

## Matematika A1a - Analízis, Közgazdász hallgatóknak

Készítette: Fülöp Ottilia

### *1. Gyakorlat feladatai: Bevezető feladatok (Egyenletek, egyenlőtlenségek megoldása. Függvénytranszformációk. Halmazok)*

Hasonló feladatokat találnak a Neptunban, az Információk menü legördítésével, a Neptun elektronikus tananyagok, azon belül pedig az **Egyváltozós valós függvények** interaktív e-tananyag kiválasztásával. (Ennek a tananyagnak a szerzői Dr. Fülöp Ottilia, Szűcs Zsolt, lektorai Dr. Nágel Árpád, Dr. Nagy Katalin)

#### 1. Feladat (Egyenletek megoldása):

Oldjuk meg  $\mathbb{R}$ -en a következő egyenleteket és szemléltessük megoldáshalmazukat a számegyenesen:

a)  $x + 2 = \sqrt{4x + 13}$ ;

b)  $\left| \frac{3x+2}{x-1} \right| = 3$ .

#### 2. Feladat (Abszolútértékes egyenlőtlenség megoldása):

Oldjuk meg  $\mathbb{R}$ -en a következő egyenlőtlenséget és szemléltessük a megoldáshalmazt a számegyenesen:

$$\left| \frac{x}{2} + 2 \right| \leq 3.$$

#### 3. Feladat (Függvénytranszformációk):

Ábrázoljuk függvénytranszformációkkal a következő függvényt:

$$f(x) = x^2 - 6x + 8, \quad x \in \mathbb{R}.$$

#### 4. Feladat (Egyenlőtlenségrendszer felírása):

Írjunk fel olyan egyenlőtlenségrendszert, melynek megoldáshalmaza az  $A(0, 0)$ ,  $B(0, 5)$  és  $C(1, 3)$  csúcpontú háromszög belseje!

**5. Feladat (Halmazműveletek):**

Bizonyítsuk be, hogy az

$$A = \{1, 2, 10\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geq 1\}$$

halmazok esetén  $A \subseteq C$ ,  $A \neq C$ ,  $B \subseteq C$ ,  $B \neq C$ ,  $A \not\subseteq B$  és  $B \not\subseteq A$ !

**6. Feladat (Indirekt bizonyítás):**

Bizonyítsuk be indirekt, hogy  $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$ !

***2. Gyakorlat feladatai: Polinomok***

**1. Feladat (Egyszerű gyöktényezős alakra hozás):**

Alakítsa szorzattá az alábbi polinomokat:

a)  $p(x) = x^2 + 7x + 10$ ;

b)  $q(x) = -2x^2 + 7x - 3$ .

**2. Feladat (Maradékös polinomosztás):**

Végezzük el a  $p(x) : q(x)$  polinomosztást, ha  $p(x) = 2x^4 - x^2 - 5x + 6$  és  $q(x) = x^2 - 3x$ . Ellenőrizzük az osztás helyességét is!

**3. Feladat (Polinom egész gyökeinek megkeresése):**

Keressük meg a  $p(x) = x^3 - x^2 - 25x + 25$  polinom egész gyökeit!

**4. Feladat (Polinom valós gyökeinek megkeresése és a gyöktényezős alak felírása, I.):**

Keressük meg a  $p(x) = x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 2x - 3$  polinom valós gyökeit! Írjuk fel a polinom gyöktényezős alakját!

**5. Feladat (Polinom gyökeinek megkeresése és a gyöktényezős alak felírása, II.):**

A  $c$  valós paraméter mely értékére lesz  $x_1 = 1$  gyöke a  $p(x) = 4x^4 + cx^3 - 3x^2 - 4x - 1$  polinomnak? Írjuk fel a kapott  $c$  érték esetében a  $p(x)$  polinom összes valós gyökét és a  $p(x)$  polinom  $\mathbb{R}$ -beli gyöktényezős alakját!

**6. Feladat (Egy paraméteres feladat):**

A  $b$  valós paraméter mely értékére lesz  $x_1 = -1$  legalább kétszeres gyöke a  $p(x) = x^5 - bx^2 - bx + 1$  polinomnak?

**3. Gyakorlat feladatai: Függvénykompozíció. Inverz függvény**

**1. Feladat (Egyváltozós valós-valós függvény értelmezési tartománya):**

Adjuk meg az  $\mathbb{R}$  lehető legbővebb részhalmazát, amelyen értelmezhető az

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x-1}}{3x+2} \log_{\frac{1}{3}} |2x-1|.$$

**2. Feladat (Függvénykompozíció, I.):**

Írjuk fel az  $f \circ g$  és  $g \circ f$  összetett függvényeket (ha léteznek) az alábbi esetben:  $f(x) = x^3$ ,  $x \in \mathbb{R}$  és  $g(x) = \sqrt[6]{x}$ ,  $x \in [0, \infty)$ .  
Mit veszünk észre?

