

Differenciálszámítás alkalmazásai I

Függvényvizsgálat

Nagy Noémi

Folytonosság differenciálható függvényekre

Definíció: Legyen az f függvény értelmezve az x_0 pont egy környezetében. Ha létezik a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

határérték és véges, akkor ezen határértéket nevezzük az f függvény x_0 pontbeli deriváltjának.

Folytonosság differenciálható függvényekre

Definíció: Legyen az f függvény értelmezve az x_0 pont egy környezetében. Ha létezik a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

határérték és véges, akkor ezen határértéket nevezzük az f függvény x_0 pontbeli deriváltjának.

Tétel

Ha egy függvény differenciálható x_0 -ban, akkor ott folytonos is.

($\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) \rightarrow f(x_0)$).

Folytonosság differenciálható függvényekre

Definíció: Legyen az f függvény értelmezve az x_0 pont egy környezetében. Ha létezik a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

határérték és véges, akkor ezen határértéket nevezzük az f függvény x_0 pontbeli deriváltjának.

Tétel

Ha egy függvény differenciálható x_0 -ban, akkor ott folytonos is.

($\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) \rightarrow f(x_0)$).

Ennek a tételnek a másik irányát is sokszor használjuk: Ha f nem folytonos x_0 -ban, akkor ott nem deriválható.

Lokális szélsőérték és deriváltja

Definíció

Legyen $K_\delta(x_0) \subset D_f$, azaz legyen f értelmezve x_0 egy környezetében. Az f függvénynek lokális szélsőértéke van az x_0 pontban, ha létezik olyan környezete, melyben $f(x_0)$ a maximális vagy a minimális függvényérték.

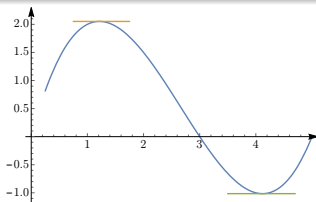
Lokális szélsőérték és deriváltja

Definíció

Legyen $K_\delta(x_0) \subset D_f$, azaz legyen f értelmezve x_0 egy környezetében. Az f függvénynek lokális szélsőértéke van az x_0 pontban, ha létezik olyan környezete, melyben $f(x_0)$ a maximális vagy a minimális függvényérték.

Tétel

Legyen $K_\delta(x_0) \subset D_f$. Ha f differenciálható x_0 -ban és ott lokális szélsőértéke van, akkor ott a deriváltja 0.

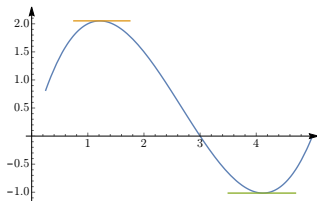


Előző tétel bizonyítása

Bizonyítás:

Tegyük, fel hogy lokális maximumról van szó, ekkor:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \overbrace{\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right)}^{\geq 0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \overbrace{\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right)}^{\leq 0}$$

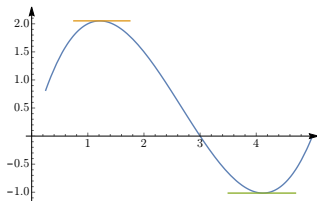


Előző tétel bizonyítása

Bizonyítás:

Tegyük, fel hogy lokális maximumról van szó, ekkor:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \overbrace{\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right)}^{\geq 0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \overbrace{\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right)}^{\leq 0} = 0,$$



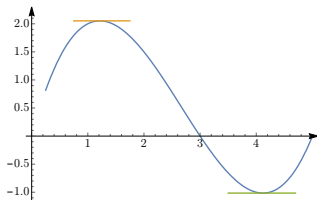
Előző tétel bizonyítása

Bizonyítás:

Tegyük, fel hogy lokális maximumról van szó, ekkor:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \overbrace{\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right)}^{\geq 0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \overbrace{\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right)}^{\leq 0} = 0,$$

lokális minimumra a bizonyítás hasonló. ■



Rolle tétele

Tétel (Rolle)

Ha f folytonos $[a, b]$ -n és differenciálható (a, b) -n és $f(a) = f(b)$, akkor

$$\exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$$

Rolle tétele

Tétel (Rolle)

Ha f folytonos $[a, b]$ -n és differenciálható (a, b) -n és $f(a) = f(b)$, akkor

$$\exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$$

Bizonyítás.

