

Kalkulus vizsga beugró feladatok

Minden kalkulus vizsgán lesznek beugró feladatok. A beugrón 3 feladat lesz, mindegyik 10 pontot ér, így a beugrón összesen 30 pontot lehet szerezni. A beugró 30 pontjából 20 pontot kell elérni a sikeres beugróhoz (részpontszám szerezhető). Ha a beugrón kevesebb, mint 20 pontot ér el a hallgató, akkor a többi feladatát már nem javítjuk ki és a vizsga elégtelen. Ilyenkor újra kell vizsgázni.

A beugró 3 feladattípusa:

1. **Deriválás (ész nélkül):** Egy deriválás feladat, ahol az elemi függvények deriváltjait (Derivált táblázat zöld függvényei) és a szokásos deriválási szabályokat (összeg, különbség, konstansszoros, szorzat, hányados és kompozíció függvény deriváltja) kell használni. Illetve ezek bármilyen kombinációját, mint a zh utolsó feladatában.
2. **Alapintegrálok:** Elemi függvények primitív függvénye (Derivált táblázat zöld függvényei alapján), vagy határozott integrálja és a $\int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C, C \in \mathbb{R}$, (ahol $\int f(x)dx = F(x)$) szabály használata, akár határozott integrál esetén is.
3. **Alapvető integrálási módszerek:** A következő szabályok használata határozatlan és határozott integrálok esetén:
 - $\int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C, C \in \mathbb{R}$, (ahol $\int f(x)dx = F(x)$) (1. szabály),
 - $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C$ (2. szabály),
 - $\int f'(x)f^\alpha(x)dx = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + C$ (3. szabály).

A kettő integrálás feladattípus közül az egyik határozatlan, a másik határozott integrál lesz.

Példák beugróra

- **Példa 1:** (10p+10p+10p)

$$a) f(x) = \left(\frac{e^{2x} - 5x + 1}{\sin x - \sqrt[3]{x}} \right)^3, f'(x) = ? \quad b) \int \sinh(2x) - x^3 + \frac{2}{5x} + \sqrt{x} dx = ? \quad c) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{8x^2 + 2} dx = ?$$

- **Példa 2:** (10p+10p+10p)

$$a) f(x) = 4^{x-1} \ln(x^2 - 1), f'(x) = ? \quad b) \int_{-1}^2 e^{5x+5} - 3^x + \frac{2}{1+x^2} dx = ? \quad c) \int \frac{e^{2x} + x}{e^{2x} + x^2 - 7} dx = ?$$

- **Példa 3:** (10p+10p+10p)

$$a) f(x) = \sqrt{3^x \cdot (x^3 + 5x - 7\sqrt{x})}, f'(x) = ? \quad b) \int \cos(1-x) - \frac{2+x}{5x^2} dx = ? \quad c) \int_{\pi}^{2\pi} \cos(x) \sin^5(x) dx = ?$$

Megoldás

Példa 1

a) Összeletti fv:

$$x \mapsto g \rightarrow \frac{e^{2x} - 5x + 1}{\sin x - \sqrt[3]{x}} + f \rightarrow \left(\frac{e^{2x} - 5x + 1}{\sin x - \sqrt[3]{x}} \right)^3$$

$$g(x) = \frac{e^{2x} - 5x + 1}{\sin x - \sqrt[3]{x}}$$

leíróder. fv!

$$g'(x) = \frac{\text{hányv.} \rightarrow \frac{2 \cdot e^{2x} - 5}{(e^{2x} - 5x + 1)^1} \cdot (\sin x - \sqrt[3]{x}) - (e^{2x} - 5x + 1) \cdot (\cos x - \frac{1}{3} x^{-2/3})}{(\sin x - \sqrt[3]{x})^2}$$

$$f(x) = x^3$$

$$f'(x) = 3 \cdot x^2$$

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) =$$

$$= 3 \cdot \left(\frac{e^{2x} - 5x + 1}{\sin x - \sqrt[3]{x}} \right)^2 \cdot \frac{(2e^{2x} - 5) \cdot (\sin x - \sqrt[3]{x}) - (e^{2x} - 5x + 1) \left(\cos x - \frac{1}{3} x^{-2/3} \right)}{(\sin x - \sqrt[3]{x})^2}$$

$$b) \int \sinh(2x) - x^3 + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{x} + x^{1/2} dx =$$

$$\frac{\cosh(2x)}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{2}{5} \cdot \ln|x| + \frac{x^{3/2}}{3/2} + C$$

(1. névelő)

$$e) \int_0^{1/2} \frac{1}{8x^2+2} dx = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{1/2} \frac{1}{4x^2+1} dx \quad \text{N.L.}$$

primitive fr:

$$\int \frac{1}{4x^2+1} dx = \int \frac{1}{(2x)^2+1} dx = \frac{\operatorname{arctg}(2x)}{2} \quad (1. \text{ rule})$$

$$\begin{aligned} & \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\operatorname{arctg}(2x)}{2} \right]_{x=0}^{1/2} = \frac{1}{4} \cdot \left(\overbrace{\operatorname{arctg} 1}^{\pi/4} - \overbrace{\operatorname{arctg} 0}^0 \right) = \\ & = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{4} = \underline{\underline{\frac{\pi}{16}}} \end{aligned}$$

