KALKULUS MINTAZH2 MEGOLDÁS

1.) $$\begin{aligned} x - 2y + z &= -10 \\ -2x + y + 3z &= -14 \\ -x + 2y + 2z &= -5 \end{aligned}$$

Kibőv. eh. mtx: Gauss-elimináció

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -10 \\ -2 & 1 & 3 & -14 \\ -1 & 2 & 2 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -10 \\ 0 & -3 & 5 & -34 \\ 0 & 0 & 3 & -15 \end{array}\right)$$

$II + 2 \cdot I$ (3)

$III + I$ (3)

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} 3z &= -15 \\ -3y + 5z &= -34 \\ x - 2y + z &= -10 \end{aligned}\right\} (3)$$

$\longrightarrow$ $\underline{\underline{z = -5}}$

$\longrightarrow$ $-3y - 25 = -34 \Rightarrow -3y = -9 \Rightarrow \underline{\underline{y = 3}}$

$\Longrightarrow$ $x - 2 \cdot 3 - 5 = -10$

$x = -10 + 11 = \underline{\underline{1}}$

Azaz $x = 1$, $y = 3$, $z = -5$ (4)

Mivel csak vmely sor konstansszorosát adtam másik sorhoz, így a G.-e. során nem változott meg a det.

Így det A = a főátlóbeli elemek szorzata a ∇ mtx-ban (4)

$\det A = 1 \cdot (-3) \cdot 3 = -9 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$. (3)

2.) a) Cél: $A-B\cdot\frac{A+B}{A+B}=\frac{A^2-B^2}{A+B}$ 2

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{2n^4+n}-\sqrt{2n^4+3n^3}\right)=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{\overbrace{2n^4+n-(2n^4+3n^3)}^{2}}{\sqrt{2n^4+n}+\sqrt{2n^4+3n^3}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{-3n^3+n}{\underbrace{\sqrt{2n^4+n}}_{\underbrace{\sqrt{n^4}}_{n^2}\cdot\sqrt{2+\frac{1}{n^3}}}+\underbrace{\sqrt{2n^4+3n^3}}_{\underbrace{\sqrt{n^4}}_{n^2}\cdot\sqrt{2+\frac{3}{n}}}}=$$

2

$$=\lim_{n\to+\infty}\underbrace{\boxed{\frac{n^3}{n^2}}}_{n}\cdot\frac{-3+\frac{1}{n^2}}{\sqrt{2+\frac{1}{n^3}}+\sqrt{2+\frac{3}{n}}}\ \text{⊜}$$

$\frac{1}{n^2}\to 0$

$$=\lim_{n\to+\infty}\underbrace{n}_{\downarrow\ +\infty}\cdot\underbrace{\frac{-3+\frac{1}{n^2}}{\sqrt{2+\frac{1}{n^3}}+\sqrt{2+\frac{3}{n}}}}_{\downarrow\ \frac{-3}{2\cdot\sqrt{2}}}$$

$\frac{1}{n^2}\to 0$, $\frac{1}{n^3}\to 0$, $\frac{3}{n}\to 0$

erre az alakra: 2

végeredmény

$$=-\infty$$ 2

2. b)

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{5n-4}{5n+7}\right)^{2n}=\lim_{n\to+\infty}\left(\left(\frac{\overbrace{1-\frac{4}{5n}}^{3}}{1+\frac{7}{5n}}\right)^{n}\right)^{2}=$$ 1

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\left(1-\frac{4/5}{n}\right)^{n}}{\left(1+\frac{7/5}{n}\right)^{n}}\right)^{2}=\left(\frac{e^{-4/5}}{e^{7/5}}\right)^{2}=\left(e^{-11/5}\right)^{2}=e^{-\frac{22}{5}}$$

2

$\left(1-\frac{4/5}{n}\right)^{n}\xrightarrow{2}e^{-4/5}$

$\left(1+\frac{7/5}{n}\right)^{n}\xrightarrow{2}e^{7/5}$

3.) $2i\cdot z^3 + i - 3 = 3i - 1 \qquad /-i+3$

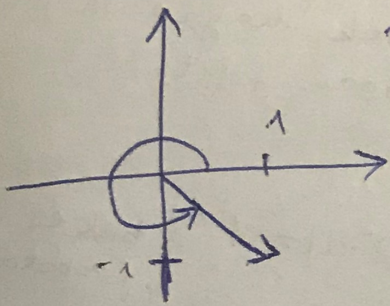
$2i\cdot z^3 = 2(i+1) \qquad /:2i$

$z^3 = \frac{i+1}{i} = \frac{i+1}{i}\cdot\frac{-i}{-i} = \frac{-i^2-i}{1} = 1-i$ (7)

$-i^2 = 1$

$v=(1-i)$ harmadik gyökei lesznek a megoldások

Kell: $1-i$ trigonometrikus alakja!