Weierstrass tétele értelmében f -nek van abszolút minimuma és maximuma. Ha mindkettőt a végpontokban veszi fel, akkor $f(a) = f(b)$ miatt $f(x) \equiv \text{konst.}$ és így $\exists c \in (a, b)$ -re $f'(c) = 0$. Ha valamelyiket az intervallum belsejében veszi fel, akkor ott az előző tétel értelmében $f'(c) = 0$ (c a szélsőérték hely). ■

Lagrange-féle középérték tétel

Tétel (Lagrange)

Ha f folytonos $[a, b]$ -n és differenciálható (a, b) -n, akkor $\exists c \in (a, b)$:

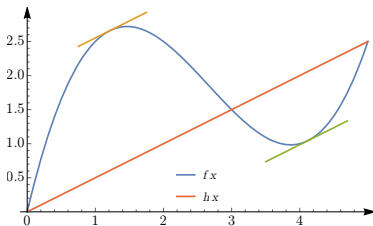
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Lagrange-féle középérték tétel

Tétel (Lagrange)

Ha f folytonos $[a, b]$ -n és differenciálható (a, b) -n, akkor $\exists c \in (a, b)$:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Lagrange-féle középérték tétel

Tétel (Lagrange)

Ha f folytonos $[a, b]$ -n és differenciálható (a, b) -n, akkor $\exists c \in (a, b)$:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Bizonyítás.

$$h(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

$$g(x) = f(x) - h(x), \quad g(a) = g(b)$$

$$\Rightarrow \text{Rolle T.} \Rightarrow \exists c : g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

Lagrange-féle középérték tétel következményei

Következmény

Ha f folytonos $[a, b]$ -n és differenciálható (a, b) -n, és ott $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b)$, akkor:

$$f(x) \equiv C \quad \forall x \in [a, b]$$

Lagrange-féle középérték tétel következményei

Következmény

Ha f folytonos $[a, b]$ -n és differenciálható (a, b) -n, és ott $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b)$, akkor:

$$f(x) \equiv C \quad \forall x \in [a, b]$$

Bizonyítás.

$\forall [x_1, x_2] \subset [a, b] - re \Rightarrow$ Lagrange KéT. $\Rightarrow \exists c :$

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

De mivel $f'(c) = 0 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

Lagrange-féle középérték tétel következményei

Következmény

Ha f folytonos $[a, b]$ -n és differenciálható (a, b) -n, és ott $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b)$, akkor:

$$f(x) \equiv C \quad \forall x \in [a, b]$$

Következmény (Integrálszámítás I. főtétele)

Ha f, g folytonos $[a, b]$ -n és differenciálható (a, b) -n, és ott

$$f'(x) = g'(x) \quad \forall x \in (a, b)$$

$$\text{akkor } \exists C \quad f(x) \equiv g(x) + C \quad \forall x \in [a, b]$$

Lagrange-féle középérték tétel következményei

Következmény

Ha f folytonos $[a, b]$ -n és differenciálható (a, b) -n, és ott $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b)$, akkor:

$$f(x) \equiv C \quad \forall x \in [a, b]$$

Következmény (Integrálszámítás I. főtétele)

Ha f, g folytonos $[a, b]$ -n és differenciálható (a, b) -n, és ott

$$f'(x) = g'(x) \quad \forall x \in (a, b)$$

$$\text{akkor } \exists C \quad f(x) \equiv g(x) + C \quad \forall x \in [a, b]$$

Bizonyítás.

Az előző tételt kell használni $f(x) - g(x)$ -re

Cauchy féle középérték tétel

Tétel (Cauchy)

Ha f és g folytonos $[a, b]$ -n és differenciálható (a, b) -n, és $g'(x) \neq 0$ ha $x \in (a, b)$, akkor $\exists c \in (a, b)$:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Cauchy féle középérték tétel

Tétel (Cauchy)

Ha f és g folytonos $[a, b]$ -n és differenciálható (a, b) -n, és $g'(x) \neq 0$ ha $x \in (a, b)$, akkor $\exists c \in (a, b)$:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Bizonyítás.

