

Matematika A2a - Vektorfüggvények, D00 kurzus

A 2. zh témakörei

Gazdálkodási és menedzsment alapszakos hallgatók számára

A zárthelyi dolgozatban 4 feladat lesz az alábbi típusokból! Teszt alakban fogalmazzuk meg a ZH-t, azaz a megoldással kapcsolatos kérdésekre kell válaszolniuk. Rossz válaszáért nem jár pontlevonás. (A ZH 45 perces lesz és max. 20 pontot lehet elérni.)

1. Feladat (Gauss-Jordan módszer):

Oldjuk meg Gauss-Jordan módszerrel az alábbi lineáris egyenletrendszert! (Azaz kérjük az elemi sorműveletek használatát a redukált lépcsős alakig!)

$$\begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ 2x - y + 2z = -4 \\ 4x + y + 4z = -2. \end{cases}$$

Megoldás (nagyon részletes magyarázattal):

Tulajdonképpen az egyenletrendszer három egyenlete az $\mathbb{R}^3$ térben 3 sík. Mi lehet a metszetük (azaz az egyenletrendszer megoldása)?

- $\emptyset$, amennyiben a három síknak nincs közös pontja, mert pl. kettő közülük párhuzamos;
- 1 megoldás, ha a három sík egy pontban metszi egymást;
- ∞ megoldás, abból is két lehetőség: vagy egy egyenesben metszik egymást és akkor 1 a szabadságfok, vagy egy síkban, mikor egybeesik a három sík, akkor meg 2 a szabadságfok.

A lineáris egyenletrendszerünk mátrixos alakja

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

ahol $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ és $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}$. Elkezdjük elemi sortranszformációkkal átalakítani a kibővített mátrixot. Először a főátló alá gyártunk le 0-kat

balról jobbra haladva, tehát először az első oszlopban, a következő lépésben a másodikban, stb.: $S_2 - 2S_1$; $S_3 - 4S_1$, majd a következő mátrixhoz $S_3 - S_2$ és $S_2 \cdot (-1)$:

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & 4 & -2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -4 & 2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{array} \right] \sim$$

Ha csak Gauss-módszert kértünk volna, akkor vége lenne, mert tiszta nulla sor nem állítható elő. Ekkor visszahelyettesítésekkel megkapnánk a megoldásokat. Most viszont Gauss-Jordan módszert kért a feladat szövege, így folytatjuk azzal, hogy a főelemek oszlopában minden más elemet kinullázunk és a vezéregyeseket is legyártjuk. Előtte viszont még $S_3 : (-2)$, utána meg $S_1 - 2S_3$, $S_2 - 2S_3$, majd $S_2 : 3$. A legvégén $S_1 - S_2$:

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right],$$

ahonnan kiolvasható a megoldás:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = -2, \end{cases}$$

másképp felírva $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$, azaz pontosan egy megoldásunk van (mert $\text{rang } \mathbf{A} = \text{rang } [\mathbf{A}|\mathbf{b}] = 3 = n$, azaz a rang az ismeretlenek számával egyenlő).

Megjegyzés az 1. Feladathoz: természetesen, azt nem garantálom, hogy olyan egyenletrendszer lehet csak a zh-ban, melynek pontosan egy megoldása van. A megoldás elején részleteztem, hogy milyen esetek lehetségesek. Kérem, hogy az összes Gauss-Jordan módszeres feladatot nézzék át, melyet gyakorlaton vagy előadáson vettünk.

2. Feladat (Gauss-Jordan módszer vagy Gauss-Jordan elimináció; a hozzárendelt homogén lineáris egyenletrendszer megoldáshalmaza;

annak egy bázisa):

Oldjuk meg Gauss-Jordan módszerrel az alábbi lineáris egyenletrendszert!
 (Azaz kérjük az elemi sorműveletek használatát a redukált lépcsős alakig!)
 Mennyi az együtthatómátrix rangja és az egyenletrendszer szabadságfoka?
 Írjuk fel a hozzárendelt homogén lineáris egyenletrendszer általános megoldását
 és a megoldáshalmaz egy bázisát!