**3. Feladat (Függvénykompozíció, II.):**

Írjuk fel az  $f \circ g$  és  $g \circ f$  összetett függvényeket (ha léteznek) az alábbi esetekben:

- a)  $f(x) = 1 - x^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$  és  $g(x) = \sqrt{x}$ ,  $x \geq 0$ ;
- b)  $f(x) = x^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$  és  $g(x) = 2^x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

#### 4. Feladat (Invertálhatóság vizsgálata):

Bizonyítsuk be, hogy az

$$f(x) = |x^2 - 7x + 12|, \quad x \in \mathbb{R}$$

függvény nem invertálható!

#### 5. Feladat (Inverz függvény felírása, I.):

Bizonyítsuk be, hogy az

$$f(x) = \frac{x-2}{2x+3}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}\right\}$$

függvény invertálható és állítsuk elő az inverz függvényt is!

#### 6. Feladat (Inverz függvény felírása, II.):

Bizonyítsuk be, hogy az

$$f(x) = \frac{x+1}{x-2}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

függvény invertálható és állítsuk elő az inverz függvényt is!

#### 7. Feladat (Egy érdekes függvény inverze):

Bizonyítsuk be, hogy az

$$f(x) = \sqrt[3]{27 - x^3}, \quad x \in \mathbb{R}$$

függvény invertálható és állítsuk elő az inverz függvényt is! Mit veszünk észre?

*4. Gyakorlat feladatai: Numerikus sorozatok határértéke. Függvényhatárértékek. Folytonosság. Szakadási helyek típusai*

**A numerikus sorozatok határértékével kapcsolatos összefoglaló (előadáson volt)**

Határértékszámításkor (legyen az numerikus sorozat határértéke vagy függvényhatárérték) mindig azzal kezdünk, hogy *behelyettesítünk*. Sorozatok határértékszámítása esetén  $n$  helyére  $\infty$ -t helyettesítünk. Lehet, hogy behelyettesítés után azonnal eredményhez jutunk, például a következő esetekben:

$$\infty + \infty = \infty; \quad -\infty - \infty = -\infty; \quad \infty \cdot (-\infty) = -\infty; \quad \frac{k}{\pm\infty} = 0;$$

$$\forall k > 0 \text{ esetén } k \cdot 0 = 0; \quad k \cdot \infty = \infty; \quad (-k) \cdot \infty = -\infty.$$

Az is lehet, hogy behelyettesítés után *kritikus esetünk* lesz, például:

$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}; \quad \frac{0}{0}; \quad 0 \cdot (\pm\infty); \quad \infty - \infty; \quad 0^0; \quad (\pm\infty)^0; \quad 1^{\pm\infty}$$

alakok bármelyikét kapjuk, ekkor a határérték kiszámítása további „ügyességet” igényel.

Előadáson tanultuk, hogyan kell sorozatok határértékét kiszámítani, most ismételjük át a legfontosabbakat:

- *Polinom alak határértéke  $\infty$  vagy  $-\infty$ , főegyütthatótól függően.* Például a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (3n^3 - 3n + 1)$$

esetén behelyettesítés után  $(\infty - \infty)$  esetünk van, de azonnal láthatjuk, hogy  $\infty$  lesz az eredmény, mert a magasabb fokú tag együtthatója pozitív. Ugyanis kiemelve az előforduló legmagasabb kitevőjű  $n$  hatványt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (3n^3 - 3n + 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \left( 3 - \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^3} \right) = \infty,$$

mert újabb behelyettesítés már eredményt ad,  $\frac{3}{n^2}$  és  $\frac{1}{n^3}$  nullához tartanak, a zárójel emiatt 3-hoz tart, és így  $\infty^3 \cdot 3 = \infty$ . A fentiek miatt azt is észrevesszük, hogy tetszőleges pozitív főegyütthatójú polinom alak határértéke  $\infty$ , míg tetszőleges negatív főegyütthatójú polinom alak határértéke  $-\infty$ .

