Alapvető egyenlőtlenségek, Részsorozat, Nagyságrendek

Nagy Noémi

Bernoulli egyenlőtlenség

Minden $h \geq -1$-re és $n \in \mathbb{N}$-re igaz, hogy

$$(1+h)^n \geq 1 + nh$$

Bernoulli egyenlőtlenség

Minden $h \geq -1$-re és $n \in \mathbb{N}$-re igaz, hogy

$$(1+h)^n \geq 1 + nh$$

Bizonyítás.

A bizonyítás teljes indukcióval történik. Ha $n = 1$ akkor az egyenlőtlenség triviálisan teljesül. Most tegyük fel, hogy $K \in \mathbb{N}$-re igaz az állítás. Ekkor $K+1$-re:

$$(1+h)^{K+1} = (1+h)^K(1+h) \geq^* (1+Kh)(1+h) =$$
$$= 1 + Kh + h + Kh^2 \geq 1 + (K+1)h$$

A (*) egyenlőtlenség az indukciós feltételből és abból következik, hogy $(1+h) \geq 0$. Tehát minden $n \in \mathbb{N}$-re igaz. ∎

Alapvető egyenlőtlenségek: $n < 2^n$

Legyen n egy pozitív természetes szám, ekkor

$$2^n > n.$$

Alapvető egyenlőtlenségek: $n < 2^n$

Legyen n egy pozitív természetes szám, ekkor

$$2^n > n.$$

Ez a Bernoulli egyenlőtlenségből következik. Legyen az előbbi $h = 1$ ekkor

$$(1+1)^n \geq 1 + n \cdot 1 = n + 1 > n$$

Alapvető egyenlőtlenségek: háromszög egyenlőtlenség

Legyenek a és b tetszőleges valós számok, ekkor a (már szerepelt)

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

egyenlőtlenséget nevezik háromszög egyenlőtlenségnek.

Alapvető egyenlőtlenségek: háromszög egyenlőtlenség

Legyenek a és b tetszőleges valós számok, ekkor a (már szerepelt)

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

egyenlőtlenséget nevezik háromszög egyenlőtlenségnek.

Az állítás például a és b előjele szerinti esetekre bontással igazolható.

Alapvető egyenlőtlenségek - Számtani-mértani

Tétel

Legyenek $a_1, a_2, \ldots, a_N$ nemnegatív valós számok. Ekkor a mértani középük legfeljebb annyi lehet, mint a számtani középük, azaz

$$\sqrt[N]{a_1 a_2 \ldots a_N} \leq \frac{a_1 + a_2 + \ldots a_N}{N}$$

Alapvető egyenlőtlenségek - Számtani-mértani

Tétel

Legyenek $a_1, a_2, \ldots, a_N$ nemnegatív valós számok. Ekkor a mértani középük legfeljebb annyi lehet, mint a számtani középük, azaz

$$\sqrt[N]{a_1 a_2 \ldots a_N} \leq \frac{a_1 + a_2 + \ldots a_N}{N}$$

Az egyenlőtlenséget teljes indukcióval lehet bizonyítani, méghozzá nem egyszerűen.

Példa az egyenlőtlenségek alkalmazására

Állítás: Az $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ sorozat korlátos és monoton nő.

Példa az egyenlőtlenségek alkalmazására

Állítás: Az $e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ sorozat korlátos és monoton nő.

Először azt bizonyítjuk, hogy monoton nő. Az n-edik tag felírható úgy is mint:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = 1 \cdot \frac{n+1}{n}\frac{n+1}{n}\cdots\frac{n+1}{n}$$

Példa az egyenlőtlenségek alkalmazására

Állítás: Az $e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ sorozat korlátos és monoton nő.

Először azt bizonyítjuk, hogy monoton nő. Az n-edik tag felírható úgy is mint:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = 1\cdot\frac{n+1}{n}\frac{n+1}{n}\cdots\frac{n+1}{n}$$

Innen:

$$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \sqrt[n+1]{1\cdot\frac{n+1}{n}\frac{n+1}{n}\cdots\frac{n+1}{n}}$$

Azaz a fenti kifejezés felfogható $n+1$ darab szám mértani közepének.

