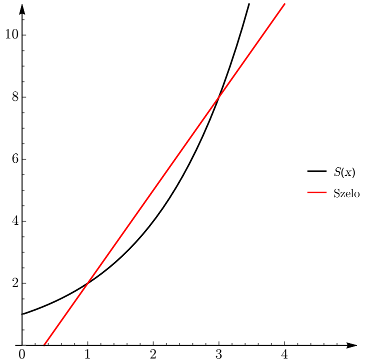
Differenciálszámítás

Nagy Noémi

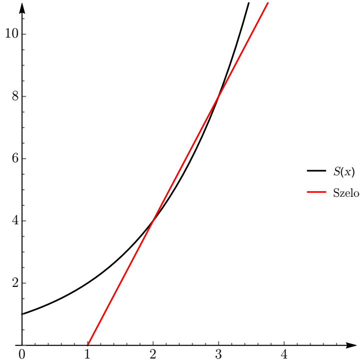
A differenciált fogalma

Tegyük fel, hogy egy kilőtt rakéta távolságát $S(x)$-et tudom mérni az x idő függvényében. Szeretném tudni mennyi a sebessége. Ezt például egy szelő segítségével közelíthetem.



A differenciált fogalma

Tegyük fel, hogy egy kilőtt rakéta távolságát $S(x)$-et tudom mérni az x idő függvényében. Szeretném tudni mennyi a sebessége. Ezt például egy szelő segítségével közelíthetem.
Ha jobban akarjuk közelíteni vehetünk közelebbi pontot.

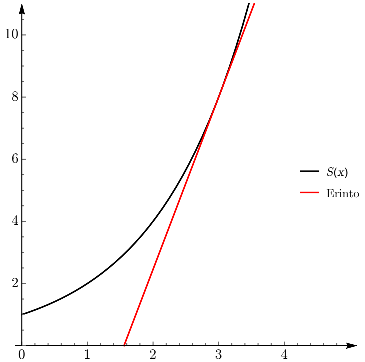


A differenciált fogalma

Tegyük fel, hogy egy kilőtt rakéta távolságát $S(x)$-et tudom mérni az x idő függvényében. Szeretném tudni mennyi a sebessége. Ezt például egy szelő segítségével közelíthetem.

Ha jobban akarjuk közelíteni vehetünk közelebbi pontot.

A szelők határértéke az érintő. A sebesség az érintő meredeksége.



A formális definíció

Definíció

Legyen az f függvény értelmezve az x_0 pont egy környezetében (azaz létezzen $r > 0$, melyre $K_r(x_0) \subseteq D_f$). Ha létezik a

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

határérték és véges, akkor ezen határértéket nevezzük a függvény x_0 pontbeli differenciáltjának vagy differenciálhányadosának. Jele: $f'(x_0)$.

A formális definíció

Definíció

Legyen az f függvény értelmezve az x_0 pont egy környezetében (azaz létezzen $r > 0$, melyre $K_r(x_0) \subseteq D_f$). Ha létezik a

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

határérték és véges, akkor ezen határértéket nevezzük a függvény x_0 pontbeli differenciáltjának vagy differenciálhányadosának. Jele: $f'(x_0)$.

Itt a limesz belsejében lévő kifejezés nem más, mint a húrok meredeksége. Ha h-t egyre kisebbre veszem, akkor jellemzeni tudom, hogy viselkedik a függvény x_0 közelében.

A formális definíció

Definíció

Legyen az f függvény értelmezve az x_0 pont egy környezetében (azaz létezzen $r > 0$, melyre $K_r(x_0) \subseteq D_f$). Ha létezik a

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

határérték és véges, akkor ezen határértéket nevezzük a függvény x_0 pontbeli differenciáltjának vagy differenciálhányadosának. Jele: $f'(x_0)$.

Itt a limesz belsejében lévő kifejezés nem más, mint a húrok meredeksége. Ha h-t egyre kisebbre veszem, akkor jellemzeni tudom, hogy viselkedik a függvény x_0 közelében.

Ha létezik a húrok meredekségének határértéke az lesz az érintőegyenes meredeksége.

A formális definíció

Definíció

Legyen az f függvény értelmezve az x_0 pont egy környezetében. Ha létezik a

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

határérték és véges, akkor ezen határértéket nevezzük a függvény x_0 pontbeli differenciáltjának vagy differenciálhányadosának. Jele: $f'(x_0)$.

A formális definíció

Definíció

Legyen az f függvény értelmezve az x_0 pont egy környezetében. Ha létezik a

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

határérték és véges, akkor ezen határértéket nevezzük a függvény x_0 pontbeli differenciáltjának vagy differenciálhányadosának. Jele: $f'(x_0)$.

