Lineáris egyenletrendszerek, Gauss-elimináció

Nagy Noémi

Mi az hogy lineáris egyenletrendszer?

- A lineáris (elsőfokú) egyenlet rendszerek a legegyszerűbb egyenletrendszerek.

Mi az hogy lineáris egyenletrendszer?

- A lineáris (elsőfokú) egyenlet rendszerek a legegyszerűbb egyenletrendszerek.
- A változók/ismeretlenek konstanssal vannak szorozva és összeadva valahogy így:

$$\begin{aligned} 2x + 1y + 5z &= 8 \\ 3x + 4y \phantom{{}+5z} &= 7 \end{aligned}$$

Mi az hogy lineáris egyenletrendszer?

- A lineáris (elsőfokú) egyenlet rendszerek a legegyszerűbb egyenletrendszerek.
- A változók/ismeretlenek konstanssal vannak szorozva és összeadva valahogy így:

$$\begin{aligned} 2x + 1y + 5z &= 8 \\ 3x + 4y \qquad &= 7 \end{aligned}$$

- Látható hogy minden lineáris egyenletet tudok úgy rendezni, hogy a változók az együtthatóikkal a bal oldalon legyenek, és jobb oldalon csak konstans szerepeljen. A bal oldalon így a keresett változók lineáris kombinációja van.
- Egyszerű példa:

$$\begin{aligned} 4x + 1y &= 0.2 \\ 2x - 4y &= -10 \end{aligned}$$

Bevezető (szép) példa

Oldjuk meg az alábbi háromismeretlenes egyenletrendszert a valós számok halmazán!

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 3y & + & 2z & = & 12 \\ -2x & - & 4y & - & 5z & = & -20 \\ -3x & - & 5y & - & 4z & = & -20 \end{array}$$

A favágó módszer az lenne, hogy kifejezzük valahogy az egyik ismeretlent a többi segítségével, majd visszahelyettesítjük. A kapott kétismeretlenes egyenletrendszerből pedig ismét kifejezzük az egyik ismeretlent.

Ehelyett ezen a példán keresztül megismerjük a Gauss-eliminációt, amely egy jól kezelhető, hatékony algoritmus ennek a feladatnak a megoldására (is).

A lineáris egyenletrendszerek mátrix alakja

Vegyük észre, hogy a fenti három egyenlet felfogható úgy is, hogy két darab három elemű oszlopvektor legyen egyenlő, azaz

$$\begin{pmatrix} x + 3y + 2z \\ -2x - 4y - 5z \\ -3x - 5y - 4z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix}$$

Továbbá a baloldal felírható az ismeretlenekből álló oszlopvektor és az együtthatómátrix szorzataként:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & -5 \\ -3 & -5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix}$$

A lineáris egyenletrendszerek mátrix alakja

Hagyományosan az együtthatómátrixot A-val, a jobboldalt b-vel jelöljük, míg az ismeretleneket tartalmazó vektort x-szel.
Azaz a fenti egyenletet

$$\mathrm{Ax} = \mathrm{b}$$

alakba írhatjuk, ahol

- $\mathrm{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$-es mátrix, amely az együtthatókból áll. Annyi sora van, ahány egyenletünk, és annyi oszlopa van, ahány ismeretlenünk. A neve együtthatómátrix.
- $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ vektornak annyi eleme van, ahány ismeretlen. Célunk, hogy meghatározzuk ezen ismeretlenek értékeit.
- b egy n hosszú (azaz ahány egyenletünk van) számokból álló vektor. A b vektort szokás jobboldalnak nevezni.

A lineáris egyenletrendszerek megoldása

$$Ax = b$$

Ezek szerint ha beszoroznánk A inverzével, akkor kész is lennénk, hiszen kifejeznének az ismeretleneket tartalmazó x vektort. Viszont inverzet csak négyzet alakú mátrixokra definiáltunk, és azt is tudjuk, hogy nem mindegyik mátrixnak van.

Az inverzzel a legnagyobb baj mégis az, hogy hosszadalmas kiszámolni.

A Gauss-elimináció lépései

Ezért a megoldást Gauss-eliminációval határozzuk meg. Ennek lényege, hogy a kibővített együtthatómátrixot (az együtthatómátrix mögé írjuk a b vektort) felső-háromszög alakra hozza.