Példa az egyenlőtlenségek alkalmazására

Állítás: Az $e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ sorozat korlátos és monoton nő.

Először azt bizonyítjuk, hogy monoton nő. Az n-edik tag felírható úgy is mint:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = 1\cdot\frac{n+1}{n}\frac{n+1}{n}\cdots\frac{n+1}{n}$$

Innen:

$$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \sqrt[n+1]{1\cdot\frac{n+1}{n}\frac{n+1}{n}\cdots\frac{n+1}{n}}$$

Azaz a fenti kifejezés felfogható $n+1$ darab szám mértani közepének. Ugyanezen számok számtani közepe:

$$\frac{1+\frac{n+1}{n}+\frac{n+1}{n}+\cdots+\frac{n+1}{n}}{n+1} = \frac{1+n+1}{n+1} = 1+\frac{1}{n+1}$$

.

Példa az egyenlőtlenségek alkalmazására II

A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség miatt:

$$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}} \leq 1+\frac{1}{n+1}.$$

Példa az egyenlőtlenségek alkalmazására II

A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség miatt:

$$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \leq 1+\frac{1}{n+1}.$$

Mindkét oldalt $n+1$-edik hatványra emelve:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1},$$

ami mutatja, hogy a sorozat monoton nő.

Példa az egyenlőtlenségek alkalmazására III

A korlátosság bizonyítása:

Hasonlóképp az előbbiekhez:

$$\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}\cdots\frac{n+1}{n}$$

Példa az egyenlőtlenségek alkalmazására III

A korlátosság bizonyítása:

Hasonlóképp az előbbiekhez:

$$\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}\cdots\frac{n+1}{n}$$

Ebből:

$$\sqrt[n+2]{\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \sqrt[n+2]{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{n+1}{n}\frac{n+1}{n}\cdots\frac{n+1}{n}}$$

ami megint mértani középnek fogható fel.

Példa az egyenlőtlenségek alkalmazására III

A korlátosság bizonyítása:

Hasonlóképp az előbbiekhez:

$$\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}\cdots\frac{n+1}{n}$$

Ebből:

$$\sqrt[n+2]{\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \sqrt[n+2]{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{n+1}{n}\frac{n+1}{n}\cdots\frac{n+1}{n}}$$

ami megint mértani középnek fogható fel.

Ugyanezen számok számtani közepe viszont

$$\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{n+1}{n}+\frac{n+1}{n}+\cdots+\frac{n+1}{n}}{n+2} = \frac{1+n+1}{n+2} = 1$$

Példa az egyenlőtlenségek alkalmazására IV

Így a számtani-mértani egyenlőtlenségből:

$$\sqrt[n+2]{\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}} \leq 1.$$

Példa az egyenlőtlenségek alkalmazására IV

Így a számtani-mértani egyenlőtlenségből:

$$\sqrt[n+2]{\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \leq 1.$$

tehát

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &\leq 1 \\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n &\leq 4 \end{aligned}$$

Az Euler-féle szám definiciója

Bebizonyítottuk, hogy az

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

sorozat monoton növő és korlátos, tehát konvergens.

Az Euler-féle szám definiciója

Bebizonyítottuk, hogy az

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

sorozat monoton növő és korlátos, tehát konvergens.

Az e_n Euler-féle sorozat határértékét e-nek nevezzük, tehát

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Az Euler-féle szám definiciója

Bebizonyítottuk, hogy az

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

sorozat monoton növő és korlátos, tehát konvergens.

Az e_n Euler-féle sorozat határértékét e-nek nevezzük, tehát

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Az első néhány számjegye:

$$e \approx 2.718281828459045235360287471352662497757247 09$$

Hasonlóan a π-hez, az e is irracionális.

Speciális rendőr-elv

Állítás: Ha $a_n \leq b_n$ minden $n \in \mathbb{N}$-re és a_n, b_n sorozatnak van határértéke akkor $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Ebből következik a speciális rendőr-elv és a rendőr-elv.

Speciális rendőr-elv

Állítás: Ha $a_n \leq b_n$ minden $n \in \mathbb{N}$-re és a_n, b_n sorozatnak van határértéke akkor $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Ebből következik a speciális rendőr-elv és a rendőr-elv.