Ekvivalens definíció:

A formális definíció

Definíció

Legyen az f függvény értelmezve az x_0 pont egy környezetében. Ha létezik a

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

határérték és véges, akkor ezen határértéket nevezzük a függvény x_0 pontbeli differenciáltjának vagy differenciálhányadosának. Jele: $f'(x_0)$.

Ekvivalens definíció:

Definíció

Legyen az f függvény értelmezve az x_0 pont egy környezetében. Ha létezik a

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

határérték és véges, akkor ezen határértéket nevezzük a függvény x_0 pontbeli differenciáltjának vagy differenciálhányadosának. Jele: $f'(x_0)$.

Példa

Mennyi az $f(x) = x^2$ függvény differenciáltja az $x_0 = 3$ pontban?

Példa

Mennyi az $f(x) = x^2$ függvény differenciáltja az $x_0 = 3$ pontban?

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(3+h)^2 - 3^2}{h} =$$

Példa

Mennyi az $f(x) = x^2$ függvény differenciáltja az $x_0 = 3$ pontban?

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(3 + h)^2 - 3^2}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{9 + 6h + h^2 - 9}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{6h + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (6 + h) = 6$$

Példa

Mennyi az $f(x) = x^2$ függvény differenciáltja az $x_0 = 3$ pontban?

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(3+h)^2 - 3^2}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{9 + 6h + h^2 - 9}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{6h + h^2}{h} = \lim_{h\to 0} (6+h) = 6$$

Tehát az x^2 függvény differenciáltja (érintőjének meredeksége) a 3 pontban 6. Az $x_0 = 4$ pontban:

Példa

Mennyi az $f(x) = x^2$ függvény differenciáltja az $x_0 = 3$ pontban?

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(3+h)^2 - 3^2}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{9 + 6h + h^2 - 9}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{6h + h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(6+h) = 6$$

Tehát az x^2 függvény differenciáltja (érintőjének meredeksége) a 3 pontban 6. Az $x_0 = 4$ pontban:

$$\lim_{h\to 0} \frac{(4+h)^2 - 4^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{8h + h^2}{h} = 8$$

Érintőegyenes

Ha ismerjük az érintő egyenes meredekségét és tudunk egy pontot ami rajta fekszik (jelen esetben $(x_0, f(x_0))$), akkor fel tudjuk írni az érintő egyenes egyenletét.

Érintőegyenes

Ha ismerjük az érintő egyenes meredekségét és tudunk egy pontot ami rajta fekszik (jelen esetben $(x_0, f(x_0))$), akkor fel tudjuk írni az érintő egyenes egyenletét.

Induljunk ki abból, hogy az m meredekségű, (x_0, y_0) ponton áthaladó egyenes egyenlete

$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

Az érintő egyenesnél $m = f'(x_0)$ és $y_0 = f(x_0)$ tehát az $(x_0, f(x_0))$ pontbeli érintő egyenes egyenlete:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Példa

Ezek alapján a x^2 függvényhez az $x_0 = 3$ pont felett húzott érintő egyenes:

$$y_{\text{érintő}} = 6(x-3)+9 = 6x-9.$$

Ugyanakkor az $x_0 = 4$ pont felett:

$$y_{\text{érintő}} = 8\,(x-4)+16 = 8x-16.$$

Jó lenne olyan függvény ami minden pontban megadja a differenciálhányadost!

A deriváltfüggvény

Ha egy $f(x)$ függvény egy I intervallum minden pontjában differenciálható akkor azt mondjuk hogy $f(x)$ differenciálható I-n.

A deriváltfüggvény

Ha egy $f(x)$ függvény egy I intervallum minden pontjában differenciálható akkor azt mondjuk hogy $f(x)$ differenciálható I-n.

Az $f'(x)$ deriváltfüggvény az a függvény ami minden x ponthoz megadja az $f(x)$ függvény x-beli differenciálhányadosát:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

A deriváltfüggvény

Ha egy $f(x)$ függvény egy I intervallum minden pontjában differenciálható akkor azt mondjuk hogy $f(x)$ differenciálható I-n.

Az $f'(x)$ deriváltfüggvény az a függvény ami minden x ponthoz megadja az $f(x)$ függvény x-beli differenciálhányadosát:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Mivel a nevező tart a 0-hoz, látható, hogy a határérték csak akkor létezik és véges, ha számláló is tart 0-hoz, vagyis a függvény folytonos.

A deriváltfüggvény

Ha egy $f(x)$ függvény egy I intervallum minden pontjában differenciálható akkor azt mondjuk hogy $f(x)$ differenciálható I-n.

