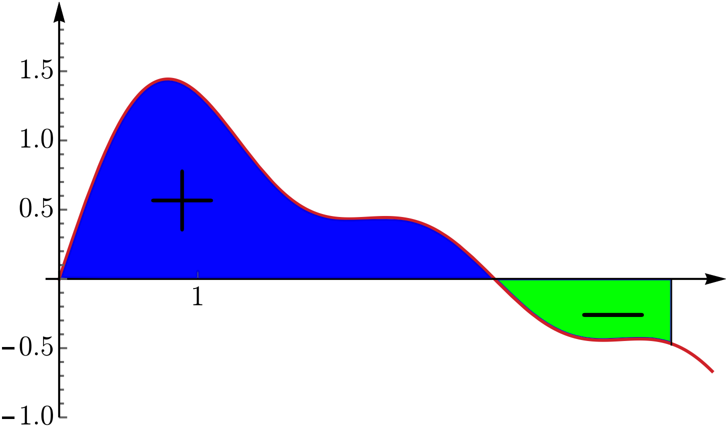
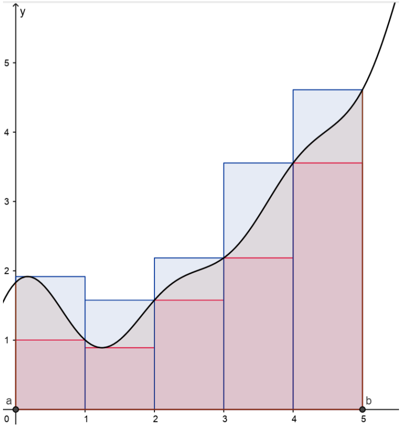
Parciális integrálás, Helyettesítéses integrálás, Racionális törtfüggvények integrálása

Nagy Noémi

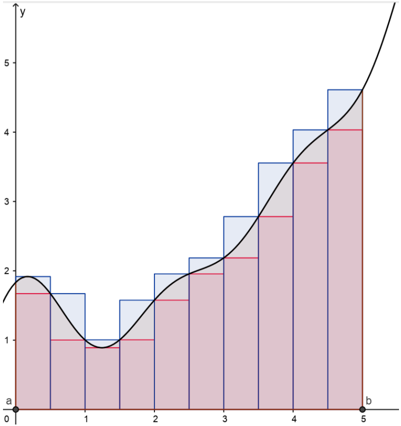
Előjeles terület



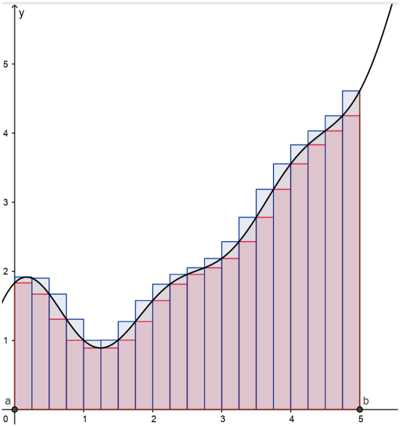
Riemann Integrál



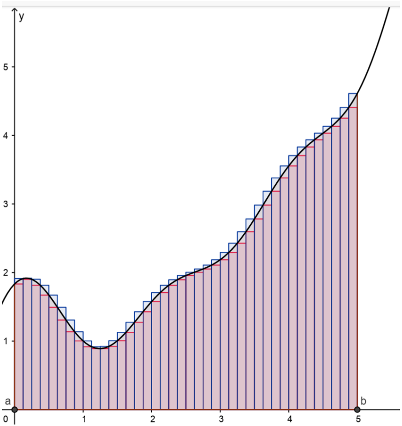
Riemann Integrál



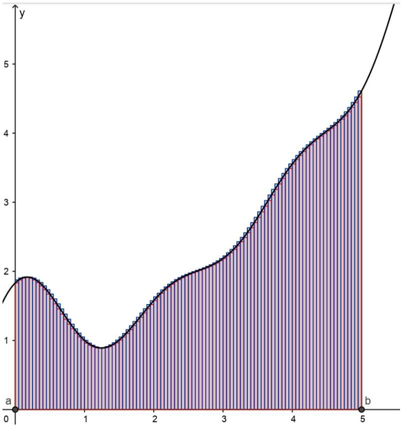
Riemann Integrál



Riemann Integrál



Riemann Integrál



Newton-Leibniz formula

Definíció

Az $f(x)$ függvény primitív függvénye $F(x)$, ha $F'(x) = f(x)$.

Newton-Leibniz formula

Definíció

Az $f(x)$ függvény primitív függvénye $F(x)$, ha $F'(x) = f(x)$.

Tétel (Newton-Leibniz formula)

Legyen $g(x) \in R_{[a,b]}$ és legyen $G(x)$ az $g(x)$ primitív függvénye, ekkor:

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{dx} = G(b) - G(a)$$

Határozatlan integrál definíciója

Ha $F(x)$ primitív függvény akkor $F(x) + C$ is az (ahol C egy tetszőleges konstanst jelöl). Az Integrálszámítás első főtételéből tudjuk, hogy más primitív függvény nincsen.