Hasonlóan az előzőekhez segédfüggvény bevezetésével Rolle tételét felhasználva. Megjegyzés: ha $g(a) = g(b)$ lenne, akkor Rolle tétele miatt $g'(x) = 0$ lenne valamely $x \in (a, b)$ -re. ■

L'Hospital szabály

Tétel (L'Hospital)

Legyen f és g differenciálható x_0 egy környezetében és $g' \neq 0$ az x_0 egy kipontozott környezetében. Legyen $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ vagy $\frac{\infty}{\infty}$ alakú és tegyük

fel, hogy létezik $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Ekkor $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ is létezik és

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

L'Hospital szabály

Tétel (L'Hospital)

Legyen f és g differenciálható x_0 egy környezetében és $g' \neq 0$ az x_0 egy kipontozott környezetében. Legyen $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ vagy $\frac{\infty}{\infty}$ alakú és tegyük

fel, hogy létezik $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Ekkor $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ is létezik és

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Megjegyzés: itt x_0 lehet valós szám, az x_0+ , x_0- , $+\infty$ vagy $-\infty$ szimbólumok valamelyike.

Bizonyítás: A Cauchy-féle középértéktételt alkalmazva.

Példa 1

Példa 1: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x^2)}{e^x - 1} = ?$

Mivel ha $x = 0$ -t helyettesítünk mind a számláló mind a nevező 0-hoz tart, így teljesül a L'Hospital-szabály feltétele, azaz:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x^2)}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{1 + x^4} = 0$$

Példa 2

Példa 2: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} = ?$

Mivel a végtelenben a számláló és a nevező is $+\infty$ -hez tart, így alkalmazható a L'Hospital-szabály, azaz

Példa 2

Példa 2: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} = ?$

Mivel a végtelenben a számláló és a nevező is $+\infty$ -hez tart, így alkalmazható a L'Hospital-szabály, azaz

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x}$$

Példa 2

Példa 2: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} = ?$

Mivel a végtelenben a számláló és a nevező is $+\infty$ -hez tart, így alkalmazható a L'Hospital-szabály, azaz

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x}$$

Ez még mindig $\frac{+\infty}{+\infty}$ alakú, így még egyszer alkalmazhatjuk a szabályt:

Példa 2

Példa 2: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} = ?$

Mivel a végtelenben a számláló és a nevező is $+\infty$ -hez tart, így alkalmazható a L'Hospital-szabály, azaz

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x}$$

Ez még mindig $\frac{+\infty}{+\infty}$ alakú, így még egyszer alkalmazhatjuk a szabályt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

Monotonitás

Emlékeztető: Azt mondjuk, hogy az $f(x)$ függvény valamely I intervallumon monoton nő, ha bármely $x_1 < x_2$, ahol $x_1, x_2 \in I$ -re teljesül, hogy $f(x_1) \leq f(x_2)$. Ha a \leq helyett $f(x_1) < f(x_2)$ is igaz, akkor szigorúan monoton nő a függvény.

Monotonitás

Emlékeztető: Azt mondjuk, hogy az $f(x)$ függvény valamely I intervallumon monoton nő, ha bármely $x_1 < x_2$, ahol $x_1, x_2 \in I$ -re teljesül, hogy $f(x_1) \leq f(x_2)$. Ha a \leq helyett $f(x_1) < f(x_2)$ is igaz, akkor szigorúan monoton nő a függvény.

Tétel

Ha az f differenciálható és $f'(x) \geq 0$ I -n $\Leftrightarrow f$ monoton nő I -n.

Monotonitás

Emlékeztető: Azt mondjuk, hogy az $f(x)$ függvény valamely I intervallumon monoton nő, ha bármely $x_1 < x_2$, ahol $x_1, x_2 \in I$ -re teljesül, hogy $f(x_1) \leq f(x_2)$. Ha a \leq helyett $f(x_1) < f(x_2)$ is igaz, akkor szigorúan monoton nő a függvény.

Tétel

Ha az f differenciálható és $f'(x) \geq 0$ I -n $\Leftrightarrow f$ monoton nő I -n.

Bizonyítás.

$$\text{Lagrange KéT.-ből } \forall x_1, x_2 : \exists c \in (x_1, x_2) \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) \geq 0$$

$$f \text{ monoton nő} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\substack{\neq \\ =}} \geq 0 \quad \blacksquare$$

Monotonitás

Emlékeztető: Azt mondjuk, hogy az $f(x)$ függvény valamely I intervallumon monoton nő, ha bármely $x_1 < x_2$, ahol $x_1, x_2 \in I$ -re teljesül, hogy $f(x_1) \leq f(x_2)$. Ha a \leq helyett $f(x_1) < f(x_2)$ is igaz, akkor szigorúan monoton nő a függvény.

Tétel

Ha az f differenciálható és $f'(x) > 0$ I -n $\Rightarrow f$ szig. mon. nő I -n.

