Kalkulus tizenhatodik feladatsor - megoldások

Határozatlan integrál

1. Számítsa ki az alábbi integrálokat!

   a) $\int 1 + x + x^2 + 4x^3 + 3x^4 \,\mathrm{dx}$

   b) $\int x^{\frac{1}{2}} + \sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{3x^5}} + \frac{x^e}{2} + \frac{1}{\sqrt[\pi]{x}} \,\mathrm{dx}$

   c) $\int \frac{\sqrt{x}\sqrt[3]{x}}{x^2} \,\mathrm{dx}$

   Megoldás:

   A következő integrálási szabályt használjuk:

$$\int x^\alpha \,\mathrm{dx} = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$$

   ($C \in \mathbb{R}$ tetszőleges), emellett $\int(f+g) = \int f + \int g$ és $\int(cf) = c\int f$, ($c \in \mathbb{R}$).

   a) Az integrált tagjaira bontjuk, a konstansszorzókat kiemeljük, a tagokat egyenként hatványalakra hozzuk, majd külön-külön használjuk az első integrálási szabályt.
   $\int 1 + x + x^2 + 4x^3 + 3x^4 \,\mathrm{dx} =$
   $\int 1 \,\mathrm{dx} + \int x \,\mathrm{dx} + \int x^2 \,\mathrm{dx} + 4\int x^3 \,\mathrm{dx} + 3\int x^4 \,\mathrm{dx} =$
   $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + 4\frac{x^4}{4} + 3\frac{x^5}{5} =$
   $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^4 + \frac{3}{5}x^5 + C, C \in \mathbb{R}$

   b) Az előző feladat sémáját követjük.
   $\int x^{\frac{1}{2}} + \sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{3x^5}} + \frac{x^e}{2} + \frac{1}{\sqrt[\pi]{x}} \,\mathrm{dx} =$
   $\int x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{\sqrt[4]{3}}x^{-\frac{4}{5}} + \frac{1}{2}x^e + x^{-\frac{1}{\pi}} \,\mathrm{dx} =$
   $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\frac{5}{1}x^{\frac{1}{5}} + \frac{1}{2e+2}x^{e+1} + \frac{1}{-\frac{1}{\pi}+1}x^{-\frac{1}{\pi}+1} + C, C \in \mathbb{R}$

   c) Itt összeg helyett szorzat szerepel, ezek összevonhatóak egyetlen hatvánnyá.
   $\int \frac{\sqrt{x}\sqrt[3]{x}}{x^2} \,\mathrm{dx} = \int x^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{3}}x^{-2} \,\mathrm{dx} = \int x^{-\frac{7}{6}} \,\mathrm{dx} = -\frac{6}{1}x^{-\frac{1}{6}} + C, C \in \mathbb{R}$

2. Számítsa ki az alábbi integrálokat!

   a) $\int (1+x)^5 \,\mathrm{dx}$

   b) $\int \mathrm{e}^{2x+1} \,\mathrm{dx}$

   c) $\int \sqrt[3]{5x+1} \,\mathrm{dx}$

   d) $\int \cos(3x+2) \,\mathrm{dx}$

   e) $\int \frac{1}{\cos^2(5x+6)} \,\mathrm{dx}$

f) $\int \frac{1}{(4x+1)^2}\,\mathrm{dx}$

g) $\int \frac{1}{4x^2+1}\,\mathrm{dx}$

h) $\int \frac{1}{4x^2+4x+3}\,\mathrm{dx}$

i) $\int \mathrm{e}^{2x+3} + \cos(2x)\,\mathrm{dx}$

j) $\int \frac{1}{\sqrt{4-4x^2}}\,\mathrm{dx}$

Megoldás:

A következő integrálási szabályt használjuk:

$$\int f(ax+b)\,\mathrm{dx} = \frac{1}{a}F(ax+b) + C, C \in \mathbb{R}, \text{ ahol } \int f(x)\,\mathrm{dx} = F(x)$$

b) Kihasználjuk hogy $\int e^x dx = e^x$.
$\int e^{2x+1} dx = \frac{1}{2}e^{2x+1} + C$.

c) Kihasználjuk, hogy $\int x^\alpha\,\mathrm{dx} = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.
$\int \sqrt[3]{5x+1} dx = \int (5x+1)^{\frac{1}{3}}\,dx = \frac{1}{5}\frac{3}{4}(5x+1)^{\frac{4}{3}} = \frac{3}{20}(5x+1)^{\frac{4}{3}} + C$.