- *Racionális tört alak határértéke  $\infty$  vagy  $-\infty$ , ha a számláló foka nagyobb (ez függ a főegyütthatók előjelétől); 0, ha a nevező foka nagyobb, főegyütthatók hányadosa, ha egyenlők a foksámok.* Például a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9n + 1}{9n - 1}$$

határértéknél behelyettesítés után  $\frac{\infty}{\infty}$  esetünk van. Kiemelünk mind a számlálóban, mind pedig a nevezőben  $n$ -et (azaz  $n$  előforduló legmagasabb hatványát), és újabb helyettesítés már eredményt ad, hiszen  $\frac{1}{n}$  0-hoz tart:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9n + 1}{9n - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(9 + \frac{1}{n}\right)}{n \left(9 - \frac{1}{n}\right)} = \frac{9}{9} = 1.$$

Valóban itt a főgyütthetők hányadosát kaptuk, ugyanis a számlálóban és a nevezőben ugyanolyan fokú polinomjaink voltak, így a kiemelt tényezőkkel egyszerűsíthettünk.

- „ $\sqrt{\phantom{x}} - \sqrt{\phantom{x}}$ ” alakú határérték esetén bővítünk a konjugálttal és az  $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$  képletet használjuk.
- Az  $1^\infty$  kritikus esetben pedig  $e$ -vel kapcsolatos az eredményünk, legfeljebb nem látjuk benne az  $e$  számot, ugyanis a  $(-\infty)$ ,  $\infty$  vagy 0 hatványon van az  $e$ . Ilyenkor a következő képletet használjuk: Ha  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  egy nullához tartó, szigorúan monoton számsorozat, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + c_n)^{\frac{1}{c_n}} = e.$$

Használjuk még az előadáson elhangzó következő eredményeket:

- $c \in \mathbb{R}$  esetén  $\lim_{n \rightarrow \infty} c = c$ ;

•

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0 \quad \forall k \in \{1, 2, 3, \dots\};$$

•

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} 0, & \text{ha } |q| < 1 \\ 1, & \text{ha } q = 1 \\ \infty, & \text{ha } q \in (1, +\infty) \\ \text{divergens,} & \text{ha } q \in (-\infty, -1]; \end{cases}$$

•

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{k} = 1 \quad \forall k > 0;$$

•

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

- $\forall k \in \mathbb{R}$  és  $\forall a \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$  esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0;$$

- $\forall a \in \mathbb{R}$  esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0;$$

- $\forall k \in \mathbb{R}$  esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{n!} = 0;$$

- 

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0;$$

- $\forall k > 0$  és  $a > 1$  esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a n}{n^k} = 0.$$

*Nevezetes sorozatok nagyságrendje:*

$$\log_a n \ll n^k \ll a^n \ll n! \ll n^n,$$

ahol  $a > 1$  és  $k > 0$ .

### **Függvényhatárértékekkel kapcsolatos összefoglaló (előadáson volt) Nevezetes függvényhatárértékek 1.:**

1.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0; \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0;$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty; \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty;$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \begin{cases} 0, & \text{ha } 0 < a < 1 \\ \infty, & \text{ha } a > 1 \end{cases}$$

### **Nevezetes függvényhatárértékek 2.:**

1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1; \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1;$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1; \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x} = 1;$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e; \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e;$$

4.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}, \quad \text{ha } a \in (0, \infty) \setminus \{1\},$$

speciális esetben  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$

### Nevezetes függvényhatárértékek 3.:

1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \quad \text{ha } a \in (0, \infty) \setminus \{1\},$$

speciális esetben  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1;$

2.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha, \quad \text{ahol } \alpha \in \mathbb{R}.$$

### Egy korlátos és egy nullához tartó függvény szorzata:

Egy korlátos és egy nullához tartó függvény szorzata nullához tart.

*Jegyezzük meg: Racionális törtfüggvény limesze esetén*

- ha  $x \rightarrow 0$  és  $\frac{0}{0}$  kritikus esetünk van, akkor  $x$  előforduló legalacsonyabb hatványát emeljük ki;
- ha  $x \rightarrow \infty$  vagy  $x \rightarrow -\infty$  és a  $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$  kritikus esetek valamelyike áll fenn, akkor  $x$  előforduló legmagasabb hatványát emeljük ki!

### Racionális törtfüggvény limesze:

Racionális törtfüggvény limesze esetén, ha  $x \rightarrow \infty$  vagy  $x \rightarrow -\infty$ , az eredmény



- konstans, és pedig a főegyütthatók hányadosa, ha a számláló foka = nevező fokával;
- $\infty$  vagy  $-\infty$ , ha a számláló foka nagyobb;
- 0, ha a nevező foka nagyobb.

**Megjegyzés:**

Racionális törtfüggvény határértéke esetén, ha  $x \rightarrow x_0$ , ahol  $x_0$  egy nemnulla szám, és  $\frac{0}{0}$  esetünk van, akkor számlálóban is és nevezőben is gyöktényezőző alakra hozunk, majd egyszerűsítünk.

