Matematika A2a - Vektorfüggvények

Az 1. ZH témakörei (csak Gazdálkodási és menedzsment alapszakos hallgatóknak) – Feladatok

A zárthelyi dolgozatban 4 feladat lesz az alábbi típusokból! Teszt alakban fogalmazzuk meg a ZH-t, azaz a megoldással kapcsolatos kérdésekre kell válaszolniuk. Rossz válaszért nem jár pontlevonás. (A ZH 45 perces lesz és max. 20 pontot lehet elérni.)

1. **Feladat:** Számítsa ki az

$$\int_3^{\infty} \frac{7x-4}{x^2-3x+2}\,dx$$

improprius integrált!

Megoldás: Az improprius integrál 1. típusú, hiszen az $x^2-3x+2=0$ megoldásai 1 és 2 nincsenek a $3,\infty)$ intervallumban. Ennek alapján

$\int_3^{\infty} \frac{7x-4}{x^2-3x+2}\,dx = \lim_{\omega\to\infty} \int_3^{\omega} \frac{7x-4}{x^2-3x+2}\,dx$.

Parciális törtekre bontással kiszámítjuk a határozatlan integrált:

$\frac{7x-4}{x^2-3x+2} = \frac{7x-4}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{(A+B)x-2A-B}{(x-1)(x-2)}$,

ahonnan $A+B=7$ és $-2A-B=-4$, azaz $A=-3$ és $B=10$.

Tehát

$\frac{7x-4}{x^2-3x+2} = \frac{-3}{x-1}+\frac{10}{x-2} = \frac{10}{x-2}-\frac{3}{x-1}$,

azaz

$\int \frac{7x-4}{x^2-3x+2}\,dx = \int \frac{10}{x-2}\,dx - \int \frac{3}{x-1}\,dx = 10\,ln(x-2) - 3\,ln(x-1) + c = ln\frac{(x-2)^{10}}{(x-1)^3} + c.$

A Newton-Leibniz formulát használva írhatjuk, hogy az improprius integrál

$$\int_3^{\infty} \frac{7x-4}{x^2-3x+2}\,dx = \lim_{\omega\to\infty} \int_3^{\omega} \frac{7x-4}{x^2-3x+2}\,dx = \lim_{\omega\to\infty} \left[\ln\frac{(x-2)^{10}}{(x-1)^3} \right]_3^{\omega} =$$

$$= \lim_{\omega\to\infty} \left[\ln\frac{(\omega-2)^{10}}{(\omega-1)^3} - \ln\frac{1}{2^3} \right] = \lim_{\omega\to\infty} \left[\ln\frac{\omega^{10}\left(1-\frac{2}{\omega}\right)^{10}}{\omega^3\left(1-\frac{1}{\omega}\right)^3} - \ln\frac{1}{2^3} \right] = +\infty,$$

azaz az improprius integrál divergens.

Megjegyzés: A zh-ban ennél a típusfeladatnál lehet olyan 1. típusú improprius integrál is, amely konvergens. Lehet olyan feladat is, melyben az integrandus függvény parciális integrálással számítandó ki, és lehet olyan is, melyben a $\mathbf{t} = e^x$ ***helyettesítést kell használni!***

2. **Feladat:** Vizsgálja hányadosteszttel az

$$\int_1^{\infty} \frac{10x+1}{x^5+1}\ dx$$

improprius integrál konvergenciáját!

Megoldás: Felírhatjuk, hogy

$\frac{10x+1}{x^5+1} \sim \frac{x}{x^5} = \frac{1}{x^4}$,

mert $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{10x+1}{x^5+1}}{\frac{1}{x^4}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{(10x+1)x^4}{x^5+1} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^5\left(10+\frac{1}{x}\right)}{x^5\left(1+\frac{1}{x^5}\right)} = 10 > 0$

véges szám.

Az $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\ dx$ improprius integrál konvergens, ha $p > 1$ és divergens, ha $p \leq 1$.
Így az $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^4}\ dx$ improprius integrál konvergens (mivel $p = 4 > 1$), és a hányadostesztet használva kapjuk, hogy az $\int_1^{\infty} \frac{10x+1}{x^5+1}\ dx$ improprius integrál is konvergens.

Megjegyzés: A zh-ban ennél a típusfeladatnál lehet olyan 1. típusú improprius integrál is, amely divergens. Vegyük észre, hogy ehhez a feladathoz tudni kellett, hogy az $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\ dx$ **improprius integrál konvergens, ha** $\boldsymbol{p > 1}$ **és divergens, ha** $\boldsymbol{p \leq 1}$**.**

3. **Feladat:** Mutassa meg, hogy az $x + y - 4z = 4$ és a $2x + 2y - 8z = 16$ síkok párhuzamosak és határozza meg a távolságukat!