Bizonyítás: Indirekt.

Speciális rendőr-elv: Ha $a_n \leq b_n$ minden $n \in \mathbb{N}$-re és $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ akkor $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$.

Speciális rendőr-elv

Állítás: Ha $a_n \leq b_n$ minden $n \in \mathbb{N}$-re és a_n, b_n sorozatnak van határértéke akkor $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Ebből következik a speciális rendőr-elv és a rendőr-elv.

Bizonyítás: Indirekt.

Speciális rendőr-elv: Ha $a_n \leq b_n$ minden $n \in \mathbb{N}$-re és $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ akkor $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$.

Hasonlóan, ha $a_n \leq b_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ és $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$ akkor $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Speciális rendőr-elv

Állítás: Ha $a_n \leq b_n$ minden $n \in \mathbb{N}$-re és a_n, b_n sorozatnak van határértéke akkor $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Ebből következik a speciális rendőr-elv és a rendőr-elv.

Bizonyítás: Indirekt.

Speciális rendőr-elv: Ha $a_n \leq b_n$ minden $n \in \mathbb{N}$-re és $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ akkor $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$.

Hasonlóan, ha $a_n \leq b_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ és $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$ akkor $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Példa: Az $a_n = n^2$ sorozatról tudjuk hogy a végtelenbe tart (könnyű hozzá küszöbszámot adni) ekkor a $b_n = n! + n^2$ is a végtelenbe tart hiszen $n^2 \leq n^2 + n!$.

A rendőr-elv

Rendőr-elv: Ha c_n sorozathoz létezik olyan a_n és b_n sorozat melyre $a_n \leq c_n \leq b_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ és $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ és $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = A$.

A rendőr-elv

Rendőr-elv: Ha c_n sorozathoz létezik olyan a_n és b_n sorozat melyre $a_n \leq c_n \leq b_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ és $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ és $\lim_{n\to\infty} b_n = A$, akkor $\lim_{n\to\infty} c_n = A$.

Példa: $c_n = \left(\frac{4n+1}{7n+5}\right)^n$ határértéke 0, mivel

$$0 \leq \left(\frac{4n+1}{7n+5}\right)^n \leq \left(\frac{5n}{7n}\right)^n = \left(\frac{5}{7}\right)^n \to 0$$

Tehát itt $a_n = 0$, $b_n = \left(\frac{5}{7}\right)^n$ és mindkét sorozat határértéke 0. (biz. később)

Ebből következően $\left(\frac{4n+1}{7n+5}\right)^n \to 0$.

Korlátos sorozatok szorzása 0-hoz tartó sorozattal

Ha $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ és b_n egy tetszőleges korlátos sorozat, akkor a rendőr-elvből következik, hogy $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$. Ehhez az sem szükséges, hogy b_n konvergens legyen.

Korlátos sorozatok szorzása 0-hoz tartó sorozattal

Ha $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ és b_n egy tetszőleges korlátos sorozat, akkor a rendőr-elvből következik, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$. Ehhez az sem szükséges, hogy b_n konvergens legyen.

Példa: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$. Mivel

$$\frac{-1}{n} \le \frac{\sin n}{n} \le \frac{1}{n}$$

ezért a rendőr-elvből következik, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$.

Nagyságrendek

Definíció

Legyen $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ *és* $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$. *Azt mondjuk, hogy* *$a_n$ sokkal gyorsabban tart plusz végtelenhez, mint b_n*, *azaz* $b_n \ll a_n$, *ha* $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$ *(vagy ezzel ekvivalens, hogy* $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 0$*).*

Példa: $n^n \gg n!$ mivel

$$\frac{n^n}{n!} = \frac{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n} \geq n \cdot 1 \ldots \cdot 1 \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{spec. rendőr-elv}} \quad \frac{n^n}{n!} \to +\infty$$

Nagyságrendek

Definíció

Legyen $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ *és* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$. *Azt mondjuk, hogy* a_n *sokkal gyorsabban tart plusz végtelenhez, mint* b_n, *azaz* $b_n \ll a_n$, *ha* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$ *(vagy ezzel ekvivalens, hogy* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 0$*).*