Monotonitás

Emlékeztető: Azt mondjuk, hogy az $f(x)$ függvény valamely I intervallumon monoton nő, ha bármely $x_1 < x_2$, ahol $x_1, x_2 \in I$ -re teljesül, hogy $f(x_1) \leq f(x_2)$. Ha a \leq helyett $f(x_1) < f(x_2)$ is igaz, akkor szigorúan monoton nő a függvény.

Tétel

Ha az f differenciálható és $f'(x) > 0$ I -n $\Rightarrow f$ szig. mon. nő I -n.

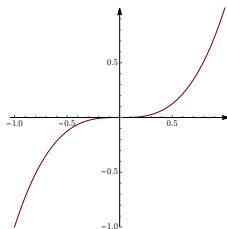
Bizonyítás.

$$\text{Lagrange KéT.-ből } \forall x_1, x_2 : \exists c \in (x_1, x_2) \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) > 0 \quad \blacksquare$$

$$\text{DE: } f \text{ szig. mon. nő} \not\Rightarrow f' > 0$$

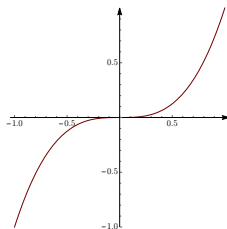
Monotonitás II

Példa: Az x^3 függvény szigorú monoton nő. Ugyanakkor $(x^3)' = 3x^2$ az $x = 0$ pontban nem pozitív.



Monotonitás II

Példa: Az x^3 függvény szigorú monoton nő. Ugyanakkor $(x^3)' = 3x^2$ az $x = 0$ pontban nem pozitív.



Nyilván monoton csökkenésre hasonló igaz:

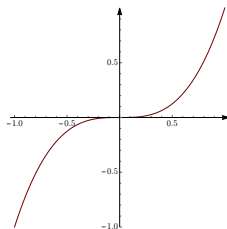
Tétel

Ha az f deriválható és $f'(x) \leq 0$ I -n, $\Leftrightarrow f$ monoton csökken I -n.

Ha az f deriválható és $f'(x) < 0$ I -n $\Rightarrow f$ szig. mon. csökk. I -n.

Monotonitás II

Példa: Az x^3 függvény szigorú monoton nő. Ugyanakkor $(x^3)' = 3x^2$ az $x = 0$ pontban nem pozitív.



Nyilván monoton csökkenésre hasonló igaz:

Tétel

Ha az f deriválható és $f'(x) \leq 0$ $I-n$, $\Leftrightarrow f$ monoton csökken $I-n$.

Ha az f deriválható és $f'(x) < 0$ $I-n \Rightarrow f$ szig. mon. csökk. $I-n$.

Bizonyítás az utóbbival analóg módon.

Lokális szélsőérték

Korábbi tétel szerint, lokális szélsőértéknél a derivált nulla. Láttuk viszont, hogy visszafelé ez nem feltétlenül igaz. A szélsőérték létezéséről szól a következő tétel:

Lokális szélsőérték

Korábbi tétel szerint, lokális szélsőértéknél a derivált nulla. Láttuk viszont, hogy visszafelé ez nem feltétlenül igaz. A szélsőérték létezéséről szól a következő tétel:

Tétel

Ha f differenciálható az I intervallumon, $f'(x_0) = 0$ és deriváltja előjelet vált x_0 -ban, akkor ott lokális szélsőértékhelye van. Méghozzá:

Ha pozitívból negatívba \Rightarrow lokális maximuma van.

Ha negatívból pozitívba \Rightarrow lokális minimuma van.

Megjegyzés: Tehát $f'(x_0) = 0$ szükséges feltétele annak, hogy x_0 szélsőérték, de nem elégséges. Példa: $f(x) = x^3$.

Lokális szélsőérték

Korábbi tétel szerint, lokális szélsőértéknél a derivált nulla. Láttuk viszont, hogy visszafelé ez nem feltétlenül igaz. A szélsőérték létezéséről szól a következő tétel:

Tétel

Ha f differenciálható az I intervallumon, $f'(x_0) = 0$ és deriváltja előjelet vált x_0 -ban, akkor ott lokális szélsőértékhelye van. Méghozzá:

Ha pozitívból negatívba \Rightarrow lokális maximuma van.

Ha negatívból pozitívba \Rightarrow lokális minimuma van.