e) Kihasználjuk, hogy $\int \frac{1}{\cos^2(x)} = \tan(x)$.
$\int \frac{1}{\cos^2(5x+6)} dx = \frac{1}{5}\tan(5x+6) + C$.

f) Hatványalakra hozunk, és használjuk az erre tanult szabályt.
$\int \frac{1}{(4x+1)^2} dx = \int (4x+1)^{-2}\,dx = \frac{1}{4}(-1)(4x+1)^{-1} = \frac{-1}{16x+4} + C$.

h) Kihasználjuk, hogy $\int \frac{1}{1+x^2} = \arctan(x)$.
A nevezőt átalakítjuk:
$4x^2+4x+3 = 4(x+\frac{1}{2})^2+2 = 2\big(2(x+\frac{1}{2})^2+1\big) = 2\big((\sqrt{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2})^2+1\big) = 2\big((\sqrt{2}x+\frac{1}{\sqrt{2}})^2+1\big)$.
Így $\int \frac{1}{4x^2+4x+3}\,\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{(\sqrt{2}x+\frac{1}{\sqrt{2}})^2+1}\,\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\big(\sqrt{2}x+\frac{1}{\sqrt{2}}\big)+C$.

3. Számítsa ki az alábbi integrálokat!

a) $\int \frac{1}{5x+1}\,\mathrm{dx}$

b) $\int \frac{8x+1}{4x^2+x}\,\mathrm{dx}$

c) $\int \frac{1}{(x^2+1)\arctan(x)}\,\mathrm{dx}$

d) $\int \frac{\sinh(3x+2)}{\cosh(3x+2)}\,\mathrm{dx}$

e) $\int \frac{x\,\mathrm{e}^{x^2}}{1+\mathrm{e}^{x^2}}\,\mathrm{dx}$

Megoldás:

A következő integrálási szabályt használjuk:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C, C \in \mathbb{R}$$

a) Bővítünk 5-tel, hogy a számlálóban a nevező deriváltja szerepeljen.
$\int \frac{1}{5x+1} dx = \frac{1}{5}\int \frac{5}{5x+1}\,\mathrm{dx} = \frac{1}{5}\ln|5x+1| + C$

b) Mivel a számlálóban a nevező deriváltja szerepel semmilyen átalakításra nincs szükség, közvetlenül alkalmazható a szabály.
$\int \frac{8x+1}{4x^2+x}\,\mathrm{dx} = \ln\left|4x^2+x\right| + C$

d) A nevezőre az összetett függvény deriválási szabályát alkalmazva megkapjuk, hogy bővítenünk kell 3-mal, hogy a számlálóban a nevező deriváltja szerepeljen: $(\mathrm{ch}\,(3x+3))' = 3\mathrm{sh}\,(3x+3)$. Majd alkalmazhatjuk a szabályt.
$\int \frac{\mathrm{sh}(3x+3)}{\mathrm{ch}(3x+3)}\,\mathrm{dx} = \frac{1}{3}\int \frac{3\mathrm{sh}(3x+3)}{\mathrm{ch}(3x+3)}\,\mathrm{dx} = \frac{1}{3}\ln\left|\mathrm{ch}\,(3x+3)\right| + C$

4. Számítsa ki az alábbi integrálokat!

a) $\int \sin(x)\cos^5(x)\,\mathrm{dx}$

b) $\int (x+3)\sqrt[5]{x^2+6x+5}\,\mathrm{dx}$

c) $\int \frac{2x}{\sqrt{3x^2+5}}\,\mathrm{dx}$

d) $\int \frac{1}{x\ln^3(x)}\,\mathrm{dx}$

Megoldás:

A következő integrálási szabályt használjuk:

$$\int f'(x)f^{\alpha}(x)dx = \frac{1}{\alpha+1}f^{\alpha+1}(x) + C, C \in \mathbb{R}$$

a) Vegyük észre, hogy (-1)-et kiemelve a szabály közvetlenül alkalmazható, ugyanis $(\cos(x))' = \sin(x)$.
$\int \sin(x)\cos^5(x)\,\mathrm{dx} = -\int -\sin(x)\cos^5(x)dx = -\frac{1}{6}\cos^6(x) + C.$

c) Hatványalakra alakítás után látszik hogy $\frac{1}{3}$ kiemelésével a szabálynak megfelelő formába hozható az integrál, ugyanis $(3x^2+5)' = 6x$.
$\int \frac{2x}{\sqrt{3x^2+5}}\,\mathrm{dx} = \int 2x\left(3x^2+5\right)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{dx} = \frac{1}{3}\int 6x\left(3x^2+5\right)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{dx} =$
$\frac{1}{3}2\left(3x^2+5\right)^{\frac{1}{2}} + C.$

d) Hatványalakra alakítás után a szabály közvetlenül alakalmazható, ugyanis $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$.
$\int \frac{1}{x\ln^3(x)}dx = \int \frac{1}{x}\ln^{-3}(x)dx = -\frac{1}{2}\ln^{-2}(x) + C.$