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2 \\ 9x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 - 2x_5 = 5 \\ x_1 - x_2 - x_4 + 2x_5 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2. \end{cases}$$

Megoldás (nagyon részletes magyarázattal):

A lineáris egyenletrendszer mátrixos alakja

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\text{ahol } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 9 & 1 & -2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -3 & 4 \end{bmatrix}; \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \text{ és } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}. \text{ Elkezdjük elemi}$$

sortranszformációkkal átalakítani a kibővített mátrixot. Először $S_1 \leftrightarrow S_4$, majd a főátló alá gyártunk le 0-kat balról jobbra haladva, tehát először az első oszlopban, a következő lépésben a másodikban, stb.: $S_2 - 9S_1$; $S_3 - S_1$, $S_4 - 3S_1$:

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}|\mathbf{b}] &= \left[\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & -1 & -1 & 0 & 2 \\ 9 & 1 & -2 & -1 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -3 & 4 & 2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -3 & 4 & 2 \\ 9 & 1 & -2 & -1 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & -1 & 0 & 2 \end{array} \right] \sim \\ &\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & -8 & 7 & 26 & -38 & -13 \\ 0 & -2 & 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 8 & -12 & -4 \end{array} \right] \sim \end{aligned}$$

Utána $S_4 : (-2)$, $S_2 \leftrightarrow S_4$, majd $S_3 + 2S_2$, $S_4 + 8S_2$, majd $S_3 \cdot (-1)$ és $S_4 - S_3$ elvégzése után kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} & \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -4 & 6 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & -8 & 7 & 26 & -38 & -13 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -4 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 10 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 10 & 3 \end{array} \right] \sim \\ & \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -4 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -10 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Ennyi kéne, ha csak Gauss-módszert kértünk volna, mert a fenti mátrixból látszik már, hogy csupán ez az egy tiszta nulla sor volt legyártható és készen van a lépcsős alak (az nem kötelező lépcsős alak esetén, hogy minden vezéregyes legyen egyben, de láthatjuk, itt most ez is igaz). Már három vezéregyesünk van, készül a redukált lépcsős alak: elhagyjuk az utolsó tiszta nulla sort, majd a vezérelemek fölé is nullákat gyártunk le jobbról balra (tehát visszafelé) haladva: $S_1 + S_3$, $S_2 + S_3$, majd $S_1 - S_2$:

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -10 & -3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -10 & -3 \end{array} \right].$$

Megkaptuk a redukált lépcsős alakot. Három vezéregyesünk van, így $\text{rang } \mathbf{A} = \text{rang}[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = 3$, ami kisebb, mint az ismeretlenek száma, ami $n = 5$. A lineáris egyenletrendszerek alaptételéből következik, hogy végtelen sok megoldásunk van, lineáris egyenletrendszerünk szabadságfoka $5 - 3 = 2$, azaz az ismeretlenek száma mínusz a rang. Szabad ismeretlenek x_4 és x_5 lesznek, mert a negyedik és ötödik oszlopban nincs vezéregyes, így $x_4 = u$ és $x_5 = v$, ahol $u, v \in \mathbb{R}$ a szabad ismeretlenek, a többi kötött ismeretlen:

$$\begin{cases} x_1 = & -u & +2v \\ x_2 = & -1 - 2u & +4v \\ x_3 = & -3 - 6u & +10v \\ x_4 = & u \\ x_5 = & & v \end{cases} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 10 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

ahol $u, v \in \mathbb{R}$.

