KALKULUS MINTAZH 1 MEGOLDÁS

1.) (20p)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 24 \\ 6 & 4 & -2 & 70 \\ -1 & 10 & 5 & -25 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 24 \\ 0 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 10 & \frac{9}{2} & -13 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 24 \\ 0 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 20 & 9 & -26 \end{array}\right)$$

$II - 3 \cdot I$ (2)

$III + \frac{1}{2} \cdot I$ (2)

$2 \cdot III$ (2)

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 24 \\ 0 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & -16 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x - z = 24 \rightarrow 2x + 4 = 24 \Rightarrow \underline{\underline{x = 10}} \\ 4y + z = -2 \rightarrow 4y - 4 = -2 \Rightarrow \underline{\underline{y = \frac{1}{2}}} \\ 4z = -16 \rightarrow \underline{\underline{z = -4}} \end{array}\right.$$

$III - 5 \cdot II$ (2)   (2)   (2) (2) (1)

$\det A = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 = \underline{\underline{16}}$ (5) (akárhogy helyesen számolja ki)

↳ mivel a 3. sort 2-vel szoroztam, így vissza kell osztani 2-vel a végén!

$\det \nabla$ = főátlóban lévő elemek szorzata. (1)

2 a) (13p)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[4]{2n} - 2n^4 + 5 \cdot 10^{n+1}}{n^{10} - 5^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{n} - 2n^4 + 5 \cdot 10^1 \cdot \underbrace{10^n}_{\text{dom}}}{n^{10} - \underbrace{5^n}_{\text{dom}}} =$$

(1) (1) (1) (1)

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{10^n}{5^n} \cdot \frac{\sqrt[4]{2} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt[4]{n}}{10^n}}_{\to 0} - 2 \cdot \underbrace{\frac{n^4}{10^n}}_{\to 0} + 50}{\underbrace{\frac{n^{10}}{5^n}}_{\to 0} - 1} = \text{"} +\infty \cdot \left(\frac{50}{-1}\right) \text{"} = \underline{\underline{-\infty}}$$

(1) (1) (1) (1) (1) (1)

$\left(\frac{10}{5}\right)^n \rightarrow +\infty$

2^n (1)

$a^n \rightarrow +\infty$ ha $a > 1$

erősorrend: $n^\alpha < a^n$ $\Rightarrow$ $\frac{n^\alpha}{a^n} \rightarrow 0$ (1)

$\alpha > 0, a > 1$

2.b)

$0 \le 1$

$0 \le 3n^2$

$1 \le n^{10}$

$n^2 \le n^{10}$

$$\underbrace{\sqrt[n]{2n^{10}}} \le \underbrace{\sqrt[n]{2n^{10}+3n^2+1}}_{a_n:=} \le \sqrt[n]{2n^{10}+3n^{10}+n^{10}} =$$

$$= \sqrt[n]{6n^{10}} = \sqrt[n]{6}\cdot\left(\sqrt[n]{n}\right)^{10}$$

$$\sqrt[n]{6}\cdot\left(\sqrt[n]{n}\right)^{10} \to \underbrace{1 \cdot 1^{10}}_{1}$$

$$\sqrt[n]{2}\cdot\left(\sqrt[n]{n}\right)^{10} \to \underbrace{1 \cdot 1^{10}}_{1}$$

Rendőr elv: $b_n \le a_n \le c_n$

$b_n \to 1$, $c_n \to 1$

akkor $a_n \to 1$ szintén.

3) (20 p)

$$2i \cdot z^4 - 2i - 2 = 0 \quad /:2$$

$$i \cdot z^4 - i - 1 = 0 \quad /+i+1$$

$$i \cdot z^4 = i + 1 \quad /:i$$

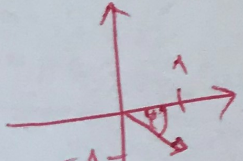
$$z^4 = \frac{i+1}{i} = \frac{i+1}{i} \cdot \frac{-i}{-i} = \frac{-i^2 - i}{-i^2} = \frac{1-i}{1} = 1 - i \quad (7)$$

$i^2 = -1$

Tehát $1-i$ negyedik gyökei lesznek a mo-k.