Az $f'(x)$ deriváltfüggvény az a függvény ami minden x ponthoz megadja az $f(x)$ függvény x-beli differenciálhányadosát:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Mivel a nevező tart a 0-hoz, látható, hogy a határérték csak akkor létezik és véges, ha számláló is tart 0-hoz, vagyis a függvény folytonos.

Így a folytonosság a deriválhatóság szükséges feltétele.

A deriváltfüggvény

Ha egy $f(x)$ függvény egy I intervallum minden pontjában differenciálható akkor azt mondjuk hogy $f(x)$ differenciálható I-n.

Az $f'(x)$ deriváltfüggvény az a függvény ami minden x ponthoz megadja az $f(x)$ függvény x-beli differenciálhányadosát:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Mivel a nevező tart a 0-hoz, látható, hogy a határérték csak akkor létezik és véges, ha számláló is tart 0-hoz, vagyis a függvény folytonos.

Így a folytonosság a deriválhatóság szükséges feltétele.

Azon függvények terét, amiknek deriváltja folytonos a H-halmazon $C^1(H)$-val jelöljük.

Nevezetes deriváltak - Szinusz függvény

Állítás: $\sin'(x) = \cos(x)$, ugyanis

Nevezetes deriváltak - Szinusz függvény

Állítás: $\sin'(x) = \cos(x)$, ugyanis

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x)\cos(h) + \sin(h)\cos(x) - \sin(x)}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \left(\sin(x) \frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(x) \frac{\sin(h)}{h} \right) =$$

Nevezetes deriváltak - Szinusz függvény

Állítás: $\sin'(x) = \cos(x)$, ugyanis

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)\cos(h)+\sin(h)\cos(x)-\sin(x)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \left(\sin(x)\frac{\cos(h)-1}{h} + \cos(x)\frac{\sin(h)}{h} \right) =$$

mivel

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos(h)-1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(h)-1}{h}\frac{\cos(h)+1}{\cos(h)+1} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{-\sin^2(h)}{h(\cos(h)+1)} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} \cdot \frac{-\sin(h)}{\cos(h)+1} = 0$$

Nevezetes deriváltak - Szinusz függvény

Állítás: $\sin'(x) = \cos(x)$, ugyanis

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x)\cos(h)+\sin(h)\cos(x)-\sin(x)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\left(\sin(x)\frac{\cos(h)-1}{h}+\cos(x)\frac{\sin(h)}{h}\right) = \cos(x),$$

mivel

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h}\frac{\cos(h)+1}{\cos(h)+1} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{-\sin^2(h)}{h(\cos(h)+1)} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h}\cdot\frac{-\sin(h)}{\cos(h)+1} = 0$$

Nevezetes deriváltak - Szinusz függvény

Állítás: $\sin'(x) = \cos(x)$, ugyanis

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)\cos(h) + \sin(h)\cos(x) - \sin(x)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \left(\sin(x)\frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(x)\frac{\sin(h)}{h} \right) = \cos(x),$$

mivel

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} \frac{\cos(h) + 1}{\cos(h) + 1} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{-\sin^2(h)}{h(\cos(h) + 1)} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} \cdot \frac{-\sin(h)}{\cos(h) + 1} = 0$$

Állítás: $\cos'(x) = -\sin(x)$, hasonló számolással.

Nevezetes deriváltak - Logaritmus függvény

Állítás: $\log_a'(x) = \frac{\log_a(e)}{x} = \frac{1}{x\ln(a)}$, spec. $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ ugyanis

Nevezetes deriváltak - Logaritmus függvény

Állítás: $\log_a'(x) = \frac{\log_a(e)}{x} = \frac{1}{x \ln(a)}$, spec. $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ ugyanis

$$\lim_{h \to 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \log_a \left(\frac{x+h}{x} \right) =$$

Nevezetes deriváltak - Logaritmus függvény

Állítás: $\log_a'(x) = \frac{\log_a(e)}{x} = \frac{1}{x\ln(a)}$, spec. $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ ugyanis

$$\lim_{h\to 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \log_a \left(\frac{x+h}{x}\right) =$$

$$= \lim_{h\to 0} \log_a \left[\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}\right] = (*) = \log_a \left[\lim_{h\to 0} \left(1 + h\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{h}}\right] = (**)$$