A hozzárendelt homogén lineáris egyenletrendszer általános megoldása:

$$\mathbf{x}_{\text{hom}} = u \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 10 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

ahol $u, v \in \mathbb{R}$, azaz $\mathbb{R}^5$ egy 2 dimenziós altere. Ennek egy bázisa például

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 10 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

3. Feladat (Paraméteres lineáris egyenletrendszerek):

A $p, q \in \mathbb{R}$ paraméterek értékétől függően tárgyaljuk és oldjuk meg Gauss-eliminációval a következő lineáris egyenletrendszert:

$$\begin{cases} x & +y & +z = & 2q \\ 2x & -3y & +2z = & 4q \\ 3x & -2y & +pz = & q. \end{cases}$$

Megoldás (nagyon részletes magyarázattal):

Az egyenletrendszer mátrixos alakja

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\text{ahol } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & p \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ és } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2q \\ 4q \\ q \end{bmatrix}, \text{ ahol } p, q \in \mathbb{R}.$$

Amint a 12. előadás elején is említettük, és a 13. előadás elején konkrét példában láttuk is, paraméteres lineáris egyenletrendszerek tárgyalásakor elegendő Gauss-módszerrel dolgozni: elkezdjük elemi sortranszformációkkal átalakítani a kibővített mátrixot. Először a főátló alá gyártunk le 0-kat balról

jobbra haladva, tehát először az első oszlopban, a következő lépésben a másodikban, stb.: $S_2 - 2S_1$; $S_3 - 3S_1$, majd $S_3 - S_2$ és $S_2 : (-5)$:

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}|\mathbf{b}] &= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2q \\ 2 & -3 & 2 & 4q \\ 3 & -2 & p & q \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2q \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & p-3 & -5q \end{array} \right] \sim \\ &\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2q \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p-3 & -5q \end{array} \right] \sim \end{aligned}$$

- A megoldáshalmaz üres $\Leftrightarrow 2 = \text{rang } \mathbf{A} < 3 = \text{rang } [\mathbf{A}|\mathbf{b}] \Leftrightarrow \begin{cases} p-3 = 0 \\ -5q \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 3 \\ q \neq 0. \end{cases}$

Ekkor azt is mondjuk, hogy a lineáris egyenletrendszerünk *inkonzisztens*, vagy *inkompatibilis*, vagy *összeférhetetlen*.

- Pontosan egy megoldás van $\Leftrightarrow \text{rang } \mathbf{A} = \text{rang } [\mathbf{A}|\mathbf{b}] = 3 \Leftrightarrow p-3 \neq 0$, azaz $p \neq 3$ és $\forall q \in \mathbb{R}$ esetén. Ekkor a megoldás nem más, mint az

$$\begin{cases} x + y + z = 2q \\ y = 0 \\ (p-3)z = -5q \end{cases}$$

lineáris egyenletrendszer megoldása (ez már a lépcsős alak), melyet alulról fölfelé történő helyettesítéssel oldunk meg, azaz $y = 0$, $z = \frac{-5q}{p-3}$ és

$$x = 2q + \frac{5q}{p-3} = \frac{2pq - q}{p-3} = \frac{q(2p-1)}{p-3}.$$

- ∞ sok megoldása van a lineáris egyenletrendszernek $\Leftrightarrow \text{rang } \mathbf{A} = \text{rang } [\mathbf{A}|\mathbf{b}] = 2 < 3 \Leftrightarrow \begin{cases} p-3 = 0 \\ q = 0 \end{cases}$, azaz $p = 3$ és $q = 0$ esetben.

Ekkor

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right],$$

amennyiben $S_1 - S_2$. A szabadságfok $3 - 2 = 1$ és egyedül a z oszlopában nincs vezéregyes, így csak ő lehet a szabad ismeretlen, amit jelöljünk t -vel.

Kapjuk, hogy $z = t$, ahol $t \in \mathbb{R}$ szabad ismeretlen és $\begin{cases} x + t = 0 \\ y = 0 \end{cases}$, ahonnan a megoldáshalmaz paraméteres alakja

$$\begin{cases} x = -t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$$

ahol $t \in \mathbb{R}$. Másképp felírva:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

ahol $t \in \mathbb{R}$, azaz a 3 dimenziós térben egy origón átmenő, $(-1, 0, 1)$ irányvektorú egyenes összes pontja a megoldás.

4. Feladat (Szimmetrikus harmadrendű mátrix sajátértékei, sajátvektorei; diagonalizáló mátrix megadása):

Diagonalizálható-e az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrix? Ha igen, akkor adjon meg egy diagonalizáló mátrixot!