A Gauss-elimináció lépései

Ezért a megoldást Gauss-eliminációval határozzuk meg. Ennek lényege, hogy a kibővített együtthatómátrixot (az együtthatómátrix mögé írjuk a b vektort) felső-háromszög alakra hozza.

1. Először az egyenletrendszert átírjuk kibővített együtthatómátrix alakba. Jele: $A|b$. Az előbbi példán szemléltetve:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & -5 \\ -3 & -5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 12 \\ -2 & -4 & -5 & -20 \\ -3 & -5 & -4 & -20 \end{array}\right)}$$

A Gauss-elimináció lépései

Ezért a megoldást Gauss-eliminációval határozzuk meg. Ennek lényege, hogy a kibővített együtthatómátrixot (az együtthatómátrix mögé írjuk a b vektort) felső-háromszög alakra hozza.

1. Először az egyenletrendszert átírjuk kibővített együtthatómátrix alakba. Jele: $A|b$. Az előbbi példán szemléltetve:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & -5 \\ -3 & -5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 12 \\ -2 & -4 & -5 & -20 \\ -3 & -5 & -4 & -20 \end{array}\right)}$$

2. A Gauss-elimináció lépései az elemi sorműveletek, azaz
   - sorok(=egyenletek) konstanssal való szorzása
   - sorcsere(=egyenletek cseréje)
   - egy sor(=egyenlet) konstansszorosának hozzáadása/kivonása egy másik sorhoz(=egyenlethez)

A Gauss-elimináció lépései

3. Az elemi sorműveletekkel Gauss-elimináljuk a mátrixot, tehát felső-háromszög alakra hozzuk, pl. 4×4-es együtthatómátrixra sematikusan ábrázolva:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \end{array}\right)$$

A Gauss-elimináció lépései

3. Az elemi sorműveletekkel Gauss-elimináljuk a mátrixot, tehát felső-háromszög alakra hozzuk, pl. 4×4-es együtthatómátrixra sematikusan ábrázolva:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \end{array}\right)$$

4. Visszaalakítjuk a mátrixot egyenletekké, majd fordított sorrendben, lentről felfelé haladva megoldjuk őket.

Gauss-elimináció, első példa

Tekintsük az előbbi példánkat és induljunk ki a kibővített együtthatómátrixból. Első lépésként az első oszlop főátló alatti elemeit nullázzuk ki, azaz x-t elimináljuk egy kivételével az összes egyenletből. Ezen célból az első sor (egyenlet) kétszeresét adjuk hozzá a második sorhoz (egyenlethez), és az első sor háromszorosát a harmadik sorhoz.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 2 & 12 \\ -2 & -4 & -5 & -20 \\ -3 & -5 & -4 & -20 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 2 & 12 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 4 & 2 & 16 \end{array}\right)$$

Gauss-elimináció, első példa

Ezzel az első lépés kész, itt tartunk:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 2 & 12 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 4 & 2 & 16 \end{array}\right)$$

Most a második oszlop, azaz az ismeretlen y eliminálása következik. Adjuk tehát hozzá az (új!) második sor mínusz kétszeresét a harmadikhoz:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 2 & 12 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 4 & 2 & 16 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 2 & 12 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{array}\right)$$

ezzel a változók kifejezésével (a felső háromszög alakkal) készen vagyunk, most jön a visszahelyettesítés.

Gauss-elimináció, első példa

Tehát a kapott felső háromszög mátrixunk:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 12 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{array}\right)$$

Ez a következő egyenleteknek felel meg:

$$\begin{aligned} x + 3y + 2z &= 12 \\ 0x + 2y - z &= 4 \\ 0x + 0y + 4z &= 8 \end{aligned}$$

Gauss-elimináció, első példa

Tehát a kapott felső háromszög mátrixunk:

$$\left(\begin{array}{ccr|r} 1 & 3 & 2 & 12 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{array}\right)$$

Ez a következő egyenleteknek felel meg:

$$\begin{aligned} x+\ 3y+\ 2z &= 12 \\ 2y-\ \ z &= 4 \\ 4z &= 8 \end{aligned}$$

Visszafelé haladva $4z = 8$, innen $z = 2$. Az utolsó előtti sor: $2y - z = 4$, azaz $2y - 2 = 4$, innen $y = 3$. Az első sor: $x + 3y + 2z = 12$, azaz $x + 9 + 4 = 12$, innen $x = -1$.