**Definíció [Szakadási hely]:**

Legyen  $f$  értelmezett az  $x_0$  valamely környezetében. Az  $x_0$ -beli folytonossághoz a következőknek kell teljesülniük:

- $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ ;
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

Ha a fentiekből valamelyik nem teljesül, akkor  $x_0$  *szakadási hely*.

**Definíció [Szakadási helyek típusai]:**

Tegyük fel, hogy  $f$  értelmezett az  $x_0$  valamely környezetében és  $x_0$  szakadási hely.

- Ha  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  és véges, de  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$ , akkor  $x = x_0$  *megszüntethető szakadási helye*  $f$ -nek.
- Ha  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$  és  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ , mindketten végesek, de egymástól különböző számok, akkor  $x = x_0$  *ugráshelye*  $f$ -nek.
- Minden előzőktől különböző esetben az  $x = x_0$  *szakadási hely másodfajú*.

A megszüntethető szakadási helyeket és az ugráshelyeket közösen *elsőfajú szakadási helyeknek* nevezzük.

**1. Feladat (Numerikus sorozatok határértéke):**

Számítsuk ki az alábbi sorozatok határértékét

a)

$$a_n = \left( \frac{1 - 3n}{4n + 12} \right)^7, \quad n \in \mathbb{N};$$

b)

$$a_n = \frac{n^2 + 3n - 1}{n^7 + 7n + 5}, \quad n \in \mathbb{N};$$

c)

$$a_n = \frac{3n^3 - 3n + 1}{5n^3 + n^2 - 1}, \quad n \in \mathbb{N};$$

d)

$$a_n = \frac{1 - n^3}{n^2 + 10}, \quad n \in \mathbb{N};$$

e)

$$a_n = \sqrt{n^2 + 3n - 10} - 3n, \quad n \in \mathbb{N};$$

f)

$$a_n = \sqrt[n]{3^n + 2^n}, \quad n \in \mathbb{N};$$

g)

$$a_n = \left( \frac{9n + 1}{9n - 1} \right)^{2n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

h)

$$a_n = \frac{n^{1000}}{2^n}, \quad n \in \mathbb{N};$$

i)

$$a_n = \frac{\log_3 n + n!}{n^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

## 2. Feladat (Függvényhatárérték számítások, I.):

Számítsuk ki a következő függvényhatárértékeket:

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x} - 1};$

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^5 + 3x^2 + 1}{x^2 - 10x + 1};$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^7 - 2x^5 + x^2}{x^9 + 3x^4 - 2x^2}.$$

### 3. Feladat (Függvényhatárérték számítások, II.):

A  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  összefüggés felhasználásával számítsuk ki a következő függvényhatárértékeket:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\sin 3x};$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2};$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x}.$$

### 4. Feladat (Egyoldali határértékek kiszámítása):

Számítsuk ki az alábbi függvény esetén a jobb- és bal oldali határértéket az  $x_0 = 1$  pontban:

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x^3 - 1}.$$

### 5. Feladat (Szakadási helyek vizsgálata, I.):

Vizsgáljuk az

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 10}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{2; 5\} \\ 0, & \text{ha } x \in \{2; 5\} \end{cases}$$

függvény szakadási helyeit és adjuk meg azok típusát is!

### 6. Feladat (Szakadási hely vizsgálata, II.):

Vizsgáljuk az

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{|x|}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 1, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvény szakadási helyét és adjuk meg ennek típusát is!

**7. Feladat (Szakadási hely vizsgálata, III.):**

Vizsgáljuk az

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 1, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvény szakadási helyét és adjuk meg ennek típusát is!

**8. Feladat (Függvényhatárérték számítás, III.):**

Számítsuk ki a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - x)$$

függvényhatárértéket!

**9. Feladat (Függvényhatárérték számítás, IV.):**

Számítsuk ki a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1}{x-1} \right)^{x^2}$$

függvényhatárértéket!

***5. Gyakorlat feladatai: Deriválás. Adott pontbeli érintőegyenes felírása***

Az 1. zárthelyit a 6. héten írják, így az 5. gyakorlaton meg kell tanulni deriválni, deriváltfüggvényt felírni és megadni adott abszcisszájú grafikonbeli pontban az érintőegyenes egyenletét!