Határozatlan integrál definíciója

Ha $F(x)$ primitív függvény akkor $F(x) + C$ is az (ahol C egy tetszőleges konstanst jelöl). Az Integrálszámítás első főtételéből tudjuk, hogy más primitív függvény nincsen.

Definíció

Az $f(x)$ határozatlan integrálján az $f(x)$ összes primitív függvényének a halmazát értjük. Jele: $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

Határozatlan integrál definíciója

Ha $F(x)$ primitív függvény akkor $F(x) + C$ is az (ahol C egy tetszőleges konstanst jelöl). Az Integrálszámítás első főtételéből tudjuk, hogy más primitív függvény nincsen.

Definíció

Az $f(x)$ határozatlan integrálján az $f(x)$ összes primitív függvényének a halmazát értjük. Jele: $\int f(x)\,\mathrm{dx}$.

Például:

$$\int x\,\mathrm{dx} = \frac{x^2}{2} + C$$

Határozatlan integrál definíciója

Ha $F(x)$ primitív függvény akkor $F(x) + C$ is az (ahol C egy tetszőleges konstanst jelöl). Az Integrálszámítás első főtételéből tudjuk, hogy más primitív függvény nincsen.

Definíció

Az $f(x)$ határozatlan integrálján az $f(x)$ összes primitív függvényének a halmazát értjük. Jele: $\int f(x)\,\mathrm{dx}$.

Például:

$$\int x \,\mathrm{dx} = \frac{x^2}{2} + C$$

Ezt ellenőrizni úgy lehet, hogy visszaderiváljuk tehát $(\frac{x^2}{2} + C)' = \frac{2x}{2}$

Parciális integrálás

Eddig, néhány összefüggés deriválásából kaptuk az alapintegrálokat. Nem feltétlenül tudtunk viszont olyan integrálokkal mit kezdeni, ahol a függvények szorozva vannak egymással:

$$\int f(x)g(x)\,\mathrm{dx} = ?$$

Parciális integrálás

Eddig, néhány összefüggés deriválásából kaptuk az alapintegrálokat. Nem feltétlenül tudtunk viszont olyan integrálokkal mit kezdeni, ahol a függvények szorozva vannak egymással:

$$\int f(x)g(x)\,\mathrm{dx} = ?$$

Az ilyen esetekben segíthet a parciális integrálás.

Képlete

A parciális integrálás képlete a szorzat függvény deriválási szabályából jön

Képlete

A parciális integrálás képlete a szorzat függvény deriválási szabályából jön

$$(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x)v'(x)$$

Képlete

A parciális integrálás képlete a szorzat függvény deriválási szabályából jön

$$(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x)v'(x)$$

Ezt átrendezve kapjuk, hogy:

$$u'(x) \cdot v(x) = (u(x) \cdot v(x))' - u(x)v'(x)$$

Képlete

A parciális integrálás képlete a szorzat függvény deriválási szabályából jön

$$(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x)v'(x)$$

Ezt átrendezve kapjuk, hogy:

$$u'(x) \cdot v(x) = (u(x) \cdot v(x))' - u(x)v'(x)$$

Mindkét oldalt integrálva, és felhasználva, hogy az integrálás a deriválás inverz művelete, kapjuk:

Képlete

A parciális integrálás képlete a szorzat függvény deriválási szabályából jön

$$(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x)v'(x)$$

Ezt átrendezve kapjuk, hogy:

$$u'(x) \cdot v(x) = (u(x) \cdot v(x))' - u(x)v'(x)$$

Mindkét oldalt integrálva, és felhasználva, hogy az integrálás a deriválás inverz művelete, kapjuk:

$$\boxed{\int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x}$$

Példa

$$\int u'v \, \mathrm{dx} = uv - \int uv' \, \mathrm{dx}$$

$$\int x^2 \cdot \mathrm{e}^{5x} \, \mathrm{dx} =$$

Példa

$$\int u' v \, \mathrm{dx} = uv - \int uv' \, \mathrm{dx}$$

$$\int \underbrace{x^2}_{u'} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{5x}}_{v} \mathrm{dx} =$$

Példa

$$\int u' v \, \mathrm{dx} = uv - \int uv' \, \mathrm{dx}$$

$$\int \underbrace{x^2}_{u'} \cdot \underbrace{e^{5x}}_{v} \mathrm{dx} = \underbrace{\frac{1}{3}x^3}_{u} \cdot \underbrace{e^{5x}}_{v} - \int \underbrace{\frac{1}{3}x^3}_{u} \cdot \underbrace{5\,e^{5x}}_{v'} \mathrm{dx}$$

Példa

$$\int u' v \, \mathrm{dx} = uv - \int uv' \, \mathrm{dx}$$

$$\int \underbrace{x^2}_{v} \cdot \underbrace{e^{5x}}_{u'} \mathrm{dx} =$$

Példa

$$\int u'v\,\mathrm{dx} = uv - \int uv'\,\mathrm{dx}$$

$$\int \underbrace{x^2}_{v} \cdot \underbrace{e^{5x}}_{u'}\,\mathrm{dx} = \underbrace{x^2}_{v} \cdot \underbrace{\frac{1}{5}e^{5x}}_{u} - \int \underbrace{2x}_{v'} \cdot \underbrace{\frac{1}{5}e^{5x}}_{u}\,\mathrm{dx}$$