Gauss-elimináció, második példa

Vegyük a következő lineáris egyenletrendszert:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 6y & + & 2z & = & 10 \\ -7x & + & 7y & - & z & = & -7 \\ 4x & - & 2y & + & z & = & 3 \end{array}$$

Ennek a rendszernek a kibővített együtthatómátrixa:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 6 & 2 & 10 \\ -7 & 7 & -1 & -7 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Gauss-elimináció, második példa

Első lépésben mindig az első oszlop főátló alatti elemeit nullázzuk ki, ehhez az első sort használjuk. Mivel az első sor első eleme most nem 1, így érdemes beszorozni az első sort 0.5-tel. Majd adjuk tehát hozzá az első sor hétszeresét a második sorhoz, és az első sor mínusz négyszeresét a harmadik sorhoz.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 6 & 2 & 10 \\ -7 & 7 & -1 & -7 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 1 & 5 \\ -7 & 7 & -1 & -7 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 28 & 6 & 28 \\ 0 & -14 & -3 & -17 \end{array}\right)$$

A második lépésben a második oszlop főátló alatti elemeit szeretnénk nullázni. Ehhez az új második sort használjuk (az elsőt nem lehet, mert elrontaná a már kész nullákat). Adjuk hozzá az második sor felét a harmadikhoz!

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 28 & 6 & 28 \\ 0 & -14 & -3 & -17 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 28 & 6 & 28 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

Gauss-elimináció, második példa

A Gauss-elimináció ezzel véget ért, mert elértük a felső háromszög alakot, hiszen minden főátló alatti elem nulla.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 28 & 6 & 28 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

Vizsgáljuk meg most a kapott egyenleteket! Ha visszaírjuk mindent a régi egyenlet alakba, akkor azt kaptuk, hogy az első sor a $x + 3y + z = 5$ egyenletnek felel meg, a második a $28y + 6z = 28$-nak, míg a harmadik a $0 = -3$-nak, ezt tilos sornak hívjuk, hisz ez utóbbi ellentmondás, így az egyenletrendszerünknek nincs megoldása.

Gauss-elimináció, harmadik példa

Oldjuk meg az

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 3y & + & z & = & 5 \\ -7x & + & 7y & - & z & = & -1 \\ 4x & - & 2y & + & z & = & 3 \end{array}$$

egyenletrendszert Gauss-elimináció segítségével!

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 1 & 5 \\ -7 & 7 & -1 & -1 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 28 & 6 & 34 \\ 0 & -14 & -3 & -17 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 28 & 6 & 34 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Gauss-elimináció, harmadik példa

A kapott mátrix

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 28 & 6 & 34 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ami a következő egyenleteknek felel meg:

$$\begin{aligned} x+ \quad 3y+ \ \ z &= 5 \\ 0x + 28y + 6z &= 34 \\ 0x + \quad 0y + 0z &= 0 \end{aligned}$$

Gauss-elimináció, harmadik példa

A kapott mátrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 28 & 6 & 34 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ami a következő egyenleteknek felel meg:

$$\begin{aligned} x+ \quad 3y+ \ z &= 5 \\ 28y+6z &= 34 \end{aligned}$$

Látható, hogy 3 változóm és két egyenletem van. Így nem kapok minden változóra egyértelmű megoldást. Például az utolsó egyenletet végtelen sokféleképp meg lehet oldani.

Gauss-elimináció, harmadik példa

A visszahelyettesítésnél először z értékét (az utolsó ismeretlent) kellene kiszámítanunk. Erre most nincs egyenletünk. Ezért legyen $z = t$.

Gauss-elimináció, harmadik példa

A visszahelyettesítésnél először z értékét (az utolsó ismeretlent) kellene kiszámítanunk. Erre most nincs egyenletünk. Ezért legyen $z = t$.

Innen a következő sorból: $28y + 6t = 34$, azaz $y = \frac{34}{28} + \frac{-6}{28}t$.

Gauss-elimináció, harmadik példa

A visszahelyettesítésnél először z értékét (az utolsó ismeretlent) kellene kiszámítanunk. Erre most nincs egyenletünk. Ezért legyen $z = t$.

Innen a következő sorból: $28y + 6t = 34$, azaz $y = \frac{34}{28} + \frac{-6}{28}t$.

Ezek után az első sorból: $x + 3\left(\frac{34}{28} + \frac{-6}{28}t\right) + t = 5$, azaz $x = \frac{38}{28} + \frac{-10}{28}t$.