$r=|v|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

$\varphi=\frac{7\pi}{4}$ (ábráról is leolvasható, vagy kiszámítható)

$\Rightarrow 1-i=\sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\cdot\sin\frac{7\pi}{4}\right)$ (6)

A harmadik gyökök:

$$z_n=\sqrt[3]{\sqrt{2}}\cdot\left(\cos\frac{\frac{7\pi}{4}+n\cdot 2\pi}{3}+i\cdot\sin\frac{\frac{7\pi}{4}+n\cdot 2\pi}{3}\right)$$

$n=0,1,2$

Ha csak ezt írja fel: (3)

Tehát

$z_0=\sqrt[6]{2}\cdot\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\cdot\sin\frac{7\pi}{12}\right)$

$z_1=\sqrt[6]{2}\cdot\left(\cos\frac{15\pi}{12}+i\cdot\sin\frac{15\pi}{12}\right)$ (7)

$z_2=\sqrt[6]{2}\cdot\left(\cos\frac{23\pi}{12}+i\cdot\sin\frac{23\pi}{12}\right)$

4.)

$$\lim_{x\to0}\frac{tg(5x^2)}{tg(2x^2)}=\lim_{x\to0}\frac{\sin(5x^2)}{\cos(5x^2)}\cdot\frac{\cos(2x^2)}{\sin(2x^2)} \text{ (3) } =\lim_{x\to0}\frac{\sin 5x^2}{\sin 2x^2}\cdot\frac{\cos 2x^2}{\cos 5x^2}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin 5x^2}{\sin 2x^2}\cdot\frac{2x^2}{5x^2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{\cos 2x^2}{\cos 5x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sin 5x^2}{5x^2}\cdot\frac{2x^2}{\sin 2x^2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{\cos 2x^2}{\cos 5x^2} \text{ (+)}$$

$5x^2\to0 \Rightarrow 1$ (5) $\qquad 2x^2\to0 \Rightarrow 1 \qquad$ folyt. $\Rightarrow \frac{1}{1}$ (3)

ötletre: (8)

$= \frac{5}{2}$ (1)

5.) $f(x) = \begin{cases} |x^2-1|, & \text{ha } x < 0 \\ \dfrac{x^2-5}{x^2+4x-5}, & \text{ha } x \geq 0 \end{cases}$

Hol lehet szakadás? · Az illesztési pontban: $x = 0$ 1

· Ahol a nevező $= 0$ és $x \geq 0$.

$x^2+4x-5=0$

$x_{1,2} = \dots$ 1, -5 $\to$ $x = 1$. 2

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ $\Longleftarrow$

Tehát szakadási pont lehet: $x = 0$-ban, $x = 1$-ben.

Többi pontban f folytonos, mert folyt. fvek hányadosa, kompozíciója. Tehát f $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$-n biztosan folyt. 2

Vizsgálat:

$x = 0$-ban:

$\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0-} |x^2-1| = |0^2-1| = 1$ 2

folyt.

$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} \dfrac{x^2-5}{x^2+4x-5} = \dfrac{-5}{-5} = 1$ 2

folyt.

bal- és jobboldali hat. é. egyenlő

$\Downarrow$

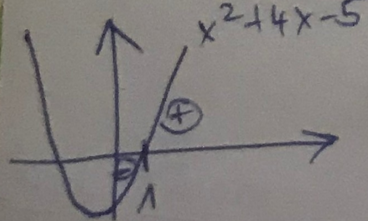
$\exists \lim_{x \to 0} f(x) = 1$

és $f(0) = 1$,

így f $x = 0$-ban folyt. 2

$x = 1$-ben:

$\lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1-} \dfrac{\overbrace{x^2-5}^{\to -4}}{\underbrace{x^2+4x-5}_{\to 0^-}} = +\infty$ 3



$\lim_{x \to 1+} f(x) = \lim_{x \to 1+} \dfrac{\overbrace{x^2-5}^{\to -4}}{\underbrace{x^2+4x-5}_{\to 0^+}} = -\infty$ 3

$x = 1$-ben f-nek lényeges szakadása van 2

Tehát f folytonos $\mathbb{R} \setminus \{1\}$-en. 1