5. Számítsa ki az alábbi integrálokat!

a) $\int x\,\mathrm{e}^{x^2+1}\,\mathrm{dx}$

b) $\int \frac{x^2+2x}{\cos^2(x^3+3x^2+2)}\,\mathrm{dx}$

c) $\int \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{dx}$

d) $\int \cos(x)\,\mathrm{e}^{\sin(x)}\,\mathrm{dx}$

e) $\int \frac{\mathrm{e}^{4x}}{(1+\mathrm{e}^{4x})^4}\,\mathrm{dx}$

Megoldás:

A következő integrálási szabályt használjuk:

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)\mathrm{dx} = F(\phi(x)) + C, C \in \mathbb{R}, \text{ ahol } \int f(x)\,\mathrm{dx} = F(x)$$

a) $\int x\,\mathrm{e}^{x^2+1}\,\mathrm{dx}$

Ebben a példában egy polinom van exponenciális függvénnyel megszorozva. A kitevő deriváltja:

$$(x^2+1)' = 2x.$$

Észrevehetjük, hogy a polinom ennek $\frac{1}{2}$-szerese. Egyszerű átalakítással az integrál:

$$\frac{1}{2}\int (2x)\cdot e^{x^2+1}\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\int (x^2+1)'\cdot e^{x^2+1}\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\int (\phi(x))'\cdot e^{\phi(x)}\mathrm{dx}.$$

Tehát a belső függvény

$$\phi(x) = x^2+1,$$

a külső függvény pedig

$$f(\phi) = e^{\phi},$$

melynek primitív függvénye

$$F(\phi) = e^{\phi} + C.$$

Így a határozatlan integrál:

$$\int xe^{x^2+1}\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\int (\phi(x))'\cdot f(\phi(x))\mathrm{dx} = \frac{1}{2}F(\phi(x)) = \frac{1}{2}e^{x^2+1} + C.$$

b) $\int \frac{x^2+2x}{\cos^2(x^3+3x^2+2)}\,\mathrm{dx}$

Ennél a példánál is olyan alakú az integrandus, hogy egy polinommal van szorozva egy függvény, melynek argumentumában szintén polinom szerepel. Az argumentumban szereplő polinom deriváltja:

$$(x^3+3x^2+2)' = 3x^2+6x.$$

Ennek megfelelően tudjuk átírni az integrált:

$$\frac{1}{3}\int (3x^2+6x)\cdot\frac{1}{\cos^2(x^3+3x^2+2)}\mathrm{dx} = \frac{1}{3}\int (x^3+3x^2+2)'\cdot\frac{1}{\cos^2(x^3+3x^2+2)}\mathrm{dx},$$

és innen láthatjuk, hogy a belső függvény

$$\phi(x) = x^3+3x^2+2,$$

a külső függvény pedig

$$f(\phi) = \frac{1}{\cos^2\phi},$$

melynek primitív függvénye

$$F(\phi) = \tan(\phi) + C.$$

Így a határozatlan integrál:

$$\int \frac{x^2+2x}{\cos^2(x^3+3x^2+2)}\mathrm{dx} = \frac{1}{3}\tan(x^3+3x^2+2) + C.$$

e) $\int \frac{\mathrm{e}^{4x}}{(1+\mathrm{e}^{4x})^4}\,\mathrm{dx}$

Ezt az integrált szorzatként az alábbi módon írhatjuk:

$$\int e^{4x} \cdot \frac{1}{(1+e^{4x})^4}\mathrm{dx} = \int e^{4x} \cdot (1+e^{4x})^{-4}\mathrm{dx}.$$

Ebben a kifejezésben az exponenciális függvény szerepel úgy is mint egy összetett függvény belső függvénye, és külön szorzótényezőként is. Ez alapján a belső függvény

$$\phi(x) = 1 + e^{4x},$$

deriváltja pedig $(1+e^{4x})' = 4e^{4x}$. Így az integrandus

$$\frac{1}{4}\int 4e^{4x} \cdot (1+e^{4x})^{-4}\mathrm{dx} = \frac{1}{4}\int (1+e^{4x})' \cdot (1+e^{4x})^{-4}\mathrm{dx}.$$