Megoldás: Jelölje S_1 az $x + y - 4z = 4$, S_2 pedig a $2x + 2y - 8z = 16$ síkot. Az S_1 sík egy normálvektora $\boldsymbol{n_1} = (1,1,-4)$, az S_2 sík egy normálvektora $\boldsymbol{n_2} = (2,2,-8) = 2 \cdot \boldsymbol{n_1}$, így a két sík párhuzamos egymással.
Legyen $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n_1} = (1,1,-4)$ a két sík közös normálvektora. A két sík távolságát kiszámíthatjuk például úgy, hogy veszünk az S_1 síkon egy P_1 pontot, valamint az S_2 síkon egy P_2 pontot és meghatározzuk a $\overrightarrow{P_1P_2}$ $\boldsymbol{n}$ vektorra vett merőleges vetületvektorának a hosszát, ami nem más, mint $\left|\left\langle \overrightarrow{P_1P_2}, \frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|} \right\rangle\right|$, azaz a $\overrightarrow{P_1P_2}$ és az $\frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}$ egységvektor skaláris szorzatának az abszolút értéke.
Legyen például $P_1(0,0,-1) \in S_1$ és $P_2(0,0,-2) \in S_2$. (Érdemes minél több 0-val számolni.)
Ekkor $\overrightarrow{P_1P_2} = (0,0,-1)$. Az $\boldsymbol{n}$ vektor hossza $|\boldsymbol{n}| = \sqrt{1^2+1^2+(-4)^2} = \sqrt{18}$ $\left(= 3\sqrt{2}\right)$, egységvektora pedig $\frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|} = \left(\frac{1}{\sqrt{18}}, \frac{1}{\sqrt{18}}, -\frac{4}{\sqrt{18}}\right)$. A két sík távolsága pedig
$\left|\left\langle \overrightarrow{P_1P_2}, \frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|} \right\rangle\right| = \left|\left\langle (0,0,-1), \left(\frac{1}{\sqrt{18}}, \frac{1}{\sqrt{18}}, -\frac{4}{\sqrt{18}}\right) \right\rangle\right| = \frac{4}{\sqrt{18}}$.

4. **Feladat:** Oldja meg a $z^6 + (16+16i)z^2 = 0$ egyenletet a komplex számok halmazán! A megoldásokat bármilyen alakban elfogadjuk!

Megoldás: Mivel az egyenlet $z^2[z^4 + (16+16i)] = 0$ alakba írható, $z_{1,2} = 0$, azaz a 0 kétszeres gyöke az egyenletnek.

A többi négy megoldást a $z^4 + (16+16i) = 0$ egyenletet megoldva kapjuk meg. Mivel $z^4 = -(16+16i) = -16-16i$, kiszámítjuk a $-16-16i$ komplex negyedik gyökeit.

Átírjuk trigonometrikus alakba a $-16-16i$ komplex számot:
$-16-16i = 16(-1-i) = 16\sqrt{2}\left(cos\frac{5\pi}{4} + i\,sin\frac{5\pi}{4}\right)$.
A négy komplex negyedik gyök a következő:

$z_k = \sqrt[4]{16\sqrt{2}}\left(cos\frac{\frac{5\pi}{4}+2k\pi}{4} + i\,sin\frac{\frac{5\pi}{4}+2k\pi}{4}\right)$, ahol $k \in \{0,1,2,3\}$.

Tehát az eredeti egyenlet 6 megoldása (az indexeket kicsit megváltoztattuk, az $z_{1,2}=0$ megoldásokat a végére tettük be):

$$z_0 = 2\sqrt[8]{2}\left(cos\frac{5\pi}{16} + i\,sin\frac{5\pi}{16}\right), \quad z_1 = 2\sqrt[8]{2}\left(cos\frac{13\pi}{16} + i\,sin\frac{13\pi}{16}\right),$$
$$z_2 = 2\sqrt[8]{2}\left(cos\frac{21\pi}{16} + i\,sin\frac{21\pi}{16}\right), \quad z_3 = 2\sqrt[8]{2}\left(cos\frac{29\pi}{16} + i\,sin\frac{29\pi}{16}\right),$$

$z_4 = 0, \quad z_5 = 0.$

5. **Feladat:** Oldja meg a $z^3 - z^2 + 8z = 0$ egyenletet a komplex számok halmazán! A megoldásokat algebrai alakban kérjük! Írjuk fel a $p(z) = z^3 - z^2 + 8z$ polinom **C**-beli gyöktényezős alakját!