Megoldás (nagyon részletes magyarázattal):

A karakterisztikus polinom

$$p(\lambda) := \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 3 \\ 0 & 3 - \lambda & 0 \\ 3 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}.$$

A determinánst első sora szerint kifejtve kapjuk, hogy egyenlő $(-\lambda)(3 - \lambda)(-\lambda) + 3 \cdot (\lambda - 3) \cdot 3 = (\lambda - 3)(9 - \lambda^2)$ -tel. A sajátértékek a $(\lambda - 3)(9 - \lambda^2) = 0$

karakterisztikus egyenlet megoldásai, azaz $\lambda_1 = -3$ és $\lambda_{2,3} = 3$.

A $\lambda_1 = -3$ -hoz tartozó $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \end{bmatrix}$ sajátvektorokat behelyettesítve a

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 3 \\ 0 & 3 - \lambda & 0 \\ 3 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

mátrixegyenletbe, kapjuk, hogy

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ebből $v_{11} = -v_{31}$ és $v_{21} = 0$, azaz a $\lambda_1 = -3$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ -t \end{bmatrix} \text{ alakúak, ahol } t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \text{ ilyenkor például egy reprezentáns}$$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Most megmutatjuk, hogy a $\lambda_{2,3} = 3$ kétszeres sajátértékhez két lineárisan független sajátvektor is tartozik, mert egy tetszőleges, 3-hoz tartozó

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ v_{32} \end{bmatrix} \text{ sajátvektort behelyettesítve a}$$

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 3 \\ 0 & 3 - \lambda & 0 \\ 3 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ v_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

mátrixegyenletbe, kapjuk, hogy

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ v_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Innen a $v_{12} = v_{32}$ egyenletet kapjuk csak. Előző számításunknál volt 2 különböző egyenletünk, ez most csak egy egyenlet! Szimmetrikus az $\mathbf{A}$

mátrix, így a $\lambda_2 = 3$ dupla sajátértékhez két lineárisan független sajátvektor is tartozik, ilyenek pl. a $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ és a $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ vektorok.

A harmadrendű $\mathbf{A}$ mátrixnak van tehát három lineárisan független sajátvektora, ezért diagonalizálható.

Ebben az esetben egy diagonalizáló mátrix:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ennek az oszlopvektorai az $\mathbf{A}$ mátrix sajátvektorai.

(Megjegyezzük, hogy a feladat nem kérte, hogy ortonormált diagonalizáló mátrixot adjunk. Ha kérte volna, akkor a fenti sajátvektorok egységvektorai lennének az ortonormált diagonalizáló mátrix oszlopvektorai.)

5. Feladat (Parciális deriváltak, gradiens, másodrendű parciális deriváltak, Hesse-mátrix):

Tekintsük az

$$f(x, y) = \frac{x^2 - 2y^2}{xy}, \quad x, y \in (0, \infty)$$

függvényt.

- Számítsuk ki a függvény x és y változók szerinti parciális deriváltjait!
- Adjuk meg a $\text{grad } f(1, 2)$ értékét!
- Számítsuk ki a másodrendű parciális deriváltakat az $(x_0, y_0) = (1, 2)$ pontban!
- Írjuk fel a függvény Hesse-mátrixát!

Megoldás (nagyon részletes magyarázattal):

$$\begin{aligned} (a) \quad f'_x(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{y} \cdot \left(\frac{x^2 - 2y^2}{x} \right)'_x = \frac{1}{y} \cdot \frac{2x \cdot x - (x^2 - 2y^2) \cdot 1}{x^2} = \\ &= \frac{2x^2 - x^2 + 2y^2}{x^2 y} = \frac{x^2 + 2y^2}{x^2 y}. \end{aligned}$$

Vagy akár kiszámíthattuk volna a következőképpen is:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \left(\frac{x}{y} - \frac{2y}{x} \right)'_x = \frac{1}{y} \cdot 1 - 2y \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) = \frac{1}{y} + \frac{2y}{x^2} = \frac{x^2 + 2y^2}{x^2 y}.$$