Példa

$$\int u' v \, \mathrm{dx} = uv - \int uv' \, \mathrm{dx}$$

$$\int x^2 \cdot e^{5x} \, \mathrm{dx} = x^2 \cdot \frac{1}{5} e^{5x} - \frac{2}{5} \int \underbrace{x}_{v} \cdot \underbrace{e^{5x}}_{u'} \mathrm{dx} =$$

Példa

$$\int u' v \, \mathrm{dx} = uv - \int uv' \, \mathrm{dx}$$

$$\int x^2 \cdot e^{5x} \, \mathrm{dx} = x^2 \cdot \frac{1}{5} e^{5x} - \frac{2}{5} \int \underbrace{x}_{v} \cdot \underbrace{e^{5x}}_{u'} \mathrm{dx} =$$

$$= \frac{x^2 e^{5x}}{5} - \frac{2}{5} \left(\frac{x \, e^{5x}}{5} - \frac{1}{5} \int e^{5x} \right) =$$

Példa

$$\int u' v \,\mathrm{dx} = uv - \int uv' \,\mathrm{dx}$$

$$\int x^2 \cdot e^{5x} \,\mathrm{dx} = x^2 \cdot \frac{1}{5} e^{5x} - \frac{2}{5} \int \underbrace{x}_{v} \cdot \underbrace{e^{5x}}_{u'} \,\mathrm{dx} =$$

$$= \frac{x^2 e^{5x}}{5} - \frac{2}{5} \left(\frac{x e^{5x}}{5} - \frac{1}{5} \int e^{5x} \right) = \frac{x^2 e^{5x}}{5} - \frac{2x e^{5x}}{25} + \frac{2 e^{5x}}{125} + C$$

Fajtái

Az alábbi 3 esetet kell felismerni:

Fajtái

Az alábbi 3 esetet kell felismerni:

Az első eset:

$$\int \text{polinom} \cdot \left\{ \begin{matrix} e^{ax} \\ \sin(ax) \\ \cos(ax) \\ \sinh(ax) \\ \cosh(ax) \end{matrix} \right\} dx$$

Fajtái

Az alábbi 3 esetet kell felismerni:

Az első eset:

$$\int \text{polinom} \cdot \left\{ \begin{array}{c} e^{ax} \\ \sin(ax) \\ \cos(ax) \\ \sinh(ax) \\ \cosh(ax) \end{array} \right\} dx$$

Itt mindig a trigonometrikus/exponenciális az $u'(x)$ és a polinom a $v(x)$ (mert azt szeretném deriválni, így egyszerűbb alakra hozni).

Fajtái II

Az második eset:

$$\int \text{polinom} \cdot \left\{ \begin{matrix} \ln(ax) \\ \arcsin(ax) \\ \arccos(ax) \\ \arctan(ax) \\ \text{arcctg}(ax) \\ \text{arsinh}(ax) \\ \vdots \end{matrix} \right\} \text{dx}$$

Fajtái II

Az második eset:

$$\int \text{polinom} \cdot \left\{ \begin{array}{c} \ln(ax) \\ \arcsin(ax) \\ \arccos(ax) \\ \arctan(ax) \\ \mathrm{arcctg}(ax) \\ \mathrm{arsinh}(ax) \\ \vdots \end{array} \right\} \mathrm{dx}$$

Itt mivel csak a polinomnak ismertjük a primitív függvényét, így a polinom lesz az $u'(x)$.

Fajtái II

Az második eset:

$$\int \text{polinom} \cdot \left\{ \begin{array}{c} \ln(ax) \\ \arcsin(ax) \\ \arccos(ax) \\ \arctan(ax) \\ \text{arcctg}(ax) \\ \text{arsinh}(ax) \\ \vdots \end{array} \right\} \mathrm{dx}$$

Itt mivel csak a polinomnak ismertjük a primitív függvényét, így a polinom lesz az $u'(x)$.

Példák $\int \ln(x)\,\mathrm{dx} = ?$, $\int \text{arsinh}(x)\,\mathrm{dx} = ?$, $\int x \arctan(x)\,\mathrm{dx} = ?$

Fajtái III

A harmadik eset:

$$\int \left\{ \begin{array}{c} e^{ax} \\ \sin(ax) \\ \cos(ax) \\ \sinh(ax) \\ \cosh(ax) \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{c} e^{bx} \\ \sin(bx) \\ \cos(bx) \\ \sinh(bx) \\ \cosh(bx) \end{array} \right\} \mathrm{d}x$$

Fajtái III

A harmadik eset:

$$\int \left\{ \begin{array}{c} e^{ax} \\ \sin(ax) \\ \cos(ax) \\ \sinh(ax) \\ \cosh(ax) \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{c} e^{bx} \\ \sin(bx) \\ \cos(bx) \\ \sinh(bx) \\ \cosh(bx) \end{array} \right\} dx$$

Kétszer kell parciálisan integrálni. Példa: $\int e^{3x} \sin(2x)\, dx = ?$

Fajtái III

A harmadik eset:

$$\int \left\{ \begin{array}{c} e^{ax} \\ \sin(ax) \\ \cos(ax) \\ \sinh(ax) \\ \cosh(ax) \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{c} e^{bx} \\ \sin(bx) \\ \cos(bx) \\ \sinh(bx) \\ \cosh(bx) \end{array} \right\} \mathrm{d}x$$

Kétszer kell parciálisan integrálni. Példa: $\int e^{3x} \sin(2x)\, \mathrm{d}x = ?$

Bizonyos párosításokat egyszerűbben is integrálhatunk. (ld. Kónya)

Mik is a racionális törtfüggvények?