A külső függvény láthatóan

$$f(\phi) = \phi^{-4},$$

melynek primitív függvénye $F(\phi) = \frac{\phi^{-3}}{-3} + C$, ez alapján az integrál

$$\frac{1}{4}F(\phi(x)) = \frac{1}{4}\frac{(1+e^{4x})^{-3}}{-3} + C = -\frac{1}{12(1+e^{4x})^3} + C.$$

6. Határozza meg, hogy milyen típusú az integrál, majd számítsa ki a határozatlan integrált! *(Vegyes feladatok, Mo: Kónya 5.1 fejezet)*

   a) $\int (2x+3)^5\,\mathrm{dx}$
   b) $\int \frac{1}{(2x+3)^5}\,\mathrm{dx}$
   c) $\int \frac{2}{9x+1}\,\mathrm{dx}$
   d) $\int \frac{2}{(9x+1)^2}\,\mathrm{dx}$
   e) $\int \frac{2}{9x^2+1}\,\mathrm{dx}$
   f) $\int \frac{2}{9x^2+3}\,\mathrm{dx}$
   g) $\int \frac{2x}{9x^2+3}\,\mathrm{dx}$
   h) $\int \frac{2x+4}{9x^2+3}\,\mathrm{dx}$
   i) $\int \frac{2}{9x^2+6x+3}\,\mathrm{dx}$
   j) $\int \frac{18x+8}{9x^2+6x+3}\,\mathrm{dx}$

7. * Számítsa ki az alábbi határozatlan integrálokat! *(Kónya 5.1 fejezet)*

   a) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-4x-12}}\,\mathrm{dx}$ (Mo: Kónya 84.o.)
   b) $\int \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x-12}}\,\mathrm{dx}$ (Mo: Kónya 85.o.)
   c) $\int \frac{4x-2}{\sqrt{x^2-4x-12}}\,\mathrm{dx}$ (Mo: Kónya 85.o.)
   d) $\int \frac{4x}{\sqrt{x^2+6x+11}}\,\mathrm{dx}$
   e) $\int \frac{1}{\sqrt{3-x^2-2x}}\,\mathrm{dx}$

Megoldás:

d) $\int \frac{4x}{\sqrt{x^2+6x+11}}\,\mathrm{dx}$
Ezt a kifejezést felbontjuk két tag összegére. A gyökjel alatti kifejezés deriváltja $(x^2+6x+11)' = 2x+6$, tehát

$$\int \frac{4x+12-12}{\sqrt{x^2+6x+11}}\mathrm{dx} = \int \frac{4x+12}{\sqrt{x^2+6x+11}}\mathrm{dx} + \int \frac{-12}{\sqrt{x^2+6x+11}}\mathrm{dx}.$$

Az első integrált az előző példák alapján tudjuk meghatározni:

$$\int \frac{4x+12}{\sqrt{x^2+6x+11}}\mathrm{dx} = 4\int (x^2+6x+11)' \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+6x+11}}\mathrm{dx} = 4\sqrt{x^2+6x+11} + C.$$

A második tag esetén inverz trigonometrikus/hiperbolikus függvény lesz a primitív függvény. A polinomot elsőként teljes négyzetté kell alakítani:

$$\int \frac{-12}{\sqrt{x^2+6x+11}}\mathrm{dx} = \int \frac{-12}{\sqrt{(x+3)^2+2}}\mathrm{dx}.$$

Ezután a gyökjel alatti konstans tag abszolútértékének gyökével egyszerűsítjük a törtet

$$\int \frac{\frac{-12}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{(x+3)^2}{2}+1}}\mathrm{dx} = -12\int \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x+3}{\sqrt{2}}\right)^2+1}}\mathrm{dx}.$$