Megoldás: Mivel az egyenlet $z(z^2 - z + 8) = 0$, ezért $z_1 = 0$ megoldása az egyenletnek.
A másik két megoldás a $z^2 - z + 8 = 0$ egyenlet két komplex gyöke lesz:
$z_{2,3} = \frac{1+\sqrt{(-1)^2-4\cdot1\cdot8}}{2} = \frac{1+\sqrt{1-32}}{2} = \frac{1+\sqrt{-31}}{2} = \frac{1\pm i\sqrt{31}}{2} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{31}}{2}$, mert$\sqrt{-31} = \pm i\sqrt{31}$.
A kért gyöktényezős alak pedig $p(z) = z\left(z - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{31}}{2}\right)\left(z - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{31}}{2}\right)$.

6. **Feladat:** Igazoljuk, hogy az

$$\boldsymbol{a_1} = \begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a_2} = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a_3} = \begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}$$

vektorok bázist alkotnak az $\mathbf{R^3}$ -ben, és adjuk meg az $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix}$ vektornak erre a bázisra vonatkozó koordinátáit!

Megoldás: Az $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}$ vektorok $\mathbf{R^3}$ -ben pontosan akkor alkotnak bázist, ha lineárisan függetlenek.

$$\lambda_1\boldsymbol{a_1} + \lambda_2\boldsymbol{a_2} + \lambda_3\boldsymbol{a_3} = \lambda_1\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix} + \lambda_2\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + \lambda_3\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0\\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0\\ 2\lambda_1 - \lambda_3 = 0,\end{cases}$$

ahonnan $\lambda_2 = -2\lambda_3$ és $\lambda_1 = \frac{\lambda_3}{2}$ az utolsó két egyenletből. Ezeket behelyettesítve az első egyenletbe kapjuk, hogy $\frac{\lambda_3}{2} - 2\lambda_3 + \lambda_3 = 0$, ahonnan következik, hogy $\lambda_3 = 0$, így $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, tehát az $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}$ vektorok lineárisan függetlenek $\mathbf{R^3}$ -ben, így bázist alkotnak.
Legyen $B = \{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}\}$. Az $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix}$ vektornak erre a B bázisra vonatkozó koordinátái

$[\boldsymbol{x}]_B = \begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{bmatrix}$ a következő tulajdonsággal: $\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{a_1} + \beta\boldsymbol{a_2} + \gamma\boldsymbol{a_3}$.

$\begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + \gamma\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}$, azaz $\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=2\\ \beta+2\gamma=1\\ 2\alpha-\gamma=-1,\end{cases}$

ahonnan az utolsó két egyenletből $\beta = 1-2\gamma$ és $\alpha = -\frac{1}{2}+\frac{\gamma}{2}$.

Behelyettesítve az első egyenletbe:

$-\frac{1}{2}+\frac{\gamma}{2}+1-2\gamma+\gamma = 2$, ahonnan $\gamma=-3,\ \beta=7,\ \alpha=-2$, azaz $[\boldsymbol{x}]_B = \begin{bmatrix}-2\\7\\-3\end{bmatrix}$.

7. **Feladat:** Határozzuk meg az $\boldsymbol{a_1} = \begin{bmatrix}2\\1\\-5\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a_2} = \begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a_3} = \begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$ és $\boldsymbol{a_4} = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$ vektorok által alkotott vektorrendszer rangját!

Megoldás: Az $\{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}, \boldsymbol{a_4}\}$ vektorrendszer rangja egyenlő az

$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix}2&-1&0&1\\1&2&1&1\\-5&1&-1&0\end{bmatrix}$ mátrix rangjával.

Elemi sor- és oszlopműveletek segítségével megállapítjuk az $\boldsymbol{A}$ mátrix rangját. Először felcseréljük a mátrix első és második sorát, mert könnyebben számítjuk ki a rangot, ha az első sor 1-gyel kezdődik. Majd a következő lépésben az első oszlopban az 1 alá nullákat gyártunk le úgy, hogy a második sorból kivonjuk az első sor kétszeresét, valamint a harmadik sorhoz hozzáadjuk az első sor ötszörösét. Ezeket röviden a következőképpen jelölhetjük:
$S_1 \leftrightarrow S_2$, majd a következő lépésben $S_2 - 2S_1$, valamint $S_3 + 5S_1$. Kapjuk, hogy