A polinomokat az

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

alakú függvényeket, szokták racionális egészfüggvényként is hívni.

Mik is a racionális törtfüggvények?

A polinomokat az

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

alakú függvényeket, szokták racionális egészfüggvényként is hívni.

Emiatt a racionális törtfüggvényeknek a

$$f(x) = \frac{\text{polinom}}{\text{másik polinom}}$$

alakú függvényeket hívjuk.

Mik is a racionális törtfüggvények?

A polinomokat az

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

alakú függvényeket, szokták racionális egészfüggvényként is hívni.

Emiatt a racionális törtfüggvényeknek a

$$f(x) = \frac{\text{polinom}}{\text{másik polinom}}$$

alakú függvényeket hívjuk.

Ha a számlálóban lévő polinom magasabb vagy egyenlő fokszámú mint a nevezőben lévő, akkor azt mondjuk rá, hogy áltört. Ekkor

$$\frac{\text{polinom1}}{\text{másik polinom}} = \text{polinom2} + \frac{\text{polinom3}}{\text{másik polinom}}$$

átalakítás hajtható végre, ahol a végén kapott tört nem áltört.

Az algebra alaptétele

Az Algebra Alaptétele azt mondja ki, hogy minden polinom felbontható első és másodfokú polinomok szorzatára. Tehát

$$\begin{aligned} Q(x) =& a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots a_1 x + a_0 \\ =& a_n \Big((x - x_1)^{\alpha_1} (x - x_2)^{\alpha_2} \dots (x - x_l)^{\alpha_l} \cdot (x^2 + b_1 x + c_1)^{\beta_1} \cdot \\ & \cdot (x^2 + b_2 x + c_2)^{\beta_2} \dots (x^2 + b_k x + c_k)^{\beta_k} \Big) \end{aligned}$$

Az algebra alaptétele

Az Algebra Alaptétele azt mondja ki, hogy minden polinom felbontható első és másodfokú polinomok szorzatára. Tehát

$$\begin{aligned} Q(x) =& a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots a_1 x + a_0 \\ =& a_n \Big((x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2} \dots (x-x_l)^{\alpha_l} \cdot (x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1} \cdot \\ & \cdot (x^2+b_2x+c_2)^{\beta_2} \dots (x^2+b_kx+c_k)^{\beta_k} \Big) \end{aligned}$$

Ahol $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_l + 2(\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_k) = n$

Az algebra alaptétele

Az Algebra Alaptétele azt mondja ki, hogy minden polinom felbontható első és másodfokú polinomok szorzatára. Tehát

$$\begin{aligned} Q(x) = & a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0 \\ = & a_n \Big((x - x_1)^{\alpha_1} (x - x_2)^{\alpha_2} \ldots (x - x_l)^{\alpha_l} \cdot (x^2 + b_1 x + c_1)^{\beta_1} \cdot \\ & \cdot (x^2 + b_2 x + c_2)^{\beta_2} \ldots (x^2 + b_k x + c_k)^{\beta_k} \Big) \end{aligned}$$

Ahol $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_l + 2(\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_k) = n$

Mivel ezen másodfokú polinomoknak nincs valós gyöke, de van két komplex gyöke (amik egymás konjugáltjai), így jön ki az hogy minden n-ed fokú polinomnak n gyöke van. Ezt is szokták az Algebra Alaptételének hívni.

Parciális törtekre bontás

$$Q(x) = a_n \Big((x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2}\dots(x-x_l)^{\alpha_l} \cdot (x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1} \cdot$$
$$\cdot (x^2+b_2x+c_2)^{\beta_2}\dots(x^2+b_kx+c_k)^{\beta_k} \Big)$$

Parciális törtekre bontás

$$Q(x) = a_n \Big((x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2}\dots(x-x_l)^{\alpha_l}\cdot(x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1}\cdot$$
$$\cdot(x^2+b_2x+c_2)^{\beta_2}\dots(x^2+b_kx+c_k)^{\beta_k}\Big)$$