(*) a folytonosság miatt,

Nevezetes deriváltak - Logaritmus függvény

Állítás: $\log_a'(x) = \frac{\log_a(e)}{x} = \frac{1}{x\ln(a)}$, spec. $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ ugyanis

$$\lim_{h\to 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \log_a\left(\frac{x+h}{x}\right) =$$

$$= \lim_{h\to 0} \log_a\left[\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}\right] = (*) = \log_a\left[\lim_{h\to 0}\left(1+h\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{h}}\right] = (**)$$

$$= \log_a\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\frac{1}{x}}{n}\right)^{n}\right] = \log_a\left[e^{\frac{1}{x}}\right] = \frac{1}{x}\log_a(e) = \frac{1}{x\ln(a)}$$

(*) a folytonosság miatt, (**) ismert, hogy a határérték létezik és az átviteli elv miatt minden sorozatnak ugyanoda kell tartania, így vegyük a $h_n = \frac{1}{n} \to 0$ sorozatot.

Nevezetes deriváltak - Logaritmus függvény

Állítás: $\log_a'(x) = \frac{\log_a(e)}{x} = \frac{1}{x\ln(a)}$, spec. $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ ugyanis

$$\lim_{h\to 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \log_a\left(\frac{x+h}{x}\right) =$$

$$= \lim_{h\to 0} \log_a\left[\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}\right] = (*) = \log_a\left[\lim_{h\to 0}\left(1+h\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{h}}\right] = (**)$$

$$= \log_a\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\frac{1}{x}}{n}\right)^{n}\right] = \log_a\left[e^{\frac{1}{x}}\right] = \frac{1}{x}\log_a(e) = \frac{1}{x\ln(a)}$$

(*) a folytonosság miatt, (**) ismert, hogy a határérték létezik és az átviteli elv miatt minden sorozatnak ugyanoda kell tartania, így vegyük a $h_n = \frac{1}{n} \to 0$ sorozatot.

Ezért szeretjük a természetes alapú logaritmust.

Nevezetes deriváltak - x^n

Állítás: Legyen $n \in \mathbb{N}$ tetszőleges, ekkor $(x^n)' = nx^{n-1}$, ugyanis

Nevezetes deriváltak - x^n

Állítás: Legyen $n \in \mathbb{N}$ tetszőleges, ekkor $(x^n)' = nx^{n-1}$, ugyanis

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} h^i\right) - x^n}{h} =$$

Nevezetes deriváltak - x^n

Állítás: Legyen $n \in \mathbb{N}$ tetszőleges, ekkor $(x^n)' = nx^{n-1}$, ugyanis

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} h^i\right) - x^n}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left(x^n h^0 + nx^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + x^0 h^n\right) - x^n}{h} = nx^{n-1}$$

Nevezetes deriváltak - x^n

Állítás: Legyen $n \in \mathbb{N}$ tetszőleges, ekkor $(x^n)' = nx^{n-1}$, ugyanis

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} h^i\right) - x^n}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left(x^n h^0 + nx^{n-1} h + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \cdots + x^0 h^n\right) - x^n}{h} = nx^{n-1}$$

Tehát Pl: $x' = 1$, $(x^2)' = 2x$, $(x^3)' = 3x^2$.

Nevezetes deriváltak - x^n

Állítás: Legyen $n \in \mathbb{N}$ tetszőleges, ekkor $(x^n)' = nx^{n-1}$, ugyanis

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} h^i\right) - x^n}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left(x^n h^0 + nx^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + x^0 h^n\right) - x^n}{h} = nx^{n-1}$$

Tehát Pl: $x' = 1$, $(x^2)' = 2x$, $(x^3)' = 3x^2$.

Felhasználtuk a Binomiális tételt: $(x+h)^n = \sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} h^i$.

Nevezetes deriváltak - x^{-n}

Állítás: Legyen $n \in \mathbb{N}$ tetszőleges, ekkor $(x^{-n})' = -nx^{-n-1}$, ugyanis

Nevezetes deriváltak - x^{-n}

Állítás: Legyen $n \in \mathbb{N}$ tetszőleges, ekkor $(x^{-n})' = -nx^{-n-1}$, ugyanis

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^{-n} - x^{-n}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1}{(x+h)^n} - \dfrac{1}{x^n}}{h} =$$

Nevezetes deriváltak - x^{-n}

Állítás: Legyen $n \in \mathbb{N}$ tetszőleges, ekkor $(x^{-n})' = -nx^{-n-1}$, ugyanis

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^{-n} - x^{-n}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{(x+h)^n} - \frac{1}{x^n}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{x^n-(x+h)^n}{(x+h)^n x^n}}{h} = \lim_{h\to 0} -\frac{(x+h)^n - x^n}{h} \frac{1}{(x+h)^n x^n} =$$

$$= -nx^{n-1} \frac{1}{x^n x^n} = -nx^{-n-1}$$

Nevezetes deriváltak - x^{-n}

Állítás: Legyen $n \in \mathbb{N}$ tetszőleges, ekkor $(x^{-n})' = -nx^{-n-1}$, ugyanis

