$$\exists A^{-1} \Leftrightarrow \det(A) \neq 0.$$

A determináns és az inverz kapcsolata

- Pontosán azon mátrixoknak létezik inverze, amelyeknek a determinánsa nem 0. Tehát

$$\exists A^{-1} \Leftrightarrow \det(A) \neq 0.$$

Gondoljuk meg, hogy ha $AA^{-1} = I$, és nyilván $\det(I) = 1$ (mert háromszögmátrix), ezért $1 = \det(AA^{-1}) = \det(A) \det(A^{-1})$, vagyis A determinánsa nem lehet 0.

A determináns és az inverz kapcsolata

- Pontosán azon mátrixoknak létezik inverze, amelyeknek a determinánsa nem 0. Tehát

$$\exists A^{-1} \Leftrightarrow \det(A) \neq 0.$$

Gondoljuk meg, hogy ha $AA^{-1} = I$, és nyilván $\det(I) = 1$ (mert háromszögmátrix), ezért $1 = \det(AA^{-1}) = \det(A) \det(A^{-1})$, vagyis A determinánsa nem lehet 0.

A determináns és az inverz kapcsolata

- Pontosan azon mátrixoknak létezik inverze, amelyeknek a determinánsa nem 0. Tehát

$$\exists A^{-1} \Leftrightarrow \det(A) \neq 0.$$

Gondoljuk meg, hogy ha $AA^{-1} = I$, és nyilván $\det(I) = 1$ (mert háromszögmátrix), ezért $1 = \det(AA^{-1}) = \det(A) \det(A^{-1})$, vagyis A determinánsa nem lehet 0.

- Az invertálható mátrixokat más szóval **regulárisnak** nevezzük. Azon mátrixokat, amelyek nem invertálhatóak **szingulárisnak** hívjuk.

A mátrixműveletek kapcsolata

Amennyiben valamennyi művelet értelmezett, akkor az alábbi szabályok érvényesek:

- $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$
- $(AB)^T = B^T A^T$
- $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$
- $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$