Ha $P(x)$ foka kisebb mint n ($Q(x)$ foka) akkor léteznek olyan $r_{i,j}$, $s_{i,j}$, $t_{i,j}$ állandók melyre:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{r_{1,1}}{(x-x_1)} + \frac{r_{1,2}}{(x-x_1)^2} + \dots + \frac{r_{1,\alpha_1}}{(x-x_1)^{\alpha_1}} + \dots +$$
$$+ \frac{r_{l,1}}{(x-x_l)} + \frac{r_{1,2}}{(x-x_l)^2} + \dots + \frac{r_{1,\alpha_l}}{(x-x_l)^{\alpha_l}} + \frac{s_{1,1}x+t_{1,1}}{x^2-b_1x+c_1} +$$
$$+ \frac{s_{1,2}x+t_{1,2}}{(x^2-b_1x+c_1)^2} + \dots + \frac{s_{1,\beta_1}x+t_{1,\beta_1}}{(x^2-b_1x+c_1)^{\beta_1}} + \dots$$

Parciális törtekre bontás

$$Q(x) = a_n \Big((x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2}\dots(x-x_l)^{\alpha_l}\cdot(x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1}\cdot$$
$$\cdot(x^2+b_2x+c_2)^{\beta_2}\dots(x^2+b_kx+c_k)^{\beta_k}\Big)$$

Ha $P(x)$ foka kisebb mint n ($Q(x)$ foka) akkor léteznek olyan $r_{i,j}$, $s_{i,j}$, $t_{i,j}$ állandók melyre:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{r_{1,1}}{(x-x_1)} + \frac{r_{1,2}}{(x-x_1)^2} + \dots + \frac{r_{1,\alpha_1}}{(x-x_1)^{\alpha_1}} + \dots +$$
$$+ \frac{r_{l,1}}{(x-x_l)} + \frac{r_{1,2}}{(x-x_l)^2} + \dots + \frac{r_{1,\alpha_l}}{(x-x_l)^{\alpha_l}} + \frac{s_{1,1}x+t_{1,1}}{x^2-b_1x+c_1} +$$
$$+ \frac{s_{1,2}x+t_{1,2}}{(x^2-b_1x+c_1)^2} + \dots + \frac{s_{1,\beta_1}x+t_{1,\beta_1}}{(x^2-b_1x+c_1)^{\beta_1}} + \dots$$

A jobboldalon szereplő törteket paricális törteknek nevezzük. Ezeket már tanult módon tudjuk integrálni.

Példa

$$X = \int \frac{2x^4 + 4x^3 - 17x^2 - 2x + 9}{x^2 + 2x - 8}\,\mathrm{dx} = ?$$

Látjuk, hogy áltört: $(2x^4 + 4x^3 - 17x^2 - 2x + 9) : (x^2 + 2x - 8) = 2x^2 - 1$ maradék 1.

Példa

$$X = \int \frac{2x^4 + 4x^3 - 17x^2 - 2x + 9}{x^2 + 2x - 8}\,\mathrm{dx} =?$$

Látjuk, hogy áltört: $(2x^4 + 4x^3 - 17x^2 - 2x + 9) : (x^2 + 2x - 8) = 2x^2 - 1$ maradék 1.

$$X = \int \frac{(x^2 + 2x - 8)(2x^2 - 1)}{(x^2 + 2x - 8)} + \frac{1}{x^2 + 2x - 8}\,\mathrm{dx} =$$

Példa

$$X = \int \frac{2x^4 + 4x^3 - 17x^2 - 2x + 9}{x^2 + 2x - 8} \, \mathrm{dx} = ?$$

Látjuk, hogy áltört: $(2x^4 + 4x^3 - 17x^2 - 2x + 9) : (x^2 + 2x - 8) = 2x^2 - 1$ maradék 1.

$$X = \int \frac{(x^2 + 2x - 8)(2x^2 - 1)}{(x^2 + 2x - 8)} + \frac{1}{x^2 + 2x - 8} \, \mathrm{dx} =$$

$$= \int 2x^2 - 1 + \frac{1}{x^2 + 2x - 8} \, \mathrm{dx} =$$

Példa

$$X = \int \frac{2x^4 + 4x^3 - 17x^2 - 2x + 9}{x^2 + 2x - 8}\,\mathrm{dx} = ?$$

Látjuk, hogy áltört: $(2x^4 + 4x^3 - 17x^2 - 2x + 9) : (x^2 + 2x - 8) = 2x^2 - 1$ maradék 1.

$$X = \int \frac{(x^2 + 2x - 8)(2x^2 - 1)}{(x^2 + 2x - 8)} + \frac{1}{x^2 + 2x - 8}\,\mathrm{dx} =$$

$$= \int 2x^2 - 1 + \frac{1}{x^2 + 2x - 8}\,\mathrm{dx} = \frac{2}{3}x^3 - x + \int \frac{1}{x^2 + 2x - 8}\,\mathrm{dx}$$

