1. (15p) Számítsa ki az alábbi sorozat határértékét!

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3n^2-4n+3}{n^2+7}}$$

Megoldás: Rendőrelvvel kell dolgoznunk, így:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{4}} \leq \sqrt[n]{\frac{3n^2-n^2}{n^2+7n^2}} \overbrace{\leq}^{n>4} \sqrt[n]{\frac{3n^2-4n}{n^2+7n^2}} \leq \sqrt[n]{\frac{3n^2-4n+3}{n^2+7}} \leq \sqrt[n]{\frac{3n^2+3n^2}{n^2}} = \sqrt[n]{6}$$

Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} \to 1$ minden $p > 0$ konstansra, ezért az alsó és felső becslés is 1-hez tart, így a keresett határérték is 1.

2. (15p) Oldja meg az alábbi egyenleteket a komplex számok halmazán!

$$\overline{z} + 3|z|^2 + 2i = 5$$

Megoldás: Át kell írnunk az egyenletet algebrai alakba, így ha $z = a + ib$, akkor

$$\begin{aligned}
a - ib + 3\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 + 2i &= 5 \\
a - ib + 3(a^2+b^2) + 2i &= 5 \\
a + 3(a^2+b^2) + i(-b) &= 5 - 2i
\end{aligned}$$

Innen a valós részre vonatkozó egyenlet: $a+3(a^2+b^2) = 5$, a képzetes részre vonatkozó : $-b = -2$. Azaz $b = 2$, ezt visszaírva a valós részre vonatkozó egyenletbe: $a + 3a^2 + 12 = 5$, azaz $3a^2 + a + 7 = 0$. Ez utóbbi másodfokú egyenlet diszkriminánsa -83, azaz nincs megoldás a valós számok körében. Mivel a egy komplex szám valós része, így mindenképpen valósnak kell lennie, így azt kaptunk, hogy az eredeti egyenletnek nincsen megoldása a komplex számok körében.

3. (15p) Számítsa ki az $f(x) = (x+2)\,\mathrm{e}^{x^2-1}$ függvény minimumát és maximumát a $[0,1]$ intervallumon, amennyiben létezik!

Megoldás: Biztosan létezik maximuma és minimuma, mert $f(x)$ folytonos függvények szorzata, tehát folytonos, és Weierstrass-tétele szerint folytonos függvény korlátos és zárt intervallumon felveszi a maximumát és minimumát.

A vizsgálandó pontok az intervallum két széle és a lokális szélsőértékhelyek, ez utóbbihoz a derivált gyökeit kell kiszámolnunk.

$$f'(x) = \mathrm{e}^{x^2-1} + (x+2)2x\,\mathrm{e}^{x^2-1} = (2x^2+4x+1)\,\mathrm{e}^{x^2-1}$$

Mivel $\mathrm{e}^y > 0$ minden $y \in \mathbb{R}$-re, így a derivált előjele csak a $2x^2+4x+1$ kifejezés előjelén múlik. Ez egy felfele nyíló parabola, a gyökeit a másodfokú egyenlet megoldóképletéből kaphatjuk:

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-8}}{4} = -1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Mivel $\dfrac{\sqrt{2}}{2} < 1$, így mindkét gyök negatív, tehát nincsen lokális szélsőérték $[0,1]$-en, továbbá $f'(x) > 0$ ezen intervallumon a függvény tehát szigorú monoton nő. Innen a vizsgálandó pontok: 0, és 1, itt a függvényértékek:

$f(0) = 2\,\mathrm{e}^{-1} = \dfrac{2}{\mathrm{e}}$, $f(1) = 3\,\mathrm{e}^0 = 3$. Innen a minimum 0-ban van, értéke $\dfrac{2}{\mathrm{e}}$, a maximum pedig 1-ben, értéke 3. Onnan tudjuk, hogy 0-ban felvett érték kisebb mint az 1-ben felvett érték, hogy a függvény szigorú monoton nő ezen az intervallumon (vagy onnan, hogy $\mathrm{e} > 2$, így $\dfrac{2}{\mathrm{e}} < 1 < 3$)

4. (20p) Határozza meg az alábbi határértékeket!

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{2x^2}-1}{\sin(3x)} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arsinh}(2x)}{\arctan(3x)}$$

Megoldás:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{2x^2}-1}{\sin(3x)}$$

Mivel $\sin(0) = 0$ és $\mathrm{e}^0 = 1$ ezért ez a 0-ban egy $\frac{0}{0}$ alakú határérték, így alkalmazható a L'Hospital-szabály, innen:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{2x^2}-1}{\sin(3x)} =^{L'H} \lim_{x\to 0} \frac{4x\,\mathrm{e}^{2x^2}}{3\cos(3x)}$$

mivel $e^0 = 1$ és $\cos(0) = 1$, így a keresett határérték: $\dfrac{4\cdot 0\cdot 1}{3\cdot 1} = 0$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arsinh}(2x)}{\arctan(3x)}$$

Mivel $\operatorname{arsinh}(0) = 0$ és $\arctan(0) = 0$ ezért ez a 0-ban egy $\frac{0}{0}$ alakú határérték, így alkalmazható a L'Hospital-szabály, innen:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arsinh}(2x)}{\arctan(3x)} =^{L'H} \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{2}{\sqrt{1+(2x)^2}}}{\dfrac{3}{1+(3x)^2}} = \frac{2}{3}$$

5. (15p) Határozza meg a $g(x) = \pi - \arccos(3 - 2x)$ függvény értelmezési tartományát és értekkészletét!