**1. Feladat (Deriváltfüggvény előállítása definíció alapján. Érintőegyenes egyenlete, I.):**

Számítsuk ki a definíció alapján a következő függvény deriváltfüggvényét és írjuk fel a grafikon  $x_0 = 3$  abszcisszájú pontjához tartozó érintőegyenes egyenletét:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1}, \quad x \in [1, \infty).$$

## 2. Feladat ( $f'(x)$ kiszámítása, II.):

Határozza meg  $f'(x)$ -et és hozzuk egyszerűbb alakba, ha

- a)  $f(x) = x^3 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{5x^5}$ ,  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ;
- b)  $f(x) = 3a^x - \cos x$ ;  $x \in \mathbb{R}$ ,  $(a > 0)$ ;
- c)  $f(x) = (1 + x^3)e^x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

## 3. Feladat ( $f'(x)$ kiszámítása. Érintőegyenes helyzetének vizsgálata, III.):

Legyen

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

- a) Határozza meg  $f'(x)$ -et és hozzuk egyszerűbb alakba!
- b) Mennyi a grafikon  $x_0 = 1$  abszcisszájú pontjában az érintőegyenes iránytangense?
- c) Írjuk fel az  $x_0 = 1$  abszcisszájú pontban az érintőegyenes egyenletét!
- d) Van-e olyan pontja a grafikonnak, melyben az érintőegyenes vízszintes?

## 4. Feladat ( $f'(x)$ kiszámítása láncszabállyal, IV.):

Határozza meg  $f'(x)$ -et láncszabállyal:

- a)  $f(x) = (3x^2 + 4x + 1)^5$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ;
- b)  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ;
- c)  $f(x) = (1 + \sqrt[3]{x})^3$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ;
- d)  $f(x) = e^{x^4}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ;
- e)  $f(x) = \cos(e^{2x+3})$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

## 5. Feladat (Deriváltfüggvény kiszámítása, V.):

Határozza meg  $f$  deriváltfüggvényét, ha  $f$  hozzárendelési szabálya

$$f(x) = \frac{x^3 + 3}{x^2 - x - 2},$$

értelmezési tartománya pedig a lehető legbővebb!

**6. Feladat (Deriváltfüggvény kiszámítása. Érintőegyenes egyenlete, VI.):**

Határozza meg  $f$  deriváltfüggvényét, ha  $f$  hozzárendelési szabálya

$$f(x) = (x^2 + 1)e^x,$$

értelmezési tartománya pedig a lehető legbővebb! Írjuk fel az  $x_0 = 0$  abszcisszájú pontban a grafikonhoz húzott érintőegyenes egyenletét!

**7. Feladat (Derivált kiszámítása, érintőegyenes egyenletének felírása, VII.):**

Deriváljuk a következő függvényt és írjuk fel a függvény grafikonjának  $x_0 = 0$  abszcisszájú pontjában a grafikonhoz húzott érintőegyenes egyenletét!

$$f(x) = \frac{\cos \sqrt{x^2 + 1}}{x + 2}, \quad x > -2.$$

**6. Gyakorlat feladatai: További deriválások, érintőegyenesek felírása (folytatás). Az 1. zh eredményeinek megbeszélése**

**1. Feladat ( $f'(x)$  kiszámítása láncszabállyal, IV.):**

Határozza meg  $f'(x)$ -et láncszabállyal:

a)  $f(x) = \operatorname{tg} [(x^2 + x)^3], \quad x \in (0, 10^{-2});$

b)  $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}, \quad x \in [0, \infty);$

c)  $f(x) = \sqrt[3]{1 + x\sqrt{x + 3}}, \quad x \in [0, \infty).$  (Ez utóbbi eredményét hozzuk egyszerűbb alakba!)

**2. Feladat (Implicit függvény deriválása, érintőegyenes egyenlete, VIII.):**

Számítsuk ki  $y'(0)$  értékét az

$$x^9 + xy + y^9 = 512$$

implicit függvény esetén! Írjuk fel az  $x_0 = 0$  abszcisszájú pontban a grafikonhoz húzott érintőegyenes egyenletét!

**3. Feladat (Derivált kiszámítása, érintőegyenes egyenletének felírása, IX.):**

Deriváljuk a következő függvényt és írjuk fel a függvény grafikonjának  $x_0 = 0$  abszcisszájú pontjában a grafikonhoz húzott érintőegyenes egyenletét!

$$f(x) = \frac{\ln \sqrt{1+x}}{(x^2+1)^4}, \quad x > -1.$$

**7-8. Gyakorlatok feladatai: Monotonitási intervallumok meghatározása. Lokális szélsőértékek és egyéb szépségek**

**1. Feladat (Másodrendű derivált kiszámítása):**

Számítsuk ki az  $f$  függvény másodrendű deriváltját, ha

$$f(x) = \frac{1}{\cos x}, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

**2. Feladat (Derivált kiszámítása. Bolzano-féle közbülsőpont tétel alkalmazása):**

Határozza meg  $f$  deriváltfüggvényét és mutassuk meg, hogy az  $f(x) = 0$  egyenletnek pontosan egy gyöke van a  $(0, \frac{\pi}{6})$  intervallumban!