Példa folytatása

$$X = \frac{2}{3}x^3 - x + \int \frac{1}{x^2 + 2x - 8} \, \mathrm{dx}$$

Az $x^2 + 2x - 8$ gyöktényezős alakja: $(x+4)(x-2)$

Példa folytatása

$$X = \frac{2}{3}x^3 - x + \int \frac{1}{x^2 + 2x - 8}\,\mathrm{dx}$$

Az $x^2 + 2x - 8$ gyöktényezős alakja: $(x + 4)(x - 2)$

Ekkor az előző tétel miatt:

$$\frac{1}{x^2 + 2x - 8} = \frac{A}{x + 4} + \frac{B}{x - 2}$$

Példa folytatása

$$X = \frac{2}{3}x^3 - x + \int \frac{1}{x^2 + 2x - 8}\,\mathrm{dx}$$

Az $x^2 + 2x - 8$ gyöktényezős alakja: $(x+4)(x-2)$

Ekkor az előző tétel miatt:

$$\frac{1}{x^2 + 2x - 8} = \frac{A}{x+4} + \frac{B}{x-2}$$

Amit beszorozva $x^2 + 2x - 8$-al kapjuk:

$$1 = A(x-2) + B(x+4)$$

Példa folytatása

$$X = \frac{2}{3}x^3 - x + \int \frac{1}{x^2+2x-8}\,\mathrm{dx}$$

Az $x^2 + 2x - 8$ gyöktényezős alakja: $(x+4)(x-2)$

Ekkor az előző tétel miatt:

$$\frac{1}{x^2+2x-8} = \frac{A}{x+4} + \frac{B}{x-2}$$

Amit beszorozva $x^2 + 2x - 8$-al kapjuk:

$$1 = A(x-2) + B(x+4)$$

Ahonnan: $A = -\frac{1}{6}$, $B = \frac{1}{6}$.

Példa folytatása II

Így:

$$\int \frac{1}{x^2+2x-8}\,\mathrm{dx} = \int \frac{1}{6}\frac{1}{x-2} - \frac{1}{6}\frac{1}{x+4}\,\mathrm{dx} = \frac{1}{6}\left(\ln|x-2| - \ln|x+4|\right) + C$$

Példa folytatása II

Így:

$$\int \frac{1}{x^2+2x-8}\,\mathrm{dx} = \int \frac{1}{6}\frac{1}{x-2} - \frac{1}{6}\frac{1}{x+4}\,\mathrm{dx} = \frac{1}{6}\left(\ln\frac{|x-2|}{|x+4|}\right) + C$$

Tehát

$$X = \frac{2}{3}x^3 - x + \int \frac{1}{x^2+2x-8}\,\mathrm{dx} = \frac{2x^3}{3} - x + \frac{1}{6}\ln\frac{|x-2|}{|x+4|} + C$$

Példa folytatása II

Így:

$$\int \frac{1}{x^2+2x-8}\,\mathrm{dx} = \int \frac{1}{6}\frac{1}{x-2} - \frac{1}{6}\frac{1}{x+4}\,\mathrm{dx} = \frac{1}{6}\left(\ln\frac{|x-2|}{|x+4|}\right) + C$$

Tehát

$$X = \frac{2}{3}x^3 - x + \int \frac{1}{x^2+2x-8}\,\mathrm{dx} = \frac{2x^3}{3} - x + \frac{1}{6}\ln\frac{|x-2|}{|x+4|} + C$$

További példa: $\int \frac{x+1}{x^3+x}\,\mathrm{dx} = ?$ (Megoldás Kónyában!)

Helyettesítéses integrál

Tétel

Legyen $f \in C^0[a,b]$, $\varphi \in C^1[\alpha,\beta]$, φ *szigorúan monoton és* $\varphi(t) \in [a,b]$, *ha* $t \in [\alpha,\beta]$. *Ekkor*

$$\int f(x)\,\mathrm{dx}\Big|_{x=\varphi(t)} = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{dt}\,.$$

Azaz

$$\int f(x)\,\mathrm{dx} = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{dt}\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}\,.$$

Ha $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ *akkor*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{dt}\,.$$

Példa:

Számítsuk ki:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = ?$$

Példa:

Számítsuk ki:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{dx} = ?$$

$x = \sin(t) = \varphi(t)$, $\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = \varphi'(t) = \cos(t)$, vagyis $\mathrm{dx} = \cos(t)\,\mathrm{dt}$, és $\varphi(0) = 0$, $\varphi(\frac{\pi}{2}) = 1$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(t)}\cos(t)\,\mathrm{dt} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos(t)|\cos(t)\,\mathrm{dt} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\,\mathrm{dt} =$$

Példa:

Számítsuk ki:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{dx} = ?$$

$x = \sin(t) = \varphi(t)$, $\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = \varphi'(t) = \cos(t)$, vagyis $\mathrm{dx} = \cos(t)\,\mathrm{dt}$, és $\varphi(0) = 0$, $\varphi(\frac{\pi}{2}) = 1$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(t)}\cos(t)\,\mathrm{dt} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos(t)|\cos(t)\,\mathrm{dt} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\,\mathrm{dt} =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2t)+1}{2}\,\mathrm{dt} = \left[\frac{\sin(2t)}{4} + \frac{t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

Példa:

Számítsuk ki:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, \mathrm{dx} = ?$$

$x = \sin(t) = \varphi(t)$, $\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = \varphi'(t) = \cos(t)$, vagyis $\mathrm{dx} = \cos(t)\,\mathrm{dt}$, és $\varphi(0) = 0$, $\varphi(\frac{\pi}{2}) = 1$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(t)}\cos(t)\,\mathrm{dt} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos(t)|\cos(t)\,\mathrm{dt} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\,\mathrm{dt} =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2t)+1}{2}\,\mathrm{dt} = \left[\frac{\sin(2t)}{4} + \frac{t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\sin(\pi)-\sin(0)}{4} + \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