Az y -szerinti parciális derivált pedig:

$$f'_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \left(\frac{x}{y} - \frac{2y}{x} \right)'_y = x \cdot \left(-\frac{1}{y^2} \right) - \frac{2}{x} = \frac{-x^2 - 2y^2}{xy^2}.$$

(b) A gradiens vektor általában:

$$\nabla f(x, y) = \underline{\text{grad}} f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right),$$

$$f'_x(1, 2) = \frac{1^2 + 2 \cdot 2^2}{1^2 \cdot 2} = \frac{1 + 8}{2} = \frac{9}{2} \text{ és } f'_y(1, 2) = \frac{-1^2 - 2 \cdot 2^2}{1 \cdot 2^2} = \frac{-1 - 8}{4} = -\frac{9}{4},$$

így a gradiens vektor az $(1, 2)$ pontban:

$$\nabla f(1, 2) = \underline{\text{grad}} f(1, 2) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2), \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) \right) = \left(\frac{9}{2}, -\frac{9}{4} \right),$$

(c) A másodrendű parciális deriváltak a következők (most több egyenértékű jelölést használunk, de máskor elég csak egyiket ideírni):

$$\begin{aligned} f''_{xx}(x, y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \left(\frac{x^2 + 2y^2}{x^2 y} \right)'_x = \left(\frac{1}{y} + \frac{2y}{x^2} \right)'_x = \\ &= 0 + 2y \cdot (x^{-2})'_x = 0 + 2y \cdot (-2) \cdot x^{-3} = 2y \cdot \left(\frac{-2}{x^3} \right) = -\frac{4y}{x^3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''_{yy}(x, y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \left(\frac{-x^2 - 2y^2}{xy^2} \right)'_y = \left(-\frac{x}{y^2} - \frac{2}{x} \right)'_y = \\ &= -x \cdot (y^{-2})'_y = -x \cdot (-2)y^{-3} = 2xy^{-3} = \frac{2x}{y^3}, \end{aligned}$$

Young tétele miatt a vegyes másodrendű parciális deriváltak egyenlők, így mindegy, melyiket számítjuk ki:

$$\begin{aligned}
f''_{xy}(x, y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \left(\frac{x^2 + 2y^2}{x^2 y} \right)'_y = \left(\frac{1}{y} + \frac{2y}{x^2} \right)'_y = \\
&= -\frac{1}{y^2} + \frac{2}{x^2} = \frac{2y^2 - x^2}{x^2 y^2}.
\end{aligned}$$

Így ezekbe behelyettesítve az $x = 1$ és $y = 2$ értékeket, kapjuk, hogy

$$f''_{xx}(1, 2) = -\frac{4 \cdot 2}{1^3} = -8; \quad f''_{yy}(1, 2) = \frac{2 \cdot 1}{2^3} = \frac{1}{4},$$

míg a vegyes másodrendű parciális deriváltak

$$f''_{xy}(1, 2) = f''_{yx}(1, 2) = \frac{2 \cdot 2^2 - 1^2}{1^2 \cdot 2^2} = \frac{8 - 1}{4} = \frac{7}{4}.$$

(d) Tetszőleges kétváltozós f függvény Hesse-mátrixa:

$$\mathbf{f}''(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f''_{xx}(x, y) & f''_{xy}(x, y) \\ f''_{yx}(x, y) & f''_{yy}(x, y) \end{bmatrix}.$$

Ugyanezt szoktuk még a következőképpen is jelölni (ezt a jelölést is ismernünk kell!):

$$\mathbf{f}''(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \partial_{11} f(x, y) & \partial_{12} f(x, y) \\ \partial_{21} f(x, y) & \partial_{22} f(x, y) \end{bmatrix}.$$

Az f függvény Hesse mátrixa:

$$\mathbf{f}''(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -\frac{4y}{x^3} & \frac{2y^2 - x^2}{x^2 y^2} \\ \frac{2y^2 - x^2}{x^2 y^2} & \frac{2x}{y^3} \end{bmatrix}.$$

6. Feladat (Íránymenti derivált kiszámítása):

Számítsuk ki az

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x e^{xy} - xy$$

függvény $\mathbf{v} = (3, 4)$ irány mentén vett iránymenti deriváltját az $(1, 0)$ pontban!