Pelda 2

a)

$$4^{x-1} \cdot \ln(x^2-1) = \frac{1}{4} \cdot 4^x \cdot \ln(x^2-1)$$

monat fv.

$$\left(\frac{1}{4} \cdot 4^x \cdot \ln(x^2-1) \right)' = \frac{1}{4} \cdot \underbrace{(4^x)'}_{4^x \cdot \ln 4} \cdot \ln(x^2-1) + \frac{1}{4} \cdot 4^x \cdot \underbrace{(\ln(x^2-1))'}_{\text{hozp!}}$$

$$(\ln(x^2-1))' = \frac{1}{x^2-1} \cdot 2x \quad (\text{m: } (\ln x)' = \frac{1}{x})$$

$$\text{Ho: } \frac{1}{4} \cdot 4^x \cdot \ln 4 \cdot \ln(x^2-1) + \frac{1}{4} \cdot 4^x \cdot \frac{1}{x^2-1} \cdot 2x$$

b) pr. fv:

$$\int e^{5x+5} - 3^x + \frac{2}{1+x^2} dx = \frac{e^{5x+5}}{5} - \frac{3^x}{\ln 3} + 2 \cdot \arctg x + c$$

1. szabály

$$\int_{-1}^2 e^{5x+5} - 3^x + \frac{2}{1+x^2} dx = \left[\frac{e^{5x+5}}{5} - \frac{3^x}{\ln 3} + 2 \arctg x \right]_{x=-1}^2 =$$

$$= \left(\frac{e^{15}}{5} - \frac{3^2}{\ln 3} + 2 \arctg 2 \right) - \left(\frac{e^0}{5} - \frac{3^0}{\ln 3} + 2 \arctg(-1) \right) =$$

$$\frac{e^{15}}{5} - \frac{9}{\ln 3} + 2 \arctg 2 - \frac{1}{5} + \frac{1}{\ln 3} - 2 \arctg(-1)$$

$$c) \int \frac{e^{2x} + x}{e^{2x} + x^2 - 7} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2e^{2x} + 2x}{e^{2x} + x^2 - 7} dx = \frac{1}{2} \cdot \ln |e^{2x} + x^2 - 7| + C$$

2. módszer:

$$\int \frac{f'}{f} = \ln |f| \text{ akkor}$$

$$f(x) = e^{2x} + x^2 - 7$$

$$f'(x) = 2 \cdot e^{2x} + 2x$$

Pelda 3

$$a) \quad x \xrightarrow{g} 3^x \cdot (x^3 + 5x - 7\sqrt{x}) \xrightarrow{f} \sqrt{3^x \cdot (x^3 + 5x - 7\sqrt{x})}$$

$$g(x) = 3^x \cdot (x^3 + 5x - 7\sqrt{x})$$

$$g'(x) = \underbrace{(3^x)'}_{3^x \cdot \ln 3} \cdot (x^3 + 5x - 7x^{1/2}) + 3^x \cdot \underbrace{(x^3 + 5x - 7x^{1/2})'}_{3x^2 + 5 - 7 \cdot \frac{1}{2} x^{-1/2}}$$

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} x^{-1/2}$$

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \frac{1}{2} \left(3^x \cdot (x^3 + 5x - 7\sqrt{x}) \right)^{-1/2} \cdot$$

$$\cdot \left[3^x \cdot \ln 3 (x^3 + 5x - 7x^{1/2}) + 3^x \cdot \left(3x^2 + 5 - \frac{7}{2} x^{-1/2} \right) \right]$$

$$b) \quad \int \cos(1-x) - \frac{2+x}{5x^2} dx = \int \cos(1-x) - \int \frac{2}{5x^2} - \int \frac{x}{5x^2} =$$

$$= \int \cos(1-x) - \frac{2}{5} \int x^{-2} - \frac{1}{5} \int \frac{1}{x} = \frac{\sin(1-x)}{-1} - \frac{2}{5} \cdot \frac{x^{-1}}{-1} - \frac{1}{5} \ln|x| + C$$

(1. szabály)

$$c) \int_{\pi}^{2\pi} \cos x \cdot \sin^5 x \, dx = \left[\frac{\sin^6 x}{6} \right]_{x=\pi}^{2\pi} = \frac{\sin^6(2\pi)}{6} - \frac{\sin^6(\pi)}{6} =$$

pr. fu.

$$\int \cos x \cdot \sin^5 x \, dx = \frac{\sin^6 x}{6}$$

$$\int f' \cdot f^5 = \frac{f^6}{6}$$

3. módszer

~~$$\frac{\sin^6(2\pi)}{6} - \frac{\sin^6(\pi)}{6} = 0 - 0 = 0$$~~

$$\begin{array}{l} \sin 2\pi = 0 \\ \sin \pi = 0 \end{array}$$