Példa: $n^n \gg n!$ mivel

$$\frac{n^n}{n!} = \frac{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n} \geq n \cdot 1 \ldots \cdot 1 \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{spec. rendőr-elv}} \quad \frac{n^n}{n!} \to +\infty$$

A hét során bebizonyítjuk, hogy

$$n^n \gg n! \gg 2^n \gg n \gg \ln n$$

Nagyságrendek

Definíció

Legyen $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ *és* $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$. *Azt mondjuk, hogy a_n sokkal gyorsabban tart plusz végtelenhez, mint b_n, azaz $b_n \ll a_n$, ha* $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$ *(vagy ezzel ekvivalens, hogy* $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 0$*).*

Példa: $n^n \gg n!$ mivel

$$\frac{n^n}{n!} = \frac{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n} \geq n \cdot 1 \ldots \cdot 1 \underbrace{\Rightarrow}_{\text{spec. rendőr-elv}} \frac{n^n}{n!} \to +\infty$$

A hét során bebizonyítjuk, hogy

$$n^n \gg n! \gg 2^n \gg n \gg \ln n$$

Általánosan igaz, hogy ha $a > 1$, $k > 0$, akkor

$$n^n \gg n! \gg a^n \gg n^k \gg \log_a n$$

Részsorozat

Legyen a_n egy tetszőleges sorozat n_k pedig egy szigorú monoton növekedő, pozitív egészekből álló sorozat (indexsorozat). Ekkor az a_{n_k} sorozatot az a_n sorozat részsorozatának nevezzük.

Részsorozat

Legyen a_n egy tetszőleges sorozat n_k pedig egy szigorú monoton növekedő, pozitív egészekből álló sorozat (indexsorozat). Ekkor az a_{n_k} sorozatot az a_n sorozat részsorozatának nevezzük.

Példa: Az $(-1)^n$ páros indexű részsorozata a konstans 1 sorozat, a páratlan indexű részsorozata a konstans -1.

Részsorozat

Legyen a_n egy tetszőleges sorozat n_k pedig egy szigorú monoton növekedő, pozitív egészekből álló sorozat (indexsorozat). Ekkor az a_{n_k} sorozatot az a_n sorozat részsorozatának nevezzük.

Példa: Az $(-1)^n$ páros indexű részsorozata a konstans 1 sorozat, a páratlan indexű részsorozata a konstans -1.

Ezt úgy jelöljük, hogy $a_{2k} = 1$, illetve $a_{2k+1} = -1$.

Konvergens sorozatok részsorozata

Állítás: Egy A-hoz tartó konvergens sorozat minden részsorozata is konvergens, és a részsorozat határértéke is A.

Konvergens sorozatok részsorozata

Állítás: Egy A-hoz tartó konvergens sorozat minden részsorozata is konvergens, és a részsorozat határértéke is A.

Ezt az állítást egyrészt használhatjuk arra, hogy határértéket számítsunk ki. Másrészt viszont azt is lehet részsorozatok segítségével igazolni, hogy egy sorozatnak nincsen határértéke.

Konvergens sorozatok részsorozata

Állítás: Egy A-hoz tartó konvergens sorozat minden részsorozata is konvergens, és a részsorozat határértéke is A.

Ezt az állítást egyrészt használhatjuk arra, hogy határértéket számítsunk ki. Másrészt viszont azt is lehet részsorozatok segítségével igazolni, hogy egy sorozatnak nincsen határértéke.

Példa: Tekintsük a $b_k = \dfrac{1}{3k^2+6}$ sorozatot. Ez a $\left(\frac{1}{n}\right)$ sorozat $3k^2+6$ indexsorozatú részsorozata, ezért b_k is 0-hoz tart.

Konvergens sorozatok részsorozata

Állítás: Egy A-hoz tartó konvergens sorozat minden részsorozata is konvergens, és a részsorozat határértéke is A.

Ezt az állítást egyrészt használhatjuk arra, hogy határértéket számítsunk ki. Másrészt viszont azt is lehet részsorozatok segítségével igazolni, hogy egy sorozatnak nincsen határértéke.