Megjegyzés: Tehát $f'(x_0) = 0$ szükséges feltétele annak, hogy x_0 szélsőérték, de nem elégséges. Példa: $f(x) = x^3$.

Bizonyítás.

Ha f x_0 -ban pozitívból negatívba vált akkor az addig monoton növből csökkenőbe váltott, tehát x_0 lokális maximum. Ha f x_0 -ban negatívból pozitívba vált, akkor az addig monoton csökkenőből növőbe váltott, tehát x_0 lokális minimum. ■

Példa

Adjuk meg azon legbővebb intervallumokat, ahol az
 $f(x) = (x - 1)^4(x + 2)^6$ függvény monoton! Hol van lokális szélsőértéke?

Példa

Adjuk meg azon legbővebb intervallumokat, ahol az
 $f(x) = (x - 1)^4(x + 2)^6$ függvény monoton! Hol van lokális szélsőértéke?

$$f'(x) = 4(x - 1)^3(x + 2)^6 + (x - 1)^4 6(x + 2)^5 =$$

$$(x - 1)^3(x + 2)^5(4x + 8 + 6x - 6) = (x - 1)^3(x + 2)^5 10(x + \frac{1}{5})$$

Példa

Adjuk meg azon legbővebb intervallumokat, ahol az $f(x) = (x - 1)^4(x + 2)^6$ függvény monoton! Hol van lokális szélsőértéke?

$$f'(x) = 4(x - 1)^3(x + 2)^6 + (x - 1)^4 6(x + 2)^5 =$$

$$(x - 1)^3(x + 2)^5(4x + 8 + 6x - 6) = (x - 1)^3(x + 2)^5 10\left(x + \frac{1}{5}\right)$$

Látható, hogy $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ vagy $x = -2$ vagy $x = -\frac{1}{5}$. Emellett $f'(x) > 0$, ha $x \in \left(-2, -\frac{1}{5}\right)$ vagy $(1, +\infty)$, ezen intervallumokon $f(x)$ szigorú monoton nő.

Példa

Adjuk meg azon legbővebb intervallumokat, ahol az $f(x) = (x - 1)^4(x + 2)^6$ függvény monoton! Hol van lokális szélsőértéke?

$$f'(x) = 4(x - 1)^3(x + 2)^6 + (x - 1)^4 6(x + 2)^5 =$$

$$(x - 1)^3(x + 2)^5(4x + 8 + 6x - 6) = (x - 1)^3(x + 2)^5 10(x + \frac{1}{5})$$

Látható, hogy $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ vagy $x = -2$ vagy $x = -\frac{1}{5}$. Emellett $f'(x) > 0$, ha $x \in \left(-2, -\frac{1}{5}\right)$ vagy $(1, +\infty)$, ezen intervallumokon $f(x)$ szigorú monoton nő.

$f'(x) < 0$, ha $(-\infty, -2)$ vagy $\left(-\frac{1}{5}, 1\right)$, ezen intervallumokon $f(x)$ szigorú monoton csökken.

Példa - folytatás

Mivel $x = -2$ -ben és $x = 1$ -ben a derivált negatívból pozitívba vált, ezekben a pontokban lokális minimum van.

Példa - folytatás

Mivel $x = -2$ -ben és $x = 1$ -ben a derivált negatívból pozitívba vált, ezekben a pontokban lokális minimum van.

$x = -\frac{1}{5}$ -ben a derivált pozitívból negatívba vált, itt lokális maximum van.

Példa - folytatás

Mivel $x = -2$ -ben és $x = 1$ -ben a derivált negatívból pozitívba vált, ezekben a pontokban lokális minimum van.

$x = -\frac{1}{5}$ -ben a derivált pozitívból negatívba vált, itt lokális maximum van.

Ennyi információ még kevés, hogy lerajzoljuk a függvényt. Még két dolgot nem tudunk:

Példa - folytatás

Mivel $x = -2$ -ben és $x = 1$ -ben a derivált negatívból pozitívba vált, ezekben a pontokban lokális minimum van.

$x = -\frac{1}{5}$ -ben a derivált pozitívból negatívba vált, itt lokális maximum van.

Ennyi információ még kevés, hogy lerajzoljuk a függvényt. Még két dolgot nem tudunk:

- 1 Merre "görbül" két pont között. Ennek vizsgálatához bevezetjük a konvexitás/konkavitás fogalmát.

Példa - folytatás

Mivel $x = -2$ -ben és $x = 1$ -ben a derivált negatívból pozitívba vált, ezekben a pontokban lokális minimum van.