Ebben a formában egyből látható, hogy a

$$f(\phi) = \frac{1}{\sqrt{\phi^2+1}}$$

kifejezés külső függvényként szerepel, melynek primitív függvénye

$$F(\phi) = \mathrm{arsh}(\phi) + C.$$

Az argumentumban pedig

$$\phi(x) = \frac{x+3}{\sqrt{2}}$$

kifejezés jelenik meg belső függvényként, és ennek deriváltja a $\phi(x)' = \frac{1}{\sqrt{2}}$ tényező. A határozatlan integrál második fele tehát

$$-12\ \mathrm{arsh}\left(\frac{x+3}{\sqrt{2}}\right) + C.$$

Együtt

$$\int \frac{4x}{\sqrt{x^2+6x+11}}\mathrm{dx} = 4\sqrt{x^2+6x+11} - 12\ \mathrm{arsh}\left(\frac{x+3}{\sqrt{2}}\right) + C.$$

e) $\int \frac{1}{\sqrt{3-x^2-2x}}\,\mathrm{dx}$

$$\int \frac{1}{\sqrt{3-x^2-2x}}\mathrm{dx}$$

Ennél a példánál a számlálóban nem szerepel x-es tag, így a teljes négyzetre alakítással kezdhetjük a megoldást:

$$\int \frac{1}{\sqrt{-(x^2+2x+1)+4}}\mathrm{dx} = \int \frac{1}{\sqrt{-(x+1)^2+4}}\mathrm{dx}.$$

A konstans tag gyökével egyszerűsítjük a törtet

$$\int \frac{\frac{1}{\sqrt{4}}}{\sqrt{-\frac{(x+1)^2}{4}+1}}\mathrm{dx} = \int \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{-\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}}\mathrm{dx}.$$

Itt a

$$f(\phi) = \frac{1}{\sqrt{1-\phi^2}}$$

külső függvényt fedezhetjük fel, melynek primitív függvénye

$$F(\phi) = \arcsin(\phi) + C.$$

A belső függvény $\phi(x) = \frac{x+1}{2}$, melynek deriváltja a $\phi(x)' = \frac{1}{2}$ tényező. A határozatlan integrál tehát

$$\int \frac{1}{\sqrt{3-x^2-2x}}\mathrm{dx} = \arcsin\left(\frac{x+1}{2}\right) + C.$$

8. Számítsa ki az alábbi határozatlan integrálokat!

   a) $\int \cos^2(x)\,\mathrm{dx}$
   b) $\int \sin^2(5x)\,\mathrm{dx}$
   c) $\int \sin(x)\cos(x)\,\mathrm{dx}$
   d) $\int \cos^5(x)\sin^2(x)\,\mathrm{dx}$ (Mo: Kónya 93.o.)

Megoldás:

a) $\int \cos^2(x)\,\mathrm{dx}$
Felhasználva, hogy

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$
$$\cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos(2x).$$

Ha összeadjuk a két egyenletet, és elosztjuk kettővel az eredményt, az alábbi azonosságot kapjuk:

$$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}.$$

Az integrál tehát

$$\int \cos^2(x)\mathrm{dx} = \int \frac{1+\cos(2x)}{2}\mathrm{dx} = \int \frac{1}{2}\mathrm{dx} + \int \frac{\cos(2x)}{2}\mathrm{dx}.$$

A második tag egy egyszerű összetett függvény:

$$\frac{1}{4}\int 2\cdot\cos(2x)\mathrm{dx} = \frac{1}{4}\int (2x)'\cdot\cos(2x)\mathrm{dx} = \frac{1}{4}\sin(2x) + C.$$

A végeredmény tehát

$$\int \cos^2(x)\mathrm{dx} = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} + C = \frac{x+\sin(x)\cos(x)}{2} + C,$$

utolsó lépésként akár ki is fejthetjük a végeredményt egyszeres szöget tartalmazó szögfüggvényekkel (tetszőleges).

b) $\int \sin^2(5x)\,\mathrm{dx}$
Itt hasonlóan a

$$\cos^2(y) + \sin^2(y) = 1$$
$$\cos^2(y) - \sin^2(y) = \cos(2y)$$

azonosságokat felhasználva a különbség felére kapjuk, hogy

$$\sin^2(y) = \frac{1-\cos(2y)}{2}.$$

Ezt felhasználva $y = 5x$ behelyettesítéssel

$$\begin{aligned}\int \sin^2(5x)\mathrm{dx} &= \int \frac{1-\cos(10x)}{2}\mathrm{dx}\\ &= \frac{1}{2}\int 1\mathrm{dx} - \frac{1}{20}\int 10\cos(10x)\mathrm{dx} = \frac{x}{2} - \frac{\sin(10x)}{20} + C.\end{aligned}$$

c) $\int \sin(x)\cos(x)\,\mathrm{dx}$

$$\int \sin(x)\cos(x)\mathrm{dx}$$

Felhasználva, hogy $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$:

$$\int \sin(x)\cos(x)\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\int \sin(2x)\mathrm{dx} = \frac{1}{4}\int 2\cdot\sin(2x)\mathrm{dx} = -\frac{1}{4}\cos(2x) + C$$