Gauss-elimináció, harmadik példa

A visszahelyettesítésnél először z értékét (az utolsó ismeretlent) kellene kiszámítanunk. Erre most nincs egyenletünk. Ezért legyen $z = t$.

Innen a következő sorból: $28y + 6t = 34$, azaz $y = \frac{34}{28} + \frac{-6}{28}t$.

Ezek után az első sorból: $x + 3\left(\frac{34}{28} + \frac{-6}{28}t\right) + t = 5$, azaz $x = \frac{38}{28} + \frac{-10}{28}t$.

Tehát, bármilyen t-re az alábbi összefüggés megoldást ad

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{38}{28} + \frac{-10}{28}t \\ \frac{34}{28} + \frac{-6}{28}t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{38}{28} \\ \frac{34}{28} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{10}{28} \\ -\frac{6}{28} \\ 1 \end{pmatrix}$$

ezért végtelen sok megoldás van.

Gauss-elimináció, harmadik példa

A visszahelyettesítésnél először z értékét (az utolsó ismeretlent) kellene kiszámítanunk. Erre most nincs egyenletünk. Ezért legyen $z = t$.

Innen a következő sorból: $28y + 6t = 34$, azaz $y = \frac{34}{28} + \frac{-6}{28}t$.

Ezek után az első sorból: $x + 3\left(\frac{34}{28} + \frac{-6}{28}t\right) + t = 5$, azaz $x = \frac{38}{28} + \frac{-10}{28}t$.

Tehát, bármilyen t-re az alábbi összefüggés megoldást ad

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{38}{28} + \frac{-10}{28}t \\ \frac{34}{28} + \frac{-6}{28}t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{38}{28} \\ \frac{34}{28} \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -\frac{10}{28} \\ -\frac{6}{28} \\ 1 \end{pmatrix}$$

ezért végtelen sok megoldás van.

- Ezen számhármas bármely $t \in \mathbb{R}$-re megoldja az egyenletrendszert. Például a $t = 0$ paraméterértékhez tartozó megoldás az $x = \frac{38}{28}$, $y = \frac{34}{28}$, $z = 0$.

Megjegyzés: Mikor ér véget az elimináció?

Ha az eliminálás folyamán a főátlóba 0 kerül, azon sorcserékkel (ami két egyenlet cseréje) esetleg segíthetünk. Tekintsük a

$$\begin{array}{rcrcrcr} & & 2y & + & 3z & = & 1 \\ x & + & 3y & - & z & = & 5 \\ 3x & & & + & 2z & = & 2 \end{array}$$

lineáris egyenletrendszert. Ebben az esetben ha a kibővített együtthatómátrixban megcseréljük az első és a második sort (egyenletet), akkor tudjuk folytatni az eljárást.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Gauss-elimináció és rang

De mi a helyzet, ha nem találunk megfelelő sort, mert minden elem 0 a főátló alatt? Ilyenkor az eljárás egy ilyesmi alakkal ér véget:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{array}\right)$$

Gauss-elimináció és rang

De mi a helyzet, ha nem találunk megfelelő sort, mert minden elem 0 a főátló alatt? Ilyenkor az eljárás egy ilyesmi alakkal ér véget:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{array}\right)$$

Egy mátrix Gauss-elimináció után megmaradt nem csupa 0 együtthatókból álló sorainak a számát rangnak hívjuk, adott $\mathbf{A}$ mátrix rangjának a jele: $r(\mathbf{A})$. A rang a lineárisan független egyenletek számát is megadja az egyenletrendszerben.

Gauss-elimináció és rang

De mi a helyzet, ha nem találunk megfelelő sort, mert minden elem 0 a főátló alatt? Ilyenkor az eljárás egy ilyesmi alakkal ér véget:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{array}\right)$$

Egy mátrix Gauss-elimináció után megmaradt nem csupa 0 együtthatókból álló sorainak a számát rangnak hívjuk, adott $\mathbf{A}$ mátrix rangjának a jele: $r(\mathbf{A})$. A rang a lineárisan független egyenletek számát is megadja az egyenletrendszerben.
Például, ha

$$A|b = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 8 & 10 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7 \end{array}\right)$$

Itt $r(\mathbf{A}) = 2$ és $r(\mathbf{A}|b) = 4$.

A megoldások száma

Az egyenletrendszer megoldható (tehát egy vagy több megoldása van), ha az együttható márix rangja megegyezik a kibővített együtthatómátrix rangjával $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}|b)$.