$x = -\frac{1}{5}$ -ben a derivált pozitívból negatívba vált, itt lokális maximum van.

Ennyi információ még kevés, hogy lerajzoljuk a függvényt. Még két dolgot nem tudunk:

- 1 Merre "görbül" két pont között. Ennek vizsgálatához bevezetjük a konvexitás/konkavitás fogalmát.
- 2 Hogyan viselkedik a függvény nagy x -re, van-e határértéke nagy x -re, vagy „nekisimul”-e egy egyenesnek a végtelenben?

Konvexitás

Definíció

Azt mondjuk, hogy az $f(x)$ függvény **konvex** egy I intervallumon, ha bármely két pontban megrajzolva a húrtát a függvény görbéje a húr alatt halad. Ha mindig felette halad, akkor **konkávnak** nevezzük a függvényt. Formálisan, f **konvex** I -n, ha:

$$\forall c \in [0,1] : f(ca + (1 - c)b) \leq cf(a) + (1 - c)f(b) \quad \forall a, b \in I.$$

Formálisan, f **konkáv** I -n, ha:

$$\forall c \in [0,1] : f(ca + (1 - c)b) \geq cf(a) + (1 - c)f(b) \quad \forall a, b \in I$$

Konvexitás, inflexiós pont

Definíció

Azon pontot ahol a folytonos függvény konvexből konkávba vagy konkávból konvexbe vált, inflexiós pontnak nevezzük.

Konvexitás, inflexiós pont

Definíció

Azon pontot ahol a folytonos függvény konvexből konkávba vagy konkávból konvexbe vált, inflexiós pontnak nevezzük.

Tétel

Legyen f differenciálható egy I intervallumon. Ekkor

- f konvex I -n $\Leftrightarrow f'$ monoton nő I -n.*
- f konkáv I -n $\Leftrightarrow f'$ monoton fogy I -n.*

Második derivált függvény

Az f függvény deriváltjának deriváltját második derivátnak nevezzük, és $f''(x)$ -el jelöljük. Ha ez létezik I -n, akkor azt mondjuk, hogy $f(x)$ kétszer differenciálható I -n. Az előzőekből kapjuk a következő tételt:

Második derivált függvény

Az f függvény deriváltjának deriváltját második derivátnak nevezzük, és $f''(x)$ -el jelöljük. Ha ez létezik I -n, akkor azt mondjuk, hogy $f(x)$ kétszer differenciálható I -n. Az előzőekből kapjuk a következő tételt:

Tétel

Legyen f kétszer differenciálható I -n. Ekkor

- $f''(x) \geq 0$ I -n $\Leftrightarrow f$ konvex I -n.
- $f''(x) \leq 0$ I -n $\Leftrightarrow f$ konkáv I -n.
- $f''(x_0) = 0$ és f'' előjelet vált x_0 -ban $\Leftrightarrow f$ -nek az x_0 inflexiós pontja.
- $f'(x_0) = 0$ és $f''(x_0) > 0$, akkor x_0 lokális minimum.
- $f'(x_0) = 0$ és $f''(x_0) < 0$, akkor x_0 lokális maximum.

Megjegyzés: Tehát $f''(x_0) = 0$ szükséges feltétele annak, hogy x_0 inflexiós pont legyen, de nem elégséges. Példa: $f(x) = x^4$.

Egyenes Aszimptoták $\pm\infty$ -ben

Definíció

A $g(x) = Ax + B$ függvény az $f(x)$ lineáris aszimptotája $+\infty$ -ben ($-\infty$ -ben), ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = 0 \quad \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - g(x)) = 0 \right)$$

Egyenes Aszimptoták $\pm\infty$ -ben

Definíció

A $g(x) = Ax + B$ függvény az $f(x)$ lineáris aszimptotája a $+\infty$ -ben ($-\infty$ -ben), ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = 0 \quad \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - g(x)) = 0 \right)$$

Példa: $f(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x}$ -nek lineáris aszimptotája a $g(x) = 2x + 1$ avagy az $y = 2x + 1$ egyenes.