$$f(x) = \left(x - \frac{\pi}{6}\right) \cos x + x \operatorname{tg} \frac{3x}{2}, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right).$$

**3. Feladat (Monotonitási intervallumok meghatározása.**

**Lok. szélsőértékek kiszámítása, I.):**

Határozza meg az alábbi függvény monotonitási intervallumait, lokális szélsőérték helyeit és lokális szélsőértékeit:

$$f(x) = \frac{x^3}{3x^2+1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

**4. Feladat (Monotonitási intervallumok meghatározása.**

**Lok. szélsőértékek kiszámítása, II.):**

Határozza meg az alábbi függvény monotonitási intervallumait, lokális szélsőérték helyeit és lokális szélsőértékeit:

$$f(x) = x - \ln(1 + x), \quad x \in (-1, \infty).$$

**5. Feladat (Függvény differenciálhatóságának vizsgálata. Deriváltfüggvény felírása):**

Vizsgáljuk az

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1, & \text{ha } x \leq 0 \\ \sqrt{1+x}, & \text{ha } 0 < x \leq 3 \\ 2, & \text{ha } 3 < x \end{cases}$$

függvény folytonosságát és differenciálhatóságát az  $x_1 = 0$  és  $x_2 = 3$  helyeken! Írjuk fel a deriváltfüggvényt (ahol létezik)!

**6. Feladat (Korlátos és zárt intervallumon értelmezett függvény absz. szélsőértékei):**

A korlátos és zárt intervallumon folytonos függvényekre vonatkozó Weierstrass tételt használva határozzuk meg az alábbi korlátos és zárt intervallumon értelmezett  $f$  függvény abszolút maximumát és abszolút minimumát, ha ezek léteznek! Hol veszi fel  $f$  ezeket az értékeket?

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1, \quad x \in [-10, 12]$$

**7. Feladat (Nem korlátos intervallumon értelmezett függvény absz. szélsőértékei):**

Határozzuk meg az alábbi nem korlátos intervallumon értelmezett  $f$  függvény abszolút maximumát és abszolút minimumát, ha ezek léteznek! Hol veszi fel  $f$  ezeket az értékeket?

$$f(x) = 2x + \frac{200}{x}, \quad x \in (0, \infty)$$

**8. Feladat (Szöveges szélsőérték-feladatok):**

Határozzuk meg az  $R$  sugarú körbe írható maximális területű téglalap területét!

**9. Feladat (Logaritmikus derivált):**



Határozzuk meg az  $f'(x)$ -et, ha

$$f(x) = \left( \frac{\sin x}{x} \right)^{x^2}, \quad x \in \left( 0, \frac{\pi}{4} \right).$$

**9. Gyakorlat feladatai: Konvex, konkáv ívek, inflexiós pontok. Aszimptoták. L'Hospital szabály**

**1. Feladat (Konvex, konkáv ívek, inflexiós pontok kiszámítása, I.):**

Adjuk meg, mely intervallumokon konvex és melyeken konkáv az alábbi függvény! Adjuk meg továbbá az inflexiós pontokat is!

$$f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 36x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

**2. Feladat (Konvex, konkáv ívek, inflexiós pontok kiszámítása, II.):**

Adjuk meg, mely intervallumokon konvex és melyeken konkáv az alábbi függvény! Adjuk meg továbbá az inflexiós pontokat is!

$$f(x) = \frac{x^3}{3x^2 + 1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

**3. Feladat (Aszimptotikus vizsgálat, I.):**

Vizsgáljuk meg, van-e a következő függvénynek  $\infty$ -ben és  $(-\infty)$ -ben aszimptotája? Ha igen, kérjük az aszimptota/aszimptoták egyenletét!

$$f(x) = \frac{x^2 + 9}{x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

**4. Feladat (Aszimptotikus vizsgálat, II.):**

Vizsgáljuk meg, van-e a következő függvénynek  $\infty$ -ben és  $(-\infty)$ -ben aszimptotája? Ha igen, kérjük az aszimptota/aszimptoták egyenletét!

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} + x, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

### 5. Feladat (Aszimptotikus vizsgálat, III.):

Vizsgáljuk meg, van-e a következő függvénynek  $\infty$ -ben és  $(-\infty)$ -ben aszimptotája? Ha igen, kérjük az aszimptota/aszimptoták egyenletét!

$$f(x) = x^3 - x^2 - 2x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

### 6. Feladat (L'Hospital szabály alkalmazása):

L'Hospital szabállyal számítsuk ki az alábbi határértékeket! Állapítsuk meg, milyen kritikus eseteink vannak?