Példa:

Számítsuk ki:

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{dx} = ?$$

Példa:

Számítsuk ki:

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{dx} = ?$$

Legyen $x = \sin(t) = \varphi(t)$, $\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = \varphi'(t) = \cos(t)$, vagyis $\mathrm{dx} = \cos(t)\,\mathrm{dt}$,

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{dx} = \int \sqrt{1-\sin^2(t)}\cos(t)\,\mathrm{dt} = \int |\cos(t)|\cos(t)\,\mathrm{dt} =$$

$$= \int \cos^2(t)\,\mathrm{dt} = \int \frac{\cos(2t)+1}{2}\,\mathrm{dt} = \frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} + C$$

Példa:

Számítsuk ki:

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{dx} = ?$$

Legyen $x = \sin(t) = \varphi(t)$, $\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = \varphi'(t) = \cos(t)$, vagyis $\mathrm{dx} = \cos(t)\,\mathrm{dt}$,

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{dx} = \int \sqrt{1-\sin^2(t)}\cos(t)\,\mathrm{dt} = \int |\cos(t)|\cos(t)\,\mathrm{dt} =$$

$$= \int \cos^2(t)\,\mathrm{dt} = \int \frac{\cos(2t)+1}{2}\,\mathrm{dt} = \frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} + C$$

Tudjuk, hogy $t = \arcsin(x)$

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{dx} = \frac{\arcsin(x)}{2} + \frac{\sin(\arcsin(x))\cos(\arcsin(x))}{2} + C$$

Példa:

Számítsuk ki:

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{dx} = ?$$

Legyen $x = \sin(t) = \varphi(t)$, $\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = \varphi'(t) = \cos(t)$, vagyis $\mathrm{dx} = \cos(t)\,\mathrm{dt}$,

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{dx} = \int \sqrt{1-\sin^2(t)}\cos(t)\,\mathrm{dt} = \int |\cos(t)|\cos(t)\,\mathrm{dt} =$$

$$= \int \cos^2(t)\,\mathrm{dt} = \int \frac{\cos(2t)+1}{2}\,\mathrm{dt} = \frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} + C$$

Tudjuk, hogy $t = \arcsin(x)$

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{dx} = \frac{\arcsin(x)}{2} + \frac{\sin(\arcsin(x))\cos(\arcsin(x))}{2} + C$$

$$= \frac{\arcsin(x)}{2} + \frac{x\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))}}{2} + C$$

Példa:

Számítsuk ki:

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{dx} = ?$$

Legyen $x = \sin(t) = \varphi(t)$, $\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = \varphi'(t) = \cos(t)$, vagyis $\mathrm{dx} = \cos(t)\,\mathrm{dt}$,

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{dx} = \int \sqrt{1-\sin^2(t)}\cos(t)\,\mathrm{dt} = \int |\cos(t)|\cos(t)\,\mathrm{dt} =$$

$$= \int \cos^2(t)\,\mathrm{dt} = \int \frac{\cos(2t)+1}{2}\,\mathrm{dt} = \frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} + C$$

Tudjuk, hogy $t = \arcsin(x)$

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{dx} = \frac{\arcsin(x)}{2} + \frac{\sin(\arcsin(x))\cos(\arcsin(x))}{2} + C$$

$$= \frac{\arcsin(x)}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + C$$

Racionális törtfüggvényre visszavezethető integrálok, $\int R(e^x)\,dx =$

Számítsuk ki:

$$\int \frac{1}{1+e^x}\,dx = ?$$

Racionális törtfüggvényre visszavezethető integrálok, $\int R(e^x)\,dx =$

Számítsuk ki:

$$\int \frac{1}{1+e^x}\,dx = ?$$

Legyen $e^x = t$, $x = \ln(t) = \varphi(t)$, $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t) = \frac{1}{t}$, vagyis $dx = \frac{1}{t}\,dt$

$$\int \frac{1}{1+e^x}\,dx = \int \frac{1}{1+t}\frac{1}{t}\,dt$$

Racionális törtfüggvényre visszavezethető integrálok, $\int R(\mathrm{e}^x)\,\mathrm{dx} =$

Számítsuk ki:

$$\int \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{dx} = ?$$

Legyen $\mathrm{e}^x = t$, $x = \ln(t) = \varphi(t)$, $\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = \varphi'(t) = \frac{1}{t}$, vagyis $\mathrm{dx} = \frac{1}{t}\,\mathrm{dt}$

$$\int \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{dx} = \int \frac{1}{1+t}\frac{1}{t}\,\mathrm{dt}$$

Itt,

$$\frac{1}{1+t}\frac{1}{t} = \frac{A}{1+t} + \frac{B}{t}$$

$$1 = At + B(1+t) \rightarrow t = 0 : B = 1, t = -1 : A = -1$$

Racionális törtfüggvényre visszavezethető integrálok, $\int R(\mathrm{e}^x)\,\mathrm{dx} =$