A megoldások száma

Az egyenletrendszer megoldható (tehát egy vagy több megoldása van), ha az együttható márix rangja megegyezik a kibővített együtthatómátrix rangjával $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}|b)$.

Megoldhatók például azok az egyenletrendszerek, amik az alábbi sémát adják. A további sémáknál: $*$ nem nulla számot jelöl.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \end{array}\right) ; \left(\begin{array}{cccc|c} * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

A megoldások száma

- Nem megoldható a lineáris egyenletrendszer, ha az együtthatómátrix rangja kisebb mint a kibővített együtthatómátrixé $r(\mathbf{A}) < r(\mathbf{A}|b)$. Ekkor tilos sort találunk!

A megoldások száma

- Nem megoldható a lineáris egyenletrendszer, ha az együtthatómátrix rangja kisebb mint a kibővített együtthatómátrixé $r(\mathbf{A}) < r(\mathbf{A}|b)$. Ekkor tilos sort találunk!

  Ilyen esetek az alábbi sémák

$$\left(\begin{array}{cccc|c} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{array}\right); \left(\begin{array}{cccc|c} * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{array}\right)$$

A megoldások száma

- Nem megoldható a lineáris egyenletrendszer, ha az együtthatómátrix rangja kisebb mint a kibővített együtthatómátrixé $r(\mathbf{A}) < r(\mathbf{A}|b)$. Ekkor tilos sort találunk!

  Ilyen esetek az alábbi sémák

$$\left(\begin{array}{cccc|c} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{array}\right);\left(\begin{array}{cccc|c} * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{array}\right)$$

  Ilyen a második példa!

A megoldások száma

Ha van megoldás (tehát $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}|b)$), akkor

A megoldások száma

Ha van megoldás (tehát $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}|b)$), akkor

- végtelen sok megoldás van, ha a rang kevesebb mint a változók száma.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right);\left(\begin{array}{ccc|c} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

A megoldások száma

Ha van megoldás (tehát $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}|b)$), akkor

- végtelen sok megoldás van, ha a rang kevesebb mint a változók száma.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right);\left(\begin{array}{ccc|c} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ilyen a harmadik példa!

A megoldások száma

Ha van megoldás (tehát $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}|b)$), akkor

- végtelen sok megoldás van, ha a rang kevesebb mint a változók száma.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right); \left(\begin{array}{ccc|c} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ilyen a harmadik példa!

- egy megoldás van, ha a változók száma ugyanannyi mint a rang.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right); \left(\begin{array}{cccc|c} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \end{array}\right)$$

A megoldások száma

Ha van megoldás (tehát $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}|b)$), akkor

- végtelen sok megoldás van, ha a rang kevesebb mint a változók száma.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right); \left(\begin{array}{ccc|c} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ilyen a harmadik példa!

- egy megoldás van, ha a változók száma ugyanannyi mint a rang.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right); \left(\begin{array}{cccc|c} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \end{array}\right)$$

Ilyen az első példa!

Determináns meghatározása elemi sorműveletekkel

Emlékeztető: egy mátrixon elvégzett alábbi sorműveleteket nevezzük elemi sorműveletnek:

1. Egy sor konstanssal való szorzását
2. Két sor felcserélését
3. Egy sor konstansszorosának hozzáadását egy másik sorhoz

Determinásnál

1. Ha egy sort konstanssal szorzok, akkor a determináns értéke a konstansszorosára nő. Így egy sorból egy konstans kiemelhető.
2. A sorcsere a determinánst -1-szeresre változtatja.
3. Az utolsó művelet a determináns értékét nem változtatja.

Ezek szerint az elvégzett műveleteket gondosan könyvelve a determináns elemi sorműveletekkel is meghatározható, ha közben a mátrixot háromszögalakra hozzuk.

Példa

Számítsuk ki az alábbi determinánst!

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} =$$

Példa

Számítsuk ki az alábbi determinánst! Első lépésben emeljünk ki az első sorból 3-at.

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

Példa

Számítsuk ki az alábbi determinánst! Első lépésben emeljünk ki az első sorból 3-at. Második lépésben vonjuk le az első sor egyszeresét a második sorból!

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

Példa

Számítsuk ki az alábbi determinánst! Első lépésben emeljünk ki az első sorból 3-at. Második lépésben vonjuk le az első sor egyszeresét a második sorból!