Megoldás (nagyon részletes magyarázattal):

Az $f(x, y)$ függvény $\mathbf{v}$ irány mentén vett *iránymenti deriváltja*

$$\partial_{\mathbf{v}} f(x, y) = f'_{\mathbf{v}}(x, y) = \underline{\text{grad} f} \cdot \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}.$$

Ehhez szükségünk van az f függvény parciális deriváltjaira:

$$f'_x(x, y) = (xe^{xy} - xy)'_x = e^{xy} + xe^{xy} \cdot y - y = e^{xy}(1 + xy) - y, \text{ és}$$

$$f'_y(x, y) = (xe^{xy} - xy)'_y = xe^{xy} \cdot x - x = x^2 e^{xy} - x,$$

így az $(1, 0)$ pont koordinátáit behelyettesítve, kapjuk, hogy

$$f'_x(1, 0) = e^0(1 + 0) - 0 = 1 \text{ és } f'_y(1, 0) = 1 \cdot e^0 - 1 = 0.$$

A $\underline{v} = (3, 4)$ vektor egységvektora $\frac{\underline{v}}{|\underline{v}|} = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$. A gradiens a kért pontban $\underline{\text{grad} f}(1, 0) = (1, 0)$, míg az iránymenti derivált

$$f'_{\underline{v}}(1, 0) = (1, 0) \cdot \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = \frac{3}{5}.$$

7. Feladat (Érintősík):

Mutassuk meg, hogy a $P_0(1, 1, 3)$ pont rajta van a

$$z = (y + x^2)(y - x^3) + 3, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

egyenletű felületen! Írjuk fel ebben a pontban a felület érintősíkjának az egyenletét! Adjuk meg az érintősík egy normálvektorát!

Megoldás (nagyon részletes magyarázattal):

Legyen

$$z = f(x, y) = (y + x^2)(y - x^3) + 3, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

A $P_0(1, 1, 3)$ pont rajta van a felületen $\Leftrightarrow f(1, 1) = 3 \Leftrightarrow$

$$(1 + 1^2)(1 - 1^3) + 3 = 3 \Leftrightarrow 3 = 3, \text{ ami igaz.}$$

A $z = f(x, y)$ felület $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ pontjában az érintősík egyenlete (ha létezik):

$$z - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Ehhez a következőket kell kiszámítanunk:

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= [(y+x^2)(y-x^3)+3]'_x = (y+x^2)'_x(y-x^3) + (y+x^2)(y-x^3)'_x + 0 = \\ &= 2x(y-x^3) + (y+x^2)(-3x^2) = 2xy - 2x^4 - 3x^2y - 3x^4 = -5x^4 - 3x^2y + 2xy, \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} f'_y(x, y) &= [(y+x^2)(y-x^3)+3]'_y = (y+x^2)'_y(y-x^3) + (y+x^2)(y-x^3)'_y + 0 = \\ &= 1 \cdot (y-x^3) + (y+x^2) \cdot 1 = -x^3 + x^2 + 2y. \end{aligned}$$

Így

$$f'_x(1, 1) = -5 \cdot 1^4 - 3 \cdot 1^2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 = -5 - 3 + 2 = -6,$$

$$f'_y(1, 1) = -1^3 + 1^2 + 2 \cdot 1 = 2,$$

és az $(1, 1, f(1, 1)) = (1, 1, 3)$ pontban tekintett érintősík egyenlete:

$$z - 3 = -6(x - 1) + 2(y - 1), \text{ azaz } -6x + 2y - z + 7 = 0,$$

ezért ennek az érintősíknak egy normálvektora $\mathbf{n} = (-6, 2, -1)$.

8. Feladat (Vektor-vektor függvény Jacobi-mátrixa):

Számítsuk ki az

$$\mathbf{f}(x, y, z) = (1 - x^2 + y^2 - z^2, e^{2x} - y^2 \ln(x^2 + z^2 + 1), 1 + x^2 + y^2 + 5xz), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

háromváltozós vektor-vektor függvény $\mathbf{f}'(\mathbf{a})$ Jacobi-mátrixát az $\mathbf{a} = (1, 2, 0)$ pontban!