Számítsuk ki:

$$\int \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{dx} =?$$

Legyen $\mathrm{e}^x = t$, $x = \ln(t) = \varphi(t)$, $\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = \varphi'(t) = \frac{1}{t}$, vagyis $\mathrm{dx} = \frac{1}{t}\,\mathrm{dt}$

$$\int \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{dx} = \int \frac{1}{1+t}\frac{1}{t}\,\mathrm{dt} = \int \frac{-1}{1+t} + \frac{1}{t}\,\mathrm{dt}$$

Itt,

$$\frac{1}{1+t}\frac{1}{t} = \frac{A}{1+t} + \frac{B}{t}$$

$$1 = At + B(1+t) \rightarrow t = 0 : B = 1, t = -1 : A = -1$$

Racionális törtfüggvényre visszavezethető integrálok, $\int R(e^x)\,dx =$

Számítsuk ki:

$$\int \frac{1}{1+e^x}\,dx = ?$$

Legyen $e^x = t$, $x = \ln(t) = \varphi(t)$, $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t) = \frac{1}{t}$, vagyis $dx = \frac{1}{t}\,dt$

$$\int \frac{1}{1+e^x}\,dx = \int \frac{1}{1+t}\frac{1}{t}\,dt = \int \frac{-1}{1+t} + \frac{1}{t}\,dt$$

$$= -\ln|1+t| + \ln|t| + C = -\ln(1+e^x) + x + C$$

Itt,

$$\frac{1}{1+t}\frac{1}{t} = \frac{A}{1+t} + \frac{B}{t}$$

$$1 = At + B(1+t) \rightarrow t = 0 : B = 1, t = -1 : A = -1$$

$\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})\,\mathrm{dx} =$, $\sqrt[n]{ax+b} = t$

Számítsuk ki:

$$\int \frac{x-3}{(x+1)\sqrt{x-2}}\,\mathrm{dx} =?$$

$\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})\,\mathrm{dx} =$, $\sqrt[n]{ax+b} = t$

Számítsuk ki:

$$\int \frac{x-3}{(x+1)\sqrt{x-2}}\,\mathrm{dx} = ?$$

Legyen $\sqrt{x-2} = t$, $x - 2 = t^2$, $\varphi(t) = x = t^2 + 2$, $\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = \varphi'(t) = 2t$, vagyis $2t\,\mathrm{dt} = \mathrm{dx}$

$\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})\,\mathrm{dx} =$, $\sqrt[n]{ax+b} = t$

Számítsuk ki:

$$\int \frac{x-3}{(x+1)\sqrt{x-2}}\,\mathrm{dx} = ?$$

Legyen $\sqrt{x-2} = t$, $x-2 = t^2$, $\varphi(t) = x = t^2+2$, $\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = \varphi'(t) = 2t$, vagyis $2t\,\mathrm{dt} = \mathrm{dx}$

$$\int \frac{x-3}{(x+1)\sqrt{x-2}}\,\mathrm{dx} = \int \frac{t^2-1}{(t^2+3)t} 2t\,\mathrm{dt}$$

$\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})\,\mathrm{dx} =$, $\sqrt[n]{ax+b} = t$

Számítsuk ki:

$$\int \frac{x-3}{(x+1)\sqrt{x-2}}\,\mathrm{dx} = ?$$

Legyen $\sqrt{x-2} = t$, $x - 2 = t^2$, $\varphi(t) = x = t^2 + 2$, $\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = \varphi'(t) = 2t$, vagyis $2t\,\mathrm{dt} = \mathrm{dx}$

$$\int \frac{x-3}{(x+1)\sqrt{x-2}}\,\mathrm{dx} = \int \frac{t^2-1}{(t^2+3)t} 2t\,\mathrm{dt}$$

$$= 2\int \frac{t^2+3-4}{t^2+3}\,\mathrm{dt} = 2\int 1 - \frac{4}{t^2+3}\,\mathrm{dt} = 2\int 1 - \frac{4}{3}\frac{1}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2}\,\mathrm{dt}$$

$\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})\,\mathrm{dx} =$, $\sqrt[n]{ax+b} = t$

Számítsuk ki:

$$\int \frac{x-3}{(x+1)\sqrt{x-2}}\,\mathrm{dx} = ?$$

Legyen $\sqrt{x-2} = t$, $x-2 = t^2$, $\varphi(t) = x = t^2+2$, $\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = \varphi'(t) = 2t$, vagyis $2t\,\mathrm{dt} = \mathrm{dx}$

$$\int \frac{x-3}{(x+1)\sqrt{x-2}}\,\mathrm{dx} = \int \frac{t^2-1}{(t^2+3)t}2t\,\mathrm{dt}$$

$$= 2\int \frac{t^2+3-4}{t^2+3}\,\mathrm{dt} = 2\int 1 - \frac{4}{t^2+3}\,\mathrm{dt} = 2\int 1 - \frac{4}{3}\frac{1}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2}\,\mathrm{dt}$$

$$= 2t - \frac{8}{3}\frac{\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{3}}} + C = 2\sqrt{x-2} - \frac{8}{\sqrt{3}}\arctan\sqrt{\frac{x-2}{3}} + C$$