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix}2&-1&0&1\\1&2&1&1\\-5&1&-1&0\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&2&1&1\\2&-1&0&1\\-5&1&-1&0\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&2&1&1\\0&-5&-2&-1\\0&11&4&5\end{bmatrix} \sim$$

A főátló alá csupa nullát akarunk legyártani, így $S_3 + \frac{11}{5}S_2$ és ugyanitt a második sort (-1)-gyel beszorozzuk, majd a következő lépésben $5 \cdot S_3$ elvégzése után kapjuk, hogy

$$\sim \begin{bmatrix}1&2&1&1\\0&5&2&1\\0&0&-\frac{2}{5}&\frac{14}{5}\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&2&1&1\\0&5&2&1\\0&0&-2&14\end{bmatrix} \sim$$

Most az első sorban szeretnénk nullákat látni a főátló felett, így a második oszlopból kivonva az első oszlop kétszeresét, valamint a harmadik és negyedik oszlopból kivonva az első oszlopot, azaz $O_2 - 2O_1,\ O_3 - O_1,\ O_4 - O_1$ kapjuk, hogy

$$\sim \begin{bmatrix}1&2&1&1\\0&5&2&1\\0&0&-2&14\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&5&2&1\\0&0&-2&14\end{bmatrix} \sim$$

$O_2 : 5,\ O_3 : 2$ után egy következő lépésben $O_3 - O_2,\ O_4 - O_2$ oszlopműveletekkel

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 14 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 14 \end{bmatrix} \sim$$

$O_3 \cdot (-1)$, $O_4 : 14$, majd egy következő lépésben $O_4 - O_3$ és az így kapott mátrixunk már olyan lesz, melyre igaz, hogy minden sorában és oszlopában legfeljebb egy 1-es lesz, és melyben az 1-esek száma már nem csökkenthető:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

és ebben a mátrixban az 1-esek száma 3, ami nem más, mint az $\boldsymbol{A}$ mátrix, és egyben az $\{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}, \boldsymbol{a_4}\}$ vektorrendszer rangja, tehát $\operatorname{rang}\{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}, \boldsymbol{a_4}\} = 3$.

8. **Feladat:** Számítsuk ki az

$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 10 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix inverzét az adjungált mátrix segítségével!

Megoldás: $det\, \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 10 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 10 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 10 & 0 \end{vmatrix} = 1 - 30 - 2 \cdot (0 - 20) = 11 \neq 0$, tehát $\boldsymbol{A}$ invertálható mátrix.

Kiszámítjuk az adjungált mátrixot:

$$adj\, \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 10 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 10 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 10 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 10 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 20 & -10 \\ -2 & -29 & 20 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 20 & -29 & -2 \\ -10 & 20 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ekkor

$$\boldsymbol{A^{-1}} = \frac{1}{det\, \boldsymbol{A}} \cdot adj\, \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{11} & -\frac{2}{11} & \frac{1}{11} \\ \frac{20}{11} & -\frac{29}{11} & -\frac{2}{11} \\ -\frac{10}{11} & \frac{20}{11} & \frac{1}{11} \end{bmatrix}.$$

9. **Feladat:** Számítsuk ki az

$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 10 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix inverzét elemi sorműveletek segítségével!

Megoldás: Felírjuk az $[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{E_3}]$ mátrixot, és látjuk, hogy az első oszlopban a főátló alatt csak egy nem zérus elem áll: a harmadik sorban. Emiatt elvégezzük az $S_3 - 10S_1$ sorműveletet. Most a második oszlopban szeretnénk a főátló alá nullákat legyártani. A következő mátrixot már az $S_3 + 20S_2$ sorművelettel kapjuk:

$$[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{E_3}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ \underbrace{10 \quad 0 \quad 1}_{\boldsymbol{A}} & \multicolumn{3}{|c}{\underbrace{0 \quad 0 \quad 1}_{\boldsymbol{E_3}}} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -20 & -29 & -10 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & -10 & 20 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$\frac{S_3}{11}$, majd a következőkben $S_1 - 3S_3$, illetve $S_2 - 2S_3$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{10}{11} & \frac{20}{11} & \frac{1}{11} \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{41}{11} & -\frac{60}{11} & -\frac{3}{11} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{20}{11} & -\frac{29}{11} & -\frac{2}{11} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{10}{11} & \frac{20}{11} & \frac{1}{11} \end{array}\right] \sim$$

$S_1 - 2S_2$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{11} & -\frac{2}{11} & \frac{1}{11} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{20}{11} & -\frac{29}{11} & -\frac{2}{11} \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 1}_{\boldsymbol{E_3}} & \multicolumn{3}{|c}{\underbrace{-\frac{10}{11} \quad \frac{20}{11} \quad \frac{1}{11}}_{\boldsymbol{A^{-1}}}} \end{array}\right],$$

így az $\boldsymbol{A^{-1}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{11} & -\frac{2}{11} & \frac{1}{11} \\ \frac{20}{11} & -\frac{29}{11} & -\frac{2}{11} \\ -\frac{10}{11} & \frac{20}{11} & \frac{1}{11} \end{bmatrix}$.