Megoldás (nagyon részletes magyarázattal):

Vektor-vektor függvények Jacobi-mátrixa (derivált mátrixa) a következő:

Legyen $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, azaz $\forall \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D_{\mathbf{f}}$,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(x_1, x_2, \dots, x_n) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x})),$$

ahol $f_i \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ az i -edik koordinátafüggvény. Ha $\mathbf{f} \in D\{\mathbf{a}\}$ (azaz $\mathbf{f}$ deriválható az $\mathbf{a}$ -ban), akkor $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ és $\forall j \in \{1, 2, \dots, m\}$ létezik f_j -nek x_i szerinti parciális deriváltja $\mathbf{a}$ -ban, és ezeket mátrixba rendezve kapjuk az $\mathbf{f}$ függvény $\mathbf{a}$ -ban vett derivált mátrixát, vagy Jacobi-mátrixát, azaz

$$\mathbf{f}'(\mathbf{a}) = \frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_m)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{a}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{a}) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\mathbf{a}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

Megjegyezzük, hogy a $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\mathbf{a})$ helyett szoktuk a $\partial_i f_j$ jelölést is használni, ezt is ismerni kell.

A mi esetünkben $f_1(x, y, z) = 1 - x^2 + y^2 - z^2$, $f_2(x, y, z) = e^{2x} - y^2 \ln(x^2 + z^2 + 1)$ és $f_3(x, y, z) = 1 + x^2 + y^2 + 5xz$.

A fenti általános képlet miatt a kért Jacobi-mátrix:

$$\mathbf{f}'(1, 2, 0) = \frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(x, y, z)}(1, 2, 0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(1, 2, 0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(1, 2, 0) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(1, 2, 0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(1, 2, 0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(1, 2, 0) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(1, 2, 0) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(1, 2, 0) & \frac{\partial f_3}{\partial y}(1, 2, 0) & \frac{\partial f_3}{\partial z}(1, 2, 0) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

Ehhez szükségünk van az összes f_i , ($i = 1, 2, 3$) összes változó szerinti parciális deriváltra:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y, z) = (1 - x^2 + y^2 - z^2)'_x = -2x, \text{ azaz } \frac{\partial f_1}{\partial x}(1, 2, 0) = -2;$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y, z) = (1 - x^2 + y^2 - z^2)'_y = 2y, \text{ azaz } \frac{\partial f_1}{\partial y}(1, 2, 0) = 4;$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial z}(x, y, z) = (1 - x^2 + y^2 - z^2)'_z = -2z, \text{ azaz } \frac{\partial f_1}{\partial z}(1, 2, 0) = 0;$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y, z) = (e^{2x} - y^2 \ln(x^2 + z^2 + 1))'_x = 2e^{2x} - y^2 \cdot \frac{1}{x^2 + z^2 + 1} \cdot 2x,$$

$$\text{azaz } \frac{\partial f_2}{\partial x}(1, 2, 0) = 2e^2 - 4;$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y, z) = (e^{2x} - y^2 \ln(x^2 + z^2 + 1))'_y = -\ln(x^2 + z^2 + 1) \cdot 2y = -2y \ln(x^2 + z^2 + 1),$$

$$\text{azaz } \frac{\partial f_2}{\partial y}(1, 2, 0) = -4 \ln 2;$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial z}(x, y, z) = (e^{2x} - y^2 \ln(x^2 + z^2 + 1))'_z = -y^2 \cdot \frac{1}{x^2 + z^2 + 1} \cdot 2z,$$

azaz $\frac{\partial f_2}{\partial z}(1, 2, 0) = 0$;

$$\frac{\partial f_3}{\partial x}(x, y, z) = (1 + x^2 + y^2 + 5xz)'_x = 2x + 5z, \text{ azaz } \frac{\partial f_3}{\partial x}(1, 2, 0) = 2;$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial y}(x, y, z) = (1 + x^2 + y^2 + 5xz)'_y = 2y, \text{ azaz } \frac{\partial f_3}{\partial y}(1, 2, 0) = 4;$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial z}(x, y, z) = (1 + x^2 + y^2 + 5xz)'_z = 5x, \text{ azaz } \frac{\partial f_3}{\partial z}(1, 2, 0) = 5.$$

