2018 november 9.
Munkaidő: 90 perc

KALKULUS ZÁRTHELYI

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet

Név: **Gyakorlatvezető:**

Neptun kód:

1.	2.	3.	4.	5.	$\sum$

1. Legyen $\mathbf{A}$ az alábbi mátrix:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Oldja meg az $\mathbf{A}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix}$ egyenletet és számítsa ki $\mathbf{A}$ determinánsát és sorrangját!

Megoldás:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \end{bmatrix} (2p) \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \end{bmatrix} (2p) \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{bmatrix} (4p)$$

Innen $z = 3$, $y = 2$ $x = 1$ (3p) A sorrangja a nem nulla sorok száma (2p)$= 3$(2p) $\det(\mathbf{A}) = 1 \cdot (-2) \cdot 3 = -6$(5p) Ha Gauss-eliminációnál kiemel, akkor az utolsó lépésben kapjon 2 pontot, de ha jól számolja ki a determinánst (számon tartja mit emelt ki) akkor arra adjunk 7 pontot

2. Számítsa ki az alábbi sorozat határértékét!

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^7 + 2^{2n+1} + 10(-3)^n}{4n^2 + 1 + 10^n}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2+5}{n^2+2}\right)^{n^2-1}$

Megoldás:

$$\lim_{n\to 0} \frac{n^7 + 2^{2n+1} + 10(-3)^n}{4n^2 + 1 + 10^n} = \lim_{n\to 0} \frac{\overbrace{\frac{n^7}{10^n}}^{\to 0} + 2\cdot \overbrace{\left(\frac{4}{10}\right)^n}^{\to 0} + 10 \overbrace{\left(\frac{-3}{10}\right)^n}^{\to 0}}{4\underbrace{\frac{n^2}{10^n}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{1}{10^n}}_{\to 0} + 1} = \frac{0}{1} = 0$$

Minden $\to 0$ megállapítása (2) pontot ér

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+5}{n^2+2}\right)^{n^2-1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{5}{n^2}}{1+\frac{2}{n^2}}\right)^{n^2}\underbrace{\frac{n^2+2}{n^2+5}}_{\to 0(2p)}(3p) = \frac{e^5(2p)}{e^2(2p)} = e^3(1p)$$

3. Oldja meg az alábbi egyenletet a komplex számok halmazán!

$$\left(z^2+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3\right)(z^2+4z+5)=0$$

Megoldás: $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i = 1\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$ *(4p) (Ha eddig nem jut el, de van jó ábra (2p))*

Így $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3 = (\cos(\pi)+i\sin(\pi))\,(2p) = -1(2p)$ *Tehát:*

$$z^2-1=0(2p) \Rightarrow z^2=1 \Rightarrow z_1=1\; z_2=-1\,(2p)$$

Valamint:

$$\begin{aligned} z^2+4z+5=0(2p) \Rightarrow z_{3,4} =& \frac{-4\pm\sqrt{16-20}}{2}(2p) \\ =& \frac{-4\pm 2i}{2}(2p) \Rightarrow z_3=-2+i\; z_4=-2-i(2p) \end{aligned}$$

4. Számítsa ki az alábbi függvény határértékét!

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-\sin(x)\cos^2(x)}{x^3}$$

Megoldás:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-\sin(x)\cos^2(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\frac{\overbrace{1-\cos^2(x)}^{\sin^2(x)\,(5p)}}{x^2}(5p) = \lim_{x\to 0}\left(\underbrace{\frac{\sin(x)}{x}}_{\to 1\,(5p)}\right)^3 = 1^3\,(5p) = 1$$

5. Deriválja az alábbi függvényeket!
a) $(1+3x+x^2)\cos(x^4+1)$, b) $\frac{\arctan(x)}{1+x^2}$
Megoldás:

$$\begin{aligned} \left((1+3x+x^2)\cos(x^4+1)\right)' =& (1+3x+x^2)'\cos(x^4+1)+(1+3x+x^2)(\cos(x^4+1))'(3p) = \\ =& \underbrace{(3+2x)}_{(3p)}\cos(1+x^4)\underbrace{-\sin(1+x^4)4x^3}_{(4p)}(1+3x+x^2) \end{aligned}$$

$$\frac{\arctan(x)}{1+x^2} = \frac{(\arctan(x))'(1+x^2) - \arctan(x)(1+x^2)'}{(1+x^2)^2}(3p) =$$

$$= \frac{\overbrace{\frac{1}{1+x^2}}^{(3p)}(1+x^2)\overbrace{-2x}^{(3p)}\arctan(x)}{(1+x^2)^2} = \frac{1-2x\arctan(x)}{(1+x^2)^2}(1p)$$

Minden feladat hibátlan megoldása 20 pontot ér. Részleges megoldásért részpontszám adható, indoklás nélküli eredményközlésért nem jár pont.