Példa: Tekintsük a $b_k = \dfrac{1}{3k^2+6}$ sorozatot. Ez a $\left(\frac{1}{n}\right)$ sorozat $3k^2+6$ indexsorozatú részsorozata, ezért b_k is 0-hoz tart.

Példa 2: Tekintsük az $\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ sorozatot, $a_n = 0, -1, 0, 1, 0, -1, \ldots$
Indirekt tegyük fel, hogy konvergens, ekkor minden részsorozatának ugyanoda kéne tartania.
Viszont vegyük észre, hogy $a_{2k-1} = 0$, $a_{4k} = 1$, $a_{4k-2} = -1$. Tehát vannak részsorozatai különböző határértékekkel, így nem lehet konvergens.

Végtelenhez tartó sorozatok részsorozata

Állítás 1: Ha a sorozat plusz végtelenbe tart, sorozat minden részsorozata is a plusz végtelenbe tart.

Végtelenhez tartó sorozatok részsorozata

Állítás 1: Ha a sorozat plusz végtelenbe tart, sorozat minden részsorozata is a plusz végtelenbe tart.

Állítás 2: Ha egy monoton növő sorozat valamelyik részsorozata plusz végtelenhez tart, akkor az eredeti sorozat is plusz végtelenhez tart.

Végtelenhez tartó sorozatok részsorozata

Állítás 1: Ha a sorozat plusz végtelenbe tart, sorozat minden részsorozata is a plusz végtelenbe tart.

Állítás 2: Ha egy monoton növő sorozat valamelyik részsorozata plusz végtelenhez tart, akkor az eredeti sorozat is plusz végtelenhez tart.

Ezen állítás felhasználásával elég egy részsorozat határértékét kiszámolni, ha tudjuk, hogy az eredeti sorozat monoton.

Végtelenhez tartó sorozatok részsorozata

Állítás 1: Ha a sorozat plusz végtelenbe tart, sorozat minden részsorozata is a plusz végtelenbe tart.

Állítás 2: Ha egy monoton növő sorozat valamelyik részsorozata plusz végtelenhez tart, akkor az eredeti sorozat is plusz végtelenhez tart.

Ezen állítás felhasználásával elég egy részsorozat határértékét kiszámolni, ha tudjuk, hogy az eredeti sorozat monoton.

Példa: Bizonyítsuk be, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\ln n} = +\infty$! (Megj.: a sorozat $n = 2$-től értelmezett csak, első tagja legyen mondjuk 1).

A példa bizonyítása

Először megmutatjuk, hogy $a_n = \frac{n}{\ln n}$ monoton nő, azaz $\frac{n+1}{\ln(n+1)} \geq \frac{n}{\ln n}$-t kell igazolnunk. Ekvivalens átalakításokat fogunk végezni.

$$\frac{n+1}{\ln(n+1)} \geq \frac{n}{\ln n}$$

A példa bizonyítása

Először megmutatjuk, hogy $a_n = \frac{n}{\ln n}$ monoton nő, azaz $\frac{n+1}{\ln(n+1)} \geq \frac{n}{\ln n}$-t kell igazolnunk. Ekvivalens átalakításokat fogunk végezni.

$$\frac{n+1}{\ln(n+1)} \geq \frac{n}{\ln n}$$

Szorozzunk be a (nemnegatív) nevezőkkel:

$$(n+1)\ln n \geq n\ln(n+1)$$

A példa bizonyítása

Először megmutatjuk, hogy $a_n = \frac{n}{\ln n}$ monoton nő, azaz $\frac{n+1}{\ln(n+1)} \geq \frac{n}{\ln n}$-t kell igazolnunk. Ekvivalens átalakításokat fogunk végezni.

$$\frac{n+1}{\ln(n+1)} \geq \frac{n}{\ln n}$$

Szorozzunk be a (nemnegatív) nevezőkkel:

$$(n+1)\ln n \geq n\ln(n+1)$$

A logaritmus azonosságát felhasználva:

$$\ln(n^{n+1}) \geq \ln((n+1)^n)$$

A példa bizonyítása

Először megmutatjuk, hogy $a_n = \frac{n}{\ln n}$ monoton nő, azaz $\frac{n+1}{\ln(n+1)} \geq \frac{n}{\ln n}$-t kell igazolnunk. Ekvivalens átalakításokat fogunk végezni.