Kell: $1-i$ trigonometrikus alakja!

$$r = |1-i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$



$\varphi = -\frac{\pi}{4}$ (az ábráról is leolvasható, vagy kiszámítható)

(vagy $\frac{7\pi}{4}$) $\Rightarrow 1 - i = \sqrt{2} \cdot \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$ (6)

A negyedik gyökök:

$$z_n = \sqrt[4]{\sqrt{2}} \cdot \left(\cos\left(\frac{-\frac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi}{4}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{-\frac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi}{4}\right)\right), \; n = 0,1,2,3$$

$\Rightarrow$ Ha csak ezt írja fel: (3)

Tehát

$$z_0 = \sqrt[8]{2} \cdot \left(\cos\left(-\frac{\pi}{16}\right) + i \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{16}\right)\right)$$

$$z_1 = \sqrt[8]{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{7\pi}{16}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{7\pi}{16}\right)\right)$$

$$z_2 = \sqrt[8]{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{15\pi}{16}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{15\pi}{16}\right)\right)$$

$$z_3 = \sqrt[8]{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{23\pi}{16}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{23\pi}{16}\right)\right)$$

(7)

4.) (14p)

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-6x-10}{(x-3)^2} = -\infty$$

(1) (3)

behely: (3) $\frac{3^2-6\cdot 3-10}{(3-3)^2} = "\frac{-19}{0^+}" = -\infty$

$(x-3)^2 > 0$, ha $x \neq 3$ (2)

$"\frac{\text{nem}}{0}" = \text{végtelen}"$ (3)

$\frac{\ominus}{\oplus} = \ominus$ (1)

5.) a) (10p)

összeg

$$\left(x^2+\tan\left(\frac{x}{5^x-4}\right)\right)' = \underbrace{(x^2)'}_{2x} + \left(\tan\left(\frac{x}{5^x-4}\right)\right)' \quad (1)$$

$\underbrace{\tan\left(\frac{x}{5^x-4}\right)}_{\text{komp. fv.}}$ deriváltja: (1)

$$x \xmapsto{g} \frac{x}{5^x-4} \xmapsto{f} \tan\left(\frac{x}{5^x-4}\right)$$

$g(x) = \frac{x}{5^x-4}$ (1)

$\left(\frac{a}{b}\right)' = \frac{a'\cdot b - a\cdot b'}{b^2}$

g hányados fv.

$f(x) = \tan(x)$ (1) $\to f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ (1)

$$g'(x) = \frac{\overbrace{(x)'}^{1}\cdot(5^x-4) - x\cdot\overbrace{(5^x-4)'}^{5^x\ln 5}}{(5^x-4)^2} = \frac{5^x-4-x\cdot 5^x\ln 5}{(5^x-4)^2} \quad (3)$$

$(f\circ g)'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x)$ (1) így a végeredmény:

$$2x + \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{5^x-4}\right)}\cdot\left(\frac{5^x-4-x\cdot 5^x\ln 5}{(5^x-4)^2}\right) \quad (1)$$

5.b) (10p) szorzatfv: (1) $(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g'$

$$\left(\frac{1}{x}-2\right)^2 \cdot \left(2\cdot \sin x - 3\underbrace{\sqrt{x}}_{x^{1/2}}\right)$$

$\underbrace{\left(\frac{1}{x}-2\right)^2}_{\text{komp. fv:}}$ deriváltja:

komp. fv: (1) $x \xmapsto{g} \frac{1}{x}-2 \xmapsto{f} \left(\frac{1}{x}-2\right)^2$

$g(x) = \frac{1}{x} - 2 = x^{-1} - 2$ (1) $\rightarrow g'(x) = -x^{-2}$ (1) $= -\frac{1}{x^2}$

$f(x) = x^2$ (1) $\rightarrow f'(x) = 2x$ (1)

így $(f\circ g)'(x) \overset{(1)}{=} f'(g(x))\cdot g'(x)$ alapján:

$$\left(\left(\frac{1}{x}-2\right)^2\right)' = 2\cdot\left(\frac{1}{x}-2\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$ (1)

Az eredeti feladat:

$$\left(\left(\frac{1}{x}-2\right)^2\cdot\left(2\sin x - 3x^{1/2}\right)\right)' =$$

$$\left(\left(\frac{1}{x}-2\right)^2\right)'\cdot\left(2\sin x - 3x^{1/2}\right) + \left(\frac{1}{x}-2\right)^2\cdot\overbrace{\left(2\sin x - 3x^{1/2}\right)'}^{\overset{(1)}{2(\sin x)' - 3\cdot(x^{1/2})'}} =$$

$$\underbrace{2\cdot\left(\frac{1}{x}-2\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\left(2\sin x - 3x^{1/2}\right) + \left(\frac{1}{x}-2\right)^2\cdot\left(2\cdot\cos x - 3\cdot\frac{1}{2}x^{-1/2}\right)}_{(1)}$$

A deriválós ~~feladat~~nál arra kap pontot,
ha helyes a deriválás.
Nem kell a deriváltfv-t szépíteni,
egyszerűsíteni. (De lehet.)