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

Most vonjuk ki az első sor háromszorosát a harmadik sorból!

$$3 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} =$$

Példa

Számítsuk ki az alábbi determinánst! Első lépésben emeljünk ki az első sorból 3-at. Második lépésben vonjuk le az első sor egyszeresét a második sorból!

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

Most vonjuk ki az első sor háromszorosát a harmadik sorból!

$$3 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -8 \end{vmatrix}$$

Példa

Végül vonjuk le a második sor másfélszeresét a harmadik sorból!

$$3\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -8 \end{vmatrix} =$$

Példa

Végül vonjuk le a második sor másfélszeresét a harmadik sorból!

$$3\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -8 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

Példa

Végül vonjuk le a második sor másfélszeresét a harmadik sorból!

$$3\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -8 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

Most már csak egy háromszögmátrix determinánsát kell meghatároznunk, ez a főátlóban lévő elemek szorzata, azaz $3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot (-5) = -30$. Tehát az eredeti mátrix determinánsa -30.

Az Inverz képlete

Ha $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ akkor $\mathbf{A}$-nak létezik inverze, és

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}[\mathbf{A}_{ij}]^T$$

Ahol $\mathbf{A}_{ij}$ jelöli az $\mathbf{A}$ (i,j)-edik előjeles aldeterminánsát (sakktáblaszabály).

Az Inverz képlete

Ha $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ akkor $\mathbf{A}$-nak létezik inverze, és

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} [\mathbf{A}_{ij}]^T$$

Ahol $\mathbf{A}_{ij}$ jelöli az $\mathbf{A}$ (i, j)-edik előjeles aldeterminánsát (sakktáblaszabály).

2×2-es esetben a képlet egyszerű:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Az Inverz képlete

Ha $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ akkor $\mathbf{A}$-nak létezik inverze, és

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} [\mathbf{A}_{ij}]^T$$

Ahol $\mathbf{A}_{ij}$ jelöli az $\mathbf{A}$ (i, j)-edik előjeles aldeterminánsát (sakktáblaszabály).

2×2-es esetben a képlet egyszerű:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

De nagyobb dimenzióban a képlettel való számolás nagyon hosszadalmas.

Az inverz meghatározása elemi sorműveletekkel*

Csak igen kevés esetben van szükség mátrix inverzének meghatározására. Láttuk, hogy Gauss-eliminációval az inverz kiszámítása nélkül is meg tudjuk oldani a lineáris egyenletrendszert. Amennyiben valamilyen okból mégis szükségünk van az inverzre, akkor azt meghatározhatjuk a következő módon.

Bővítsük ki A-t az identitással, azaz induljunk ki a $[\mathrm{A}|\mathrm{I}]$ mátrixból. Elemi sorműveletekkel hozzuk $[\mathrm{I}|*]$ alakba. Itt tovább kell mennünk, mint a Gauss-eliminációnál tennénk: az elért háromszög alak után még a főátló feletti elemeket is ki kell nullázni. Ezt a háromszög alak elérése és a sorok normálása után az utolsó oszloptól visszafelé haladva végezzük. Végül a jobboldalon kapott mátrix lesz A inverze. Ezen eljárást nevezik Gauss-Jordan eliminációnak.

Példa

Legyen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix}!$$

Már tudjuk, hogy $\det(\mathrm{A}) = -10 \neq 0$, így van inverze. Számítsuk ki tehát A^{-1}-t a fenti módszerrel!

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -8 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

Példa

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -8 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -1.5 & -1.5 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.3 & 0.3 & -0.2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 0.4 & -0.6 & 0.4 \\ 0 & 1 & 0 & -0.2 & 0.8 & -0.2 \\ 0 & 0 & 1 & 0.3 & 0.3 & -0.2 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0 & 1 & 0 & -0.2 & 0.8 & -0.2 \\ 0 & 0 & 1 & 0.3 & 0.3 & -0.2 \end{array}\right],$$

Ezek alapján $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ -0.2 & 0.8 & -0.2 \\ 0.3 & 0.3 & -0.2 \end{bmatrix}.$

Ellenőrzés

A kapott mátrix valóban A inverze, hiszen:

$$\begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ -0.2 & 0.8 & -0.2 \\ 0.3 & 0.3 & -0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

és hasonlóképpen:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ -0.2 & 0.8 & -0.2 \\ 0.3 & 0.3 & -0.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$