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^{-n} - x^{-n}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{(x+h)^n} - \frac{1}{x^n}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{x^n-(x+h)^n}{(x+h)^n x^n}}{h} = \lim_{h\to 0} -\frac{(x+h)^n - x^n}{h} \frac{1}{(x+h)^n x^n} =$$

$$= -nx^{n-1} \frac{1}{x^n x^n} = -nx^{-n-1}$$

Tehát Pl: $\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -x^{-2}$, $(x^{-5})' = -5x^{-6}$.

Deriválási szabályok: lineáris kombináció

Ezeknél a szabályoknál feltesszük hogy $f(x)$, $g(x)$ a szóbanforgó x pontban differenciálható.

- Összegfüggvény: $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$, ugyanis

Deriválási szabályok: lineáris kombináció

Ezeknél a szabályoknál feltesszük hogy $f(x)$, $g(x)$ a szóbanforgó x pontban differenciálható.

- Összegfüggvény: $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$, ugyanis

$$\lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h)+g(x+h))-(f(x)+g(x))}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)+g(x+h)-g(x)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

Deriválási szabályok: lineáris kombináció

Ezeknél a szabályoknál feltesszük hogy $f(x)$, $g(x)$ a szóbanforgó x pontban differenciálható.

- Összegfüggvény: $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$, ugyanis

$$\lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h) + g(x+h)) - (f(x) + g(x))}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x) + g(x+h) - g(x)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

- Ha $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges, akkor $(cf(x))' = cf'(x)$, ugyanis

Deriválási szabályok: lineáris kombináció

Ezeknél a szabályoknál feltesszük hogy $f(x)$, $g(x)$ a szóbanforgó x pontban differenciálható.

- Összegfüggvény: $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$, ugyanis

$$\lim_{h\to 0}\frac{(f(x+h)+g(x+h))-(f(x)+g(x))}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)+g(x+h)-g(x)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

- Ha $c\in\mathbb{R}$ tetszőleges, akkor $(cf(x))' = cf'(x)$, ugyanis

$$\lim_{h\to 0}\frac{cf(x+h)-cf(x)}{h} = c\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Deriválási szabályok: lineáris kombináció

Ezeknél a szabályoknál feltesszük hogy $f(x)$, $g(x)$ a szóbanforgó x pontban differenciálható.

- Összegfüggvény: $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$, ugyanis

$$\lim_{h\to 0}\frac{(f(x+h)+g(x+h))-(f(x)+g(x))}{h} =$$
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)+g(x+h)-g(x)}{h} =$$
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

- Ha $c\in\mathbb{R}$ tetszőleges, akkor $(cf(x))' = cf'(x)$, ugyanis

$$\lim_{h\to 0}\frac{cf(x+h)-cf(x)}{h} = c\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

- Emiatt $(f(x)-g(x))' = f'(x)-g'(x)$.

Deriválási szabályok: szorzatfüggvény

- Szorzatfüggvény: $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$, ugyanis

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} =$$

Deriválási szabályok: szorzatfüggvény

- Szorzatfüggvény: $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$, ugyanis

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} =$$

Deriválási szabályok: szorzatfüggvény

- Szorzatfüggvény: $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$, ugyanis

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{(f(x+h) - f(x))g(x+h)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{f(x)(g(x+h) - g(x))}{h} =$$

Deriválási szabályok: szorzatfüggvény

- Szorzatfüggvény: $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$, ugyanis

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h) - f(x))g(x+h)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{f(x)(g(x+h) - g(x))}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} g(x+h) \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} f(x)\frac{g(x+h) - g(x)}{h} =$$

$$f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Deriválási szabályok: reciprok függvény

- Reciprok függvény: $\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = \frac{-g'(x)}{g^2(x)}$, ha $g(x) \neq 0$.

Deriválási szabályok: reciprok függvény

- Reciprok függvény: $\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = \frac{-g'(x)}{g^2(x)}$, ha $g(x) \neq 0$.

  Hiszen:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h} == \lim_{h \to 0} \frac{\frac{g(x)-g(x+h)}{g(x+h)g(x)}}{h} =$$

.

Deriválási szabályok: reciprok függvény

- Reciprok függvény: $\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = \frac{-g'(x)}{g^2(x)}$, ha $g(x) \neq 0$.