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right);$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x};$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \ln \frac{1}{x} \right)^x.$

## *10. Gyakorlat feladatai: Teljes függvényvizsgálat*

### 1. Feladat (Teljes függvényvizsgálat, I.):

Végezzen teljes függvényvizsgálatot és vázolja a grafikont, ha

$$f(x) = \left( \frac{x-1}{2x+1} \right)^2, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\}.$$

### 2. Feladat (Teljes függvényvizsgálat, II.):

Végezzen teljes függvényvizsgálatot és vázolja a grafikont, ha

$$f(x) = x - \operatorname{arctg} x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

### 3. Feladat (Teljes függvényvizsgálat, III.):

Végezzen teljes függvényvizsgálatot és vázolja a grafikont, ha

$$f(x) = x^x, \quad x \in (0, \infty).$$

**4. Feladat (Teljes függvényvizsgálat, IV.):**

Végezzen teljes függvényvizsgálatot és vázolja a grafikon, ha

$$f(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

**5. Feladat (Teljes függvényvizsgálat, V.):**

Végezzen teljes függvényvizsgálatot és vázolja a grafikon, ha

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

**6. Feladat (Teljes függvényvizsgálat, VI.):**

Végezzen teljes függvényvizsgálatot és vázolja a grafikon, ha

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{2 - x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}.$$

***11. Gyakorlat feladatai: Határozatlan integrál.  
Határozott integrál. Síkidom területe (I.)***

**1. Feladat ( $f'(x)$ -ből  $f(x)$  felírása):**

Adjuk meg az  $f(x)$ -et az alábbi esetek mindegyikében!  $f(x)$  értelmezési tartománya az a legbővebb halmaz legyen, melyen  $f$  differenciálható!

a)  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x \in (0, \infty);$

b)  $f''(x) = 3e^x + 5 \sin x, \quad x \in \mathbb{R};$

c)  $f^{(3)}(x) = \sin x, \quad x \in \mathbb{R}.$

**2. Feladat (Határozatlan integrálok kiszámítása, I.):**

Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat:

a)  $\int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}) dx$ , ahol  $x > 0$ ;

b)  $\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} dx$ , ahol  $x > 0$ ;

c)  $\int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}} dx$ , ahol  $x > 0$ .

**3. Feladat (Határozatlan integrálok kiszám. első helyettesítési módszerrel, II.):**

Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat:

a)  $\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}+5} dx$ , ahol  $x \in \mathbb{R}$ ;

b)  $\int x^3(4x^4 + 6)^{2016} dx$ , ahol  $x \in \mathbb{R}$ ;

c)  $\int \frac{1}{\cos^2 x \sqrt{(\operatorname{tg} x)^3}} dx$ , ahol  $x \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4})$ .

**4. Feladat (Határozatlan integrálok kiszám. parciális integrálással, III.):**

Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat:

a)  $\int x^2 \cos(5x) dx$ , ahol  $x \in \mathbb{R}$ ;

b)  $\int e^{-3x} \sin(2x) dx$ , ahol  $x \in \mathbb{R}$ ;

c)  $\int e^{-x} \cos(3x) dx$ , ahol  $x \in \mathbb{R}$ ;

d)  $\int \operatorname{arctg}(3x) dx$ , ahol  $x \in \mathbb{R}$ ;

e)  $\int x^2 \ln x dx$ , ahol  $x \in (0, \infty)$ ;

f)  $\int e^{-2x} \sin x dx$ , ahol  $x \in \mathbb{R}$ .

(Ebben a feladatban az utolsó integrál opcionális, a többi kötelezően megoldandó!)

**5. Feladat (Határozott integrálok kiszámítása, I.):**

Számítsuk ki az alábbi határozott integrált:

$$\int_1^e x^2 \ln x dx.$$

**6. Feladat (Síkidom területének kiszámítása, I.):**

Számítsuk ki annak a síkidomnak a területét, melyet az  $f(x) = x^2 \ln x$ ,  $x \in (0, \infty)$  függvény grafikonja, az  $x$ -tengely, valamint az  $x = 1$  és  $x = e$  egyenesek határolnak!

**7. Feladat (Síkídom területének kiszámítása, II.):**

Számítsuk ki annak a síkidomnak a területét, melyet az  $f(x) = x^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$  és a  $g(x) = \sqrt{2x}$ ,  $x \in [0, \infty)$  függvények grafikonja zár be!