Egyenes Aszimptoták $\pm\infty$ -ben

Definíció

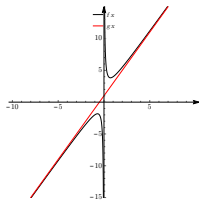
A $g(x) = Ax + B$ függvény az $f(x)$ lineáris aszimptotája a $+\infty$ -ben ($-\infty$ -ben), ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = 0 \quad \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - g(x)) = 0 \right)$$

Példa: $f(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x}$ -nek lineáris aszimptotája a $g(x) = 2x + 1$ avagy az $y = 2x + 1$ egyenes.

Ha létezik aszimptota, akkor

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = A, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - Ax) = B.$$



Teljes függvényvizsgálat lépései

- 1 Határozzuk meg f értelmezési tartományát!
- 2 Ellenőrizzük a paritást és periodicitást!
- 3 Ha lehetséges keressük meg a gyököket!
- 4 Monotonitás: Számítsuk ki az első deriváltat, ennek vizsgálatával megtudjuk hol monoton a függvény, és hol lehetnek lokális szélsőértékei!
- 5 Konvexitás: Számítsuk ki a második deriváltat. Ebből megtudjuk a konvexitást, illetve a lehetséges inflexiós pontokat!
- 6 Határozzunk meg a határértékeket az értelmezési tartomány "határain"!
- 7 Egyenes aszimptoták meghatározása (ha van)!
- 8 Innen már meg tudjuk rajzolni a függvény grafikonját ahonnan megtudjuk az értékkészletet is!

Példa

Végezzünk teljes függvényvizsgálatot az $f(x) = \arctan\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)$ függvényen!

Példa

Végezzünk teljes függvényvizsgálatot az $f(x) = \arctan\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)$ függvényen!

A nevező sosem 0, illetve az arctan a teljes számegyenesen értelmezett, így $D_f = \mathbb{R}$. Páros (akkor y tengelyre szimmetrikus lesz), nem periodikus. Határértéket csak $\pm\infty$ -ben kell számolni:

Példa

Végezzünk teljes függvényvizsgálatot az $f(x) = \arctan\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)$ függvényen!

A nevező sosem 0, illetve az arctan a teljes számegegyenesen értelmezett, így $D_f = \mathbb{R}$. Páros (akkor y tengelyre szimmetrikus lesz), nem periodikus. Határértéket csak $\pm\infty$ -ben kell számolni:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan\left(\frac{1 - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}}\right) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

Példa

Végezzünk teljes függvényvizsgálatot az $f(x) = \arctan\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)$ függvényen!

A nevező sosem 0, illetve az arctan a teljes számegegyenesen értelmezett, így $D_f = \mathbb{R}$. Páros (akkor y tengelyre szimmetrikus lesz), nem periodikus. Határértéket csak $\pm\infty$ -ben kell számolni:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan\left(\frac{1 - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}}\right) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right) = \frac{\pi}{4}$$

Példa

Végezzünk teljes függvényvizsgálatot az $f(x) = \arctan\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)$ függvényen!

A nevező sosem 0, illetve az arctan a teljes számegeyenesen értelmezett, így $D_f = \mathbb{R}$. Páros (akkor y tengelyre szimmetrikus lesz), nem periodikus. Határértéket csak $\pm\infty$ -ben kell számolni:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan\left(\frac{1 - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}}\right) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right) = \frac{\pi}{4}$$

Zérushelye van $x = 1$ -ben és $x = -1$ -ben.

Példa - folytatás

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1 + \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)^2} \frac{2x(x^2 + 1) - (x^2 - 1)2x}{(x^2 + 1)^2} = \\ &= \frac{4x}{(x^2 + 1)^2 + (x^2 - 1)^2} = \frac{2x}{x^4 + 1} \end{aligned}$$

Példa - folytatás

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1 + \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)^2} \frac{2x(x^2 + 1) - (x^2 - 1)2x}{(x^2 + 1)^2} = \\ &= \frac{4x}{(x^2 + 1)^2 + (x^2 - 1)^2} = \frac{2x}{x^4 + 1} \end{aligned}$$

Innen $f'(x) = 0$, pontosan akkor, ha $x = 0$ csak itt lehet szélsőérték.

Példa - folytatás

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1 + \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)^2} \frac{2x(x^2 + 1) - (x^2 - 1)2x}{(x^2 + 1)^2} = \\ &= \frac{4x}{(x^2 + 1)^2 + (x^2 - 1)^2} = \frac{2x}{x^4 + 1} \end{aligned}$$

Innen $f'(x) = 0$, pontosan akkor, ha $x = 0$ csak itt lehet szélsőérték.