$$\frac{n+1}{\ln(n+1)} \geq \frac{n}{\ln n}$$

Szorozzunk be a (nemnegatív) nevezőkkel:

$$(n+1)\ln n \geq n\ln(n+1)$$

A logaritmus azonosságát felhasználva:

$$\ln(n^{n+1}) \geq \ln((n+1)^n)$$

Mivel a ln függvény szigorú monoton nő, így

$$n^{n+1} \geq (n+1)^n$$

A példa bizonyításának folytatása

Osszuk le mindkét oldalt n^n-el:

$$n \geq \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Tudjuk, hogy az Euler-sorozat felső korlátja 4 így, így a 4. tagtól kezdve biztosan igaz a monotonitás.

A példa bizonyításának folytatása

Osszuk le mindkét oldalt n^n-el:

$$n \geq \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Tudjuk, hogy az Euler-sorozat felső korlátja 4 így, így a 4. tagtól kezdve biztosan igaz a monotonitás.

Másrészt a 2^k indexű részsorozat végtelenbe tart, hiszen:

$$a_{2^k} = \frac{2^k}{\ln(2^k)} = \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{2^k}{k},$$

és $\dfrac{2^k}{k} \to +\infty$ (lásd gyak.), így $\frac{n}{\ln n} \to +\infty$.

A példa bizonyításának folytatása

Osszuk le mindkét oldalt n^n-el:

$$n \geq \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Tudjuk, hogy az Euler-sorozat felső korlátja 4 így, így a 4. tagtól kezdve biztosan igaz a monotonitás.

Másrészt a 2^k indexű részsorozat végtelenbe tart, hiszen:

$$a_{2^k} = \frac{2^k}{\ln(2^k)} = \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{2^k}{k},$$

és $\dfrac{2^k}{k} \to +\infty$ (lásd gyak.), így $\frac{n}{\ln n} \to +\infty$.

Ezzel bebizonyítottuk, hogy $n \gg \ln n$.

Nevezetes határértékek - Euler-féle sorozat

Euler-féle sorozat $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

Azt már láttuk, hogy $e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ korlátos és monoton nő, azaz van határértéke, és a határértékét e-nek jelöljük. Vegyük észre, hogy a $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ sorozat a $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ sorozat másik alakja!

Nevezetes határértékek - Euler-féle sorozat

Euler-féle sorozat $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

Azt már láttuk, hogy $e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ korlátos és monoton nő, azaz van határértéke, és a határértékét e-nek jelöljük. Vegyük észre, hogy a $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ sorozat a $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ sorozat másik alakja!

Ha x tetszőleges valós szám, akkor $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$

Ennek bizonyítása meglehetősen hosszadalmas. Először egész, majd racionális számokra lehet belátni (részsorozatok felhasználásával), aztán a racionális számokkal kell közelíteni az irracionális számokat.

Nevezetes határértékek - Exponenciális sorozat

Ha $a > 1$ valós konstans, akkor $\lim_{n\to\infty} a^n = +\infty$

Ennek igazolásához írjuk fel a-t $1 + r$ alakban. Mivel $a > 1$, így $r > 0$. Innen a Bernoulli egyenlőtlenség miatt:

$$(1 + r)^n \geq 1 + r \cdot n,$$

ami a speciális rendőrelv miatt plusz végtelenhez tart, így a^n is.

Nevezetes határértékek - Exponenciális sorozat

Ha $a > 1$ valós konstans, akkor $\lim_{n\to\infty} a^n = +\infty$

Ennek igazolásához írjuk fel a-t $1 + r$ alakban. Mivel $a > 1$, így $r > 0$. Innen a Bernoulli egyenlőtlenség miatt:

$$(1 + r)^n \geq 1 + r \cdot n,$$

ami a speciális rendőrelv miatt plusz végtelenhez tart, így a^n is.