Így a kért Jacobi-mátrix (vagy derivált mátrix)

$$\mathbf{f}'(1, 2, 0) = \frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(x, y, z)}(1, 2, 0) = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 2e^2 - 4 & -4 \ln 2 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

9. Feladat (Lokális szélsőértékszámítás):

Határozzuk meg az

$$f(x, y) = x^3 - 3x^2 + 2xy + y^2, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

függvény lokális szélsőérték helyeit és lokális szélsőértékeit!

Megoldás (nagyon részletes magyarázattal):

Mivel f kétszer deriválható függvény $\mathbb{R}^2$ -en (sőt, akárhányszor deriválható $\mathbb{R}^2$ -en), lokális szélsőérték helyei az

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0 \end{cases}$$

egyenletrendszer megoldásai lehetnek (a lokális szélsőértékekre vonatkozó elsőrendű szükséges feltétel miatt).

$$f'_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 6x + 2y = 0;$$

$$f'_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x + 2y = 0.$$

Megoldjuk a

$$\begin{cases} 3x^2 - 6x + 2y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases}$$

egyenletrendszert. A második egyenletből $y = -x$, ezt visszahelyettesítve az első egyenletbe, kapjuk, hogy

$$3x^2 - 6x - 2x = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 8x = 0 \Leftrightarrow x(3x - 8) = 0,$$

ahonnan az egyenletrendszer megoldásai $\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases}$ és $\begin{cases} x_2 = \frac{8}{3} \\ y_2 = -\frac{8}{3} \end{cases}$, azaz a

lehetséges lokális szélsőérték helyek $(0, 0)$ és $(\frac{8}{3}, -\frac{8}{3})$.

Alkalmazzuk ezekre a másodrendű elégséges feltételt. Előtte kiszámítjuk a függvény Hesse-mátrixát:

$$f''_{xx}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = (3x^2 - 6x + 2y)'_x = 6x - 6;$$

$$f''_{yy}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = (2x + 2y)'_y = 2,$$

és Young tétele miatt $f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y)$, így elegendő csak $f''_{xy}(x, y)$ -t kiszámítani:

$$f''_{xy}(x, y) = (3x^2 - 6x + 2y)'_y = 2.$$

A Hesse-mátrix tehát:

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} 6x - 6 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Először azt vizsgáljuk meg, hogy lokális szélsőérték hely-e a $(0, 0)$:

$$H(0, 0) = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ennek determinánsa $-16 < 0$, így a $H(0, 0)$ mátrix indefinit, azaz $(0, 0)$ nem lokális szélsőérték hely. (A $(0, 0, f(0, 0)) = (0, 0, 0)$ nyeregpont.)

$$H\left(\frac{8}{3}, -\frac{8}{3}\right) = \begin{bmatrix} 6 \cdot \frac{8}{3} - 6 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ennek a determinánsa $10 \cdot 2 - 2 \cdot 2 = 16 > 0$, és első sorában, első oszlopában lévő eleme $10 > 0$, így a $H(\frac{8}{3}, -\frac{8}{3})$ mátrix pozitív definit, és a lokális szélsőértékekre vonatkozó másodrendű elégséges feltétel miatt $(\frac{8}{3}, -\frac{8}{3})$ egy lokális minimumhely, az $f((\frac{8}{3}, -\frac{8}{3})) = (\frac{8}{3})^3 - 3 \cdot (\frac{8}{3})^2 + 2 \cdot \frac{8}{3} \cdot (-\frac{8}{3}) + (-\frac{8}{3})^2 = (\frac{8}{3})^2 (\frac{8}{3} - 3 - 2 + 1) = (\frac{8}{3})^2 (\frac{8}{3} - 4) = -\frac{256}{27}$ pedig a lokális minimum (érték).