  Hiszen:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h} == \lim_{h\to 0} \frac{\frac{g(x)-g(x+h)}{g(x+h)g(x)}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} -\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \frac{1}{g(x+h)g(x)} = -g'(x)\frac{1}{g^2(x)}.$$

Deriválási szabályok: hányados és kompozíció függvény

- Hányados függvény: $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$, ha $g(x) \neq 0$.

Deriválási szabályok: hányados és kompozíció függvény

- Hányados függvény: $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$, ha $g(x) \neq 0$.

  Hiszen:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \left(f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}\right)' = f'(x)\frac{1}{g(x)} - f(x)\frac{g'(x)}{g^2(x)} =$$

$$\frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Deriválási szabályok: hányados és kompozíció függvény

- Hányados függvény: $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$, ha $g(x) \neq 0$.

  Hiszen:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \left(f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}\right)' = f'(x)\frac{1}{g(x)} - f(x)\frac{g'(x)}{g^2(x)} =$$

$$\frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

- Összetett függvény: $(f(g(x))' = f'(g(x))g'(x)$, feltéve, hogy g differenciálható x-ben és f differenciálható $g(x)$-ben.

Deriválási szabályok: inverz függvény

Legyen f differenciálható a-ban és $f'(a) \neq 0$, tegyük fel hogy létezik f^{-1} és differenciálható $x = f(a)$-ben, ekkor

- az inverz függvény deriváltja: $(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$, ugyanis $f(f^{-1}(x)) = x$ miatt

Deriválási szabályok: inverz függvény

Legyen f differenciálható a-ban és $f'(a) \neq 0$, tegyük fel hogy létezik f^{-1} és differenciálható $x = f(a)$-ben, ekkor

- az inverz függvény deriváltja: $(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$, ugyanis $f(f^{-1}(x)) = x$ miatt

$$(f(f^{-1}(x)))' = x' = 1.$$

Deriválási szabályok: inverz függvény

Legyen f differenciálható a-ban és $f'(a) \neq 0$, tegyük fel hogy létezik f^{-1} és differenciálható $x = f(a)$-ben, ekkor

- az inverz függvény deriváltja: $(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$, ugyanis

$f(f^{-1}(x)) = x$ miatt

$$(f(f^{-1}(x)))' = x' = 1.$$

Ugyanakkor az összetett függvény deriválási szabálya miatt:

$$(f(f^{-1}(x)))' = f'(f^{-1}(x))(f^{-1}(x))' = 1.$$

Deriválási szabályok: inverz függvény

Legyen f differenciálható a-ban és $f'(a) \neq 0$, tegyük fel hogy létezik f^{-1} és differenciálható $x = f(a)$-ben, ekkor

- az inverz függvény deriváltja: $(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$, ugyanis $f(f^{-1}(x)) = x$ miatt

$$(f(f^{-1}(x)))' = x' = 1.$$

Ugyanakkor az összetett függvény deriválási szabálya miatt:

$$(f(f^{-1}(x)))' = f'(f^{-1}(x))(f^{-1}(x))' = 1.$$

Amiből átrendezve:

$$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Nevezetes deriváltak - Hatványfüggvény

- Így:

$$(x^{\frac{1}{k}})' = \frac{1}{(y^k)'\big|_{y=x^{\frac{1}{k}}}} = \frac{1}{k(x^{\frac{1}{k}})^{k-1}} = \frac{1}{k}\frac{1}{x^{\frac{k-1}{k}}} = \frac{1}{k}x^{\frac{1}{k}-1}.$$

- Az összetett függvény deriválási szabályából:

$$(x^{\frac{k}{n}})' = ((x^{\frac{1}{n}})^k)' = k(x^{\frac{1}{n}})^{k-1}\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{k}{n}x^{\frac{k}{n}-1}.$$

- Határértéket véve, minden $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Nevezetes deriváltak - Exponenciális függvény

- Legyen $a \in \mathbb{R}^+$ Ekkor: $(a^x)' = a^x \ln(a)$

Nevezetes deriváltak - Exponenciális függvény

- Legyen $a \in \mathbb{R}^+$ Ekkor: $(a^x)' = a^x \ln(a)$

  Felhasználva, hogy a^x a $\log_a(x)$ inverze:

$$(a^x)' = \frac{1}{(\log_a(y))'|_{y=a^x}} = \frac{1}{(\frac{1}{y\ln(a)})|_{y=a^x}} = \frac{1}{\frac{1}{a^x\ln(a)}} = a^x\ln(a).$$

Nevezetes deriváltak - Exponenciális függvény

- Legyen $a \in \mathbb{R}^+$ Ekkor: $(a^x)' = a^x \ln(a)$

  Felhasználva, hogy a^x a $\log_a(x)$ inverze:

$$(a^x)' = \frac{1}{(\log_a(y))'|_{y=a^x}} = \frac{1}{(\frac{1}{y\ln(a)})|_{y=a^x}} = \frac{1}{\frac{1}{a^x \ln(a)}} = a^x \ln(a).$$

- Fontos speciális eset: $(e^x)' = e^x$.