*12-14. Gyakorlatok feladatai: Határozott integrálok. Racionális törtfüggvények integrálja. Síkidom területe (II.)  
Az integrálszámítás egyéb alkalmazásai*

**1. Feladat (Határozott integrálok kiszámítása, II.):**

Számítsuk ki az alábbi határozott integrálokat:

a)  $\int_0^1 \sqrt{5x+4} \, dx$ ;

b)  $\int_1^3 x^2 \sqrt[3]{1+x^3} \, dx$ ;

c)  $\int_0^\pi e^x \sin(2x) \, dx$ ;

d)  $\int_1^4 \ln(5x-2) \, dx$ .

**Racionális törtfüggvények határozatlan integrálásával kapcsolatos feladatok:**

**2. Feladat (Ha az integrandus függvény nevezője elsőfokú polinom, vagy annak hatványa):**

Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat, ha  $x > 3$ :

a)  $\int \frac{dx}{x-3}$ ;

b)  $\int \frac{dx}{(x-3)^2}$ .

**3. Feladat (Ha az integrandus függvény számlálója magasabb fokú, mint a nevezője → polinomosztással):**

Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrált, ha  $x \in \mathbb{R}$ :

$$\int \frac{x^3 - x^2 - x - 7}{x^2 + 2x + 3} dx.$$

**4. Feladat (Ha a nevező másodfokú, negatív diszkriminánsú, a számláló pedig elsőfokú):**

Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrált, ha  $x \in \mathbb{R}$ :

$$\int \frac{2x + 3}{x^2 + 2x + 3} dx.$$

**5. Feladat (Ha a nevező másodfokú, 0 diszkriminánsú, a számláló pedig elsőfokú → parciális törtekre bontással):**

Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrált, ha  $x \in (-1, \infty)$ :

$$\int \frac{2x + 3}{x^2 + 2x + 1} dx.$$

**6. Feladat (Ha a nevező másodfokú, pozitív diszkriminánsú, a számláló pedig elsőfokú → parciális törtekre bontással):**

Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrált, ha  $x \in (1, \infty)$ :

$$\int \frac{11 - x}{6x^2 + x - 2} dx.$$

**7. Feladat (Racionális törtfüggvény határozott integrálja, I.):**

Számítsuk ki az alábbi határozott integrált:

$$\int_1^2 \frac{11 - x}{6x^2 + x - 2} dx.$$

**8. Feladat (Racionális törtfüggvény határozott integrálja, II.):**

Számítsuk ki az alábbi határozott integrált:

$$\int_0^1 \frac{2x + 3}{x^2 + 2x + 3} dx.$$

**9. Feladat (Síkídom területének kiszámítása, III.):**

Számítsuk ki annak a síkidomnak a területét, melyet az  $y = -x^2 + 8x - 9$ ,  $x \in \mathbb{R}$  és az  $y = \frac{x^2}{2} - 4x + 9$ ,  $x \in \mathbb{R}$  egyenletű görbék zárnak be!

**10. Feladat (Síkídom területének kiszámítása, IV.):**

Számítsuk ki annak a síkidomnak a területét, melyet az  $y = x - 1$  egyenes és az  $y^2 = 2x + 6$  egyenletű parabola zár be!

**11. Feladat ( $x$ -tengely körüli forgástest térfogatának kiszám., I.):**

Számítsuk ki az  $f : [0, \pi]$ ,  $f(x) = \sin x$  függvény grafikonjának  $x$ -tengely körüli megforgatásával keletkező forgástest térfogatát!

**12. Feladat ( $x$ -tengely körüli forgástest térfogatának kiszám., II.):**

Számítsuk ki az  $f : [0, \pi]$ ,  $f(x) = e^{-x} \sqrt{\sin x}$  függvény grafikonjának  $x$ -tengely körüli megforgatásával keletkező forgástest térfogatát!

**13. Feladat (Ívhossz kiszámítása):**

Számítsuk ki az  $f : [0, 4]$ ,  $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$  függvény grafikonjának ívhosszát!

**14. Feladat (Síkídom területének kiszámítása, V.):**

Határozzuk meg annak a síkidomnak a területét, melyet az  $y = x^4$ ,  $x \in \mathbb{R}$  és az  $y = 3x^2 - 2$ ,  $x \in \mathbb{R}$  egyenletű görbék zárnak be!

**15. Feladat (Síkídom területének kiszámítása, VI.):**

Határozzuk meg annak a síkidomnak a területét, melyet az  $y = -2x - 2$ ,  $x \in \mathbb{R}$  és az  $y = x^2 + 2x + 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$  egyenletű görbék zárnak be!