$f'(x) < 0$, ha $x < 0$, itt a függvény szigorú monoton csökken, $f'(x) > 0$, ha $x > 0$, itt a függvény szigorú monoton nő.

Példa - folytatás

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1 + \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)^2} \frac{2x(x^2 + 1) - (x^2 - 1)2x}{(x^2 + 1)^2} = \\ &= \frac{4x}{(x^2 + 1)^2 + (x^2 - 1)^2} = \frac{2x}{x^4 + 1} \end{aligned}$$

Innen $f'(x) = 0$, pontosan akkor, ha $x = 0$ csak itt lehet szélsőérték.

$f'(x) < 0$, ha $x < 0$, itt a függvény szigorú monoton csökken, $f'(x) > 0$, ha $x > 0$, itt a függvény szigorú monoton nő.

Így $x = 0$ lokális minimum, mert a derivált előjele negatívból pozitívba vált. Látható, hogy $f(0) = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$.

Példa - folytatás

$$f''(x) = \frac{2(x^4 + 1) - 2x4x^3}{(x^4 + 1)^2} = \frac{-6x^4 + 2}{(x^4 + 1)^2},$$

innen $f''(x) = 0$ ha $x = \pm \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$

Példa - folytatás

$$f''(x) = \frac{2(x^4 + 1) - 2x \cdot 4x^3}{(x^4 + 1)^2} = \frac{-6x^4 + 2}{(x^4 + 1)^2},$$

innen $f''(x) = 0$ ha $x = \pm \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$

$f''(x) \geq 0$ ha $x \in \left[-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right]$, itt a függvény konvex.

Példa - folytatás

$$f''(x) = \frac{2(x^4 + 1) - 2x \cdot 4x^3}{(x^4 + 1)^2} = \frac{-6x^4 + 2}{(x^4 + 1)^2},$$

innen $f''(x) = 0$ ha $x = \pm \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$

$f''(x) \geq 0$ ha $x \in \left[-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right]$, itt a függvény konvex.

$f''(x) \leq 0$ ha $x \in \left[-\infty, -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right] \cup \left[\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, +\infty\right]$ itt a függvény konkáv.

Példa - folytatás

$$f''(x) = \frac{2(x^4 + 1) - 2x4x^3}{(x^4 + 1)^2} = \frac{-6x^4 + 2}{(x^4 + 1)^2},$$

innen $f''(x) = 0$ ha $x = \pm \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$

$f''(x) \geq 0$ ha $x \in \left[-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right]$, itt a függvény konvex.

$f''(x) \leq 0$ ha $x \in \left[-\infty, -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right] \cup \left[\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, +\infty\right]$ itt a függvény konkáv.

Ezek szerint $x = \pm \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ inflexiós pontok.

Példa - folytatás

Az egyenes aszimptotája az $y = \frac{\pi}{4}$, mert

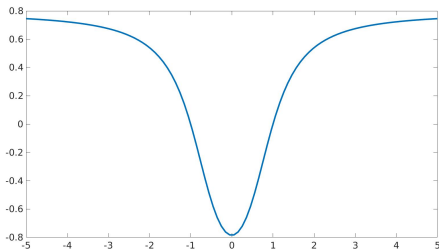
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\arctan\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)}{x} = 0 \text{ és } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - 0 \cdot x) = \frac{\pi}{4}.$$

Példa - folytatás

Az egyenes aszimptotája az $y = \frac{\pi}{4}$, mert

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\arctan\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)}{x} = 0 \text{ és } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - 0 \cdot x) = \frac{\pi}{4}.$$

Próbáljuk meg ábrázolni:

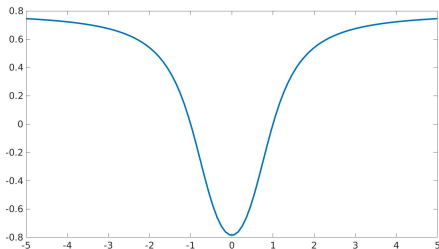


Példa - folytatás

Az egyenes aszimptotája az $y = \frac{\pi}{4}$, mert

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\arctan\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)}{x} = 0 \text{ és } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - 0 \cdot x) = \frac{\pi}{4}.$$

Próbáljuk meg ábrázolni:



Innen az értékkészlet: $\left[f(0), \frac{\pi}{4} \right) = \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right)$.

Házi feladat

Végezzünk teljes függvényvizsgálatot az alábbi függvényen!

$$f(x) = \frac{2x}{(x-1)^2}$$