Példák

- Példa: Számítsuk ki $\tan(x)$ deriváltját!

Példák

- Példa: Számítsuk ki $\tan(x)$ deriváltját!

$$\tan'(x) = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{\cos^2(x)} =$$

$$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$

Példák

- Példa: Számítsuk ki $\tan(x)$ deriváltját!

$$\tan'(x) = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$

- Példa: Számítsuk ki $\mathrm{ctg}(x)$ deriváltját!

Példák

- Példa: Számítsuk ki $\tan(x)$ deriváltját!

$$\tan'(x) = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{\cos^2(x)} =$$

$$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$

- Példa: Számítsuk ki $\operatorname{ctg}(x)$ deriváltját!

$$\operatorname{ctg}'(x) = \left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\right)' = \frac{-\sin(x)\sin(x) - \cos(x)\cos(x)}{\sin^2(x)} =$$

$$\frac{-1}{\sin^2(x)} = -1 - \operatorname{ctg}^2(x)$$

Példák

- Példa: Számítsuk ki $\sinh(x)$ deriváltját!

Példák

- Példa: Számítsuk ki $\sinh(x)$ deriváltját!

$$\sinh'(x) = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - (-e^{-x})}{2} =$$

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x)$$

Példák

- Példa: Számítsuk ki $\sinh(x)$ deriváltját!

$$\sinh'(x) = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - (-e^{-x})}{2} =$$

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x)$$

- Példa: Számítsuk ki $\cosh(x)$ deriváltját!

Példák

- Példa: Számítsuk ki $\sinh(x)$ deriváltját!

$$\sinh'(x) = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - (-e^{-x})}{2} =$$

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x)$$

- Példa: Számítsuk ki $\cosh(x)$ deriváltját!

$$\cosh'(x) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + (-e^{-x})}{2} =$$

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh(x)$$

Példák

- Példa: Számítsuk ki $\tanh(x)$ deriváltját!

Példák

- Példa: Számítsuk ki $\tanh(x)$ deriváltját!

$$\tanh'(x) = \left(\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}\right)' = \frac{\cosh(x)\cosh(x) - \sinh(x)\sinh(x)}{\cosh^2(x)} =$$

$$\frac{1}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x)$$

Példák

- Példa: Számítsuk ki $\tanh(x)$ deriváltját!

$$\tanh'(x) = \left(\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}\right)' = \frac{\cosh(x)\cosh(x) - \sinh(x)\sinh(x)}{\cosh^2(x)} =$$

$$\frac{1}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x)$$

- Példa: Számítsuk ki $\coth(x)$ deriváltját!

Példák

- Példa: Számítsuk ki $\tanh(x)$ deriváltját!

$$\tanh'(x) = \left(\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}\right)' = \frac{\cosh(x)\cosh(x) - \sinh(x)\sinh(x)}{\cosh^2(x)} =$$

$$\frac{1}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x)$$

- Példa: Számítsuk ki $\coth(x)$ deriváltját!

$$\coth'(x) = \left(\frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}\right)' = \frac{\sinh(x)\sinh(x) - \cosh(x)\cosh(x)}{\sin^2(x)} =$$

$$\frac{-1}{\sinh^2(x)} = 1 - \coth^2(x)$$

Példák az inverz szabályra

Példa: Számítsuk ki $\arctan(x)$ deriváltját!

Példák az inverz szabályra

Példa: Számítsuk ki $\arctan(x)$ deriváltját!

$$\arctan'(x) = \frac{1}{(\tan(y))'|_{y=\arctan(x)}} = \frac{1}{(1+\tan^2(y))|_{y=\arctan(x)}} =$$
$$= \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2}$$

Példák az inverz szabályra

Példa: Számítsuk ki $\arctan(x)$ deriváltját!

$$\arctan'(x) = \frac{1}{(\tan(y))'|_{y=\arctan(x)}} = \frac{1}{(1+\tan^2(y))|_{y=\arctan(x)}} =$$
$$= \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2}$$

Példa: Számítsuk ki $\arcsin(x)$ deriváltját!

Példák az inverz szabályra

Példa: Számítsuk ki $\arctan(x)$ deriváltját!

$$\arctan'(x) = \frac{1}{(\tan(y))'|_{y=\arctan(x)}} = \frac{1}{(1+\tan^2(y))|_{y=\arctan(x)}} =$$
$$= \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2}$$

Példa: Számítsuk ki $\arcsin(x)$ deriváltját!