Ha $|a| < 1$ valós konstans, akkor $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$

Az $a = 0$ eset trivialitás. Legyen $b = \frac{1}{|a|}$ $(a \neq 0)$. Mivel $0 < |a| < 1$, így $b > 1$, azaz $b = 1 + r$ valamilyen pozitív r-el. Ismét Bernoulli-val:

$$0 \leq \frac{1}{b^n} = \frac{1}{(1+r)^n} \leq \frac{1}{1+nr} < \frac{1}{rn} = \frac{1}{r}\frac{1}{n} \to 0$$

tehát az $1/b^n = |a|^n$ sorozat a rendőr-elv miatt nullához tart.

Nevezetes határértékek - Exponenciális sorozat II

Mivel $-|a|^n \leq a^n \leq |a|^n$, így a rendőr-elvből következik, hogy $a^n \to 0$.

Nevezetes határértékek - Exponenciális sorozat II

Mivel $-|a|^n \leq a^n \leq |a|^n$, így a rendőr-elvből következik, hogy $a^n \to 0$.

Ha $a < -1$ valós konstans, akkor nem létezik $\lim\limits_{n\to\infty} a^n$.
Hiszen ekkor a sorozatnak van $+\infty$-hez és $-\infty$-hez tartó részsorozata is.

Nevezetes határértékek - Exponenciális sorozat II

Mivel $-|a|^n \leq a^n \leq |a|^n$, így a rendőr-elvből következik, hogy $a^n \to 0$.

Ha $a < -1$ valós konstans, akkor nem létezik $\lim\limits_{n\to\infty} a^n$.
Hiszen ekkor a sorozatnak van $+\infty$-hez és $-\infty$-hez tartó részsorozata is.

Ha $a \neq 1$, $a > -1$ valós konstans és $k \in \mathbb{Z}$, akkor

$$\lim_{n\to\infty} n^k a^n = \lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0, & \text{ha } |a| < 1 \\ +\infty, & \text{ha } a > 1 \end{cases}$$

Ezt az állítást nem bizonyítjuk. Megjegyezzük, hogy az n^k és az a^n sorozat szorzatának határértéke teljes mértékben a másodiktól függ. Ekkor azt mondjuk, hogy az exponenciális sorozat dominálja a másikat.

Nevezetes határértékek - n-edik gyök

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

A számtani-mértani közép közti egyenlőtlenséget használjuk az $\sqrt{n}, \sqrt{n}, 1, \ldots, 1$ összesen n darab számra.

Nevezetes határértékek - n-edik gyök

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

A számtani-mértani közép közti egyenlőtlenséget használjuk az $\sqrt{n}, \sqrt{n}, 1, \ldots, 1$ összesen n darab számra.

Mértani középük: $\sqrt[n]{n}$.

Számtani középük: $\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n}+n-2}{n}$.

Nevezetes határértékek - n-edik gyök

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

A számtani-mértani közép közti egyenlőtlenséget használjuk az $\sqrt{n}, \sqrt{n}, 1, \ldots, 1$ összesen n darab számra.

Mértani közepük: $\sqrt[n]{n}$.

Számtani közepük: $\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n}+n-2}{n}$.

Innen:

$$1 = \sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{n} \leq \frac{\sqrt{n}+\sqrt{n}+n-2}{n} < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

Így az $\sqrt[n]{n}$ sorozatot alulról-felülről becsülhetjük egy-egy 1-hez tartó sorozattal, azaz a rendőr-elvből következik az állítás.

Nevezetes határértékek - n-edik gyök

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

A számtani-mértani közép közti egyenlőtlenséget használjuk az $\sqrt{n}, \sqrt{n}, 1, \dots, 1$ összesen n darab számra.

Mértani közepük: $\sqrt[n]{n}$.

Számtani közepük: $\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n}+n-2}{n}$.

Innen:

$$1 = \sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{n} \leq \frac{\sqrt{n}+\sqrt{n}+n-2}{n} < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

Így az $\sqrt[n]{n}$ sorozatot alulról-felülről becsülhetjük egy-egy 1-hez tartó sorozattal, azaz a rendőr-elvből következik az állítás.

Legyen p tetszőleges pozitív valós szám, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1$ (Nem bizonyítjuk.)