Megoldás: Tudjuk, hogy arccos értelmezési tartománya a $[-1, 1]$ zárt intervallum, innen

$$-1 \leq 3 - 2x \leq 1$$

adódik $g(x)$-re. Megoldva:

$$-4 \leq -2x \ \leq -2$$

$$2 \geq x \geq 1,$$

azaz $g(x)$ értelmezési tartománya $[1, 2]$.

Értékkészletének meghatározásához $g(x)$ monotonitását kell megvizsgálnunk:

$$g'(x) = 0 - \frac{-1}{\sqrt{1-(3-2x)^2}}(-2) = \frac{-2}{\sqrt{1-(3-2x)^2}}$$

Mivel a teljes értelmezési tartományon $|3 - 2x| \leq 1$, így a derivált az értelmezési tartomány két végpontja kivételével értelmezett (ott $|3-2x| = 1$) és mindenütt negatív, ugyanis $\sqrt{y}$ mindenhol nemnegatív. Innen azt kapjuk, hogy a függvény a teljes értelmezési tartományán szigorú monoton csökken, azaz az értékkészlet:

$$[g(2), g(1)] = [\pi - \arccos(3-4), \pi - \arccos(3-2)] = [\pi - \pi, \pi - 0] = [0, \pi].$$

6. (20p) Számítsa ki az alábbi integrálokat! A második kiszámításánál alkalmazza az $t = \mathrm{e}^x$ helyettesítést!

$$\int x^3 \ln(4x)\mathrm{d}x = ? \qquad \int_{-1}^{0} \frac{e^{3x}}{e^{2x}+1}\mathrm{d}x = ?$$

Megoldás: $\int x^3 \ln(4x)\mathrm{d}x$ kiszámításához parciálisan kell integrálunk, ehhez legyen $f' = x^3$ innen $f = \frac{x^4}{4}$ illetve $g = \ln(4x)$ innen $g' = \frac{1}{x}$. Azaz:

$$\int x^3 \ln(4x)\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4}\ln(4x) - \int \overbrace{\frac{x^4}{4}\frac{1}{x}}^{\frac{x^3}{4}}\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4}\ln(4x) - \frac{x^4}{16} + C,$$

ahol C egy tetszőleges valós konstans.

A második integrál kiszámításához alkalmazzuk a $t = \mathrm{e}^x$ helyettesítést! Ekkor $x = \ln(t) = g(t)$, innen $\frac{1}{t} = g'(t)$. Másrészt a határok is megváltoznak. $x : -1 \rightsquigarrow 0$, akkor $t : e^{-1} \rightsquigarrow \mathrm{e}^0$. Azaz az integrál:

$$\int_{-1}^{0} \frac{e^{3x}}{e^{2x}+1}\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} \frac{t^3}{t^2+1}\frac{1}{t}\mathrm{d}t = \int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} \frac{t^2}{t^2+1}\mathrm{d}t = \int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} \frac{t^2+1-1}{t^2+1}\mathrm{d}t =$$

$$\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} 1+\frac{-1}{t^2+1}\mathrm{d}t = [t-\arctan(t)]_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} = 1-\arctan(1)-\frac{1}{\mathrm{e}}+\arctan\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) =$$

$$1-\frac{\pi}{4}-\frac{1}{\mathrm{e}}+\arctan\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$$

7. (+15p) *(Ezen feladat megoldása nem szükséges a maximum pontszám eléréséhez!)* Határozza meg az $h(x) = \sinh(x)$ függvény 0 körüli negyedrendű Taylor-polinomját!

   Megoldás: Definíció szerint a 0 körüli 4-edrendű Taylor polinom:

$$T_4(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(iv)}(0)}{4!}x^4$$

   Azaz $h(x)$ deriváltjait kell kiszámítani 0-ban negyedrendig.

   $h(x) = \sinh(x)$, innen $h(0) = \sinh(0) = 0$.

   $h'(x) = \cosh(x)$, innen $h'(0) = \cosh(0) = 1$.

   $h''(x) = \sinh(x)$, innen $h''(0) = \sinh(0) = 0$.

   $h'''(x) = \cosh(x)$, innen $h'''(0) = \cosh(0) = 1$.

   $h^{(iv)}(x) = \sinh(x)$, innen $h^{(iv)}(0) = \sinh(0) = 0$.

   Azaz a keresett Taylor-polinom:

$$T_4(x) = x + \frac{x^3}{6}$$

Az alábbi feladatot csak a 40% eléréséhez javítjuk ki!

(15 p) Határozza meg az alábbi mátrix determinánsát!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Megoldás: Első oszlop szerint kifejtve ki a determinánst:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

A 3×3-as determináns egy felsőháromszög, így értéke a főátlóban lévő elemek szorzata, azaz $\det(\mathbf{A}) = (-1)1(-1)(1) = 1$.