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{(\sin(y))'|_{y=\arcsin(x)}} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Példák az inverz szabályra

Példa: Számítsuk ki $\arctan(x)$ deriváltját!

$$\arctan'(x) = \frac{1}{(\tan(y))'|_{y=\arctan(x)}} = \frac{1}{(1+\tan^2(y))|_{y=\arctan(x)}} =$$

$$= \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2}$$

Példa: Számítsuk ki $\arcsin(x)$ deriváltját!

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{(\sin(y))'|_{y=\arcsin(x)}} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Hasonlóképpen:

$$\arccos'(x) = \frac{1}{-\sin(\arccos(x))} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Példák az inverz szabályra

Példa: Számítsuk ki $\operatorname{artanh}(x)$ deriváltját!

Példák az inverz szabályra

Példa: Számítsuk ki artanh(x) deriváltját!

$$\operatorname{artanh}'(x) = \frac{1}{1 - \tanh^2(\operatorname{artanh}(x))} = \frac{1}{1 - x^2}$$

Példák az inverz szabályra

Példa: Számítsuk ki $\operatorname{artanh}(x)$ deriváltját!

$$\operatorname{artanh}'(x) = \frac{1}{1-\tanh^2(\operatorname{artanh}(x))} = \frac{1}{1-x^2}$$

Példa: Számítsuk ki $\operatorname{arsinh}(x)$ deriváltját!

Példák az inverz szabályra

Példa: Számítsuk ki $\operatorname{artanh}(x)$ deriváltját!

$$\operatorname{artanh}'(x) = \frac{1}{1 - \tanh^2(\operatorname{artanh}(x))} = \frac{1}{1 - x^2}$$

Példa: Számítsuk ki $\operatorname{arsinh}(x)$ deriváltját!

$$\operatorname{arsinh}'(x) = \frac{1}{\cosh(\operatorname{arsinh}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

Példák az inverz szabályra

Példa: Számítsuk ki artanh(x) deriváltját!

$$\operatorname{artanh}'(x) = \frac{1}{1 - \tanh^2(\operatorname{artanh}(x))} = \frac{1}{1 - x^2}$$

Példa: Számítsuk ki arsinh(x) deriváltját!

$$\operatorname{arsinh}'(x) = \frac{1}{\cosh(\operatorname{arsinh}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

Hasonlóképpen:

$$\operatorname{arcosh}'(x) = \frac{1}{\sinh(\operatorname{arcosh}(x))} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

Példák az inverz szabályra

Példa: Számítsuk ki $\operatorname{artanh}(x)$ deriváltját!

$$\operatorname{artanh}'(x) = \frac{1}{1 - \tanh^2(\operatorname{artanh}(x))} = \frac{1}{1 - x^2}$$

Példa: Számítsuk ki $\operatorname{arsinh}(x)$ deriváltját!

$$\operatorname{arsinh}'(x) = \frac{1}{\cosh(\operatorname{arsinh}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

Hasonlóképpen:

$$\operatorname{arcosh}'(x) = \frac{1}{\sinh(\operatorname{arcosh}(x))} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

Itt azért érdemes elgondolkodni a derivált értelmezési tartományán. Mi történik, ha $|x| = 1$?

Példa a deriválási szabályok együttes alkalmazására

Határozzuk meg a $\dfrac{\sin^2(3x^3)}{\sqrt{6x-2}}$ függvény deriváltját!

$$\left(\frac{\sin^2(3x^3)}{\sqrt{6x-2}}\right)' =$$

$$\frac{2\sin(3x^3)\cos(3x^3)9x^2\sqrt{6x-2} - \sin^2(3x^3)\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{6x-2}}6}{6x-2}$$

Érdekes példa

Számítsuk ki $f(x) = x^x$ deriváltját!

Érdekes példa

Számítsuk ki $f(x) = x^x$ deriváltját!

$x^x = e^{\ln(x^x)} = e^{x \ln x}$ miatt alkalmazhatjuk az összetett függvény deriválási szabályát

Érdekes példa

Számítsuk ki $f(x) = x^x$ deriváltját!

$x^x = e^{\ln(x^x)} = e^{x \ln x}$ miatt alkalmazhatjuk az összetett függvény deriválási szabályát

$$(x^x)' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x} \cdot (x \ln x)' = x^x \cdot (x \ln x)' =$$
$$= x^x \cdot (x \cdot \frac{1}{x} + \ln x) = x^x \cdot (1 + \ln x)$$