10. **Feladat:** Határozza meg azt az $\boldsymbol{X}$ mátrixot, amelyre

$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b^T} \cdot \boldsymbol{X} - \boldsymbol{B} = \boldsymbol{6} \cdot \boldsymbol{X}$, ahol $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Megoldás: Mivel $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b^T} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} [1 \quad 2 \quad 0] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ egy 3x3-as mátrix és $\boldsymbol{B}$ is egy 3x3-as

mátrix, ezért $\boldsymbol{X}$ is egy 3x3-as mátrix, amennyiben létezik.
Az eredeti mátrixegyenlet ekvivalens a következővel:
$\underbrace{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{T}}-\boldsymbol{6E_3})}_{\boldsymbol{D}}\cdot\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}\Leftrightarrow\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$, ahol $\boldsymbol{D}\overset{jel}{=}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{T}}-\boldsymbol{6E_3}$, azaz

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}1&2&0\\2&4&0\\3&6&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}6&0&0\\0&6&0\\0&0&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5&2&0\\2&-2&0\\3&6&-6\end{bmatrix}.$$

Amennyiben létezik a $\boldsymbol{D^{-1}}$ mátrix, a $\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$ mátrixegyenletet balról szorozva a $\boldsymbol{D^{-1}}$ mátrixszal, pontosan a keresett $\boldsymbol{X}$megoldást kapjuk meg. Ehhez ki kell számítanunk a $\boldsymbol{D^{-1}}$ mátrixot. A $\boldsymbol{D}$ mátrix determinánsát legkönnyebben a harmadik oszlopa szerinti kifejtéssel kaphatjuk meg:

$$det\,\boldsymbol{D}=(-6)\begin{vmatrix}-5&2\\2&-2\end{vmatrix}=(-6)(10-4)=-36\neq 0.$$

Kiszámítjuk az $adj\,\boldsymbol{D}$ adjungált mátrixot:

$$adj\,\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}-2&0\\6&-6\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}2&0\\3&-6\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}2&-2\\3&6\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}2&0\\6&-6\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}-5&0\\3&-6\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}-5&2\\3&6\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}2&0\\-2&0\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}-5&0\\2&0\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}-5&2\\2&-2\end{vmatrix}\end{bmatrix}^{T}=\begin{bmatrix}12&12&18\\12&30&36\\0&0&6\end{bmatrix}^{\boldsymbol{T}}=\begin{bmatrix}12&12&0\\12&30&0\\18&36&6\end{bmatrix}.$$

Ekkor

$$\boldsymbol{D^{-1}}=\frac{1}{det\,\boldsymbol{D}}\cdot adj\,\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}-\frac{12}{36}&-\frac{12}{36}&0\\-\frac{12}{36}&-\frac{30}{36}&0\\-\frac{18}{36}&-\frac{36}{36}&-\frac{6}{36}\end{bmatrix}\left(vagy\begin{bmatrix}-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&0\\-\frac{1}{3}&-\frac{5}{6}&0\\-\frac{1}{2}&-1&-\frac{1}{6}\end{bmatrix}\right).$$

A mátrixegyenletünk $\boldsymbol{X}$megoldása pedig

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{D^{-1}}\cdot\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-\frac{12}{36}&-\frac{12}{36}&0\\-\frac{12}{36}&-\frac{30}{36}&0\\-\frac{18}{36}&-\frac{36}{36}&-\frac{6}{36}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2&1&0\\0&1&-1\\1&1&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-\frac{24}{36}&-\frac{24}{36}&\frac{12}{36}\\-\frac{24}{36}&-\frac{42}{36}&\frac{30}{36}\\-\frac{42}{36}&-\frac{60}{36}&-\frac{30}{36}\end{bmatrix}\left(vagy\begin{bmatrix}-\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}&-\frac{7}{6}&\frac{5}{6}\\-\frac{7}{6}&-\frac{5}{3}&\frac{5}{6}\end{bmatrix}\right)$$