

Matematika A2a - Vektorfüggvények

Az 1. ZH témakörei – Feladatok

A zárthelyi dolgozatban 4 feladat lesz az alábbi típusokból!

1. **Feladat:** Számítsa ki az

$$\int_3^{\infty} \frac{7x-4}{x^2-3x+2} dx$$

improprius integrált!

Megoldás: Az improprius integrál 1. típusú, hiszen az $x^2 - 3x + 2 = 0$ megoldásai 1 és 2 nincsenek a $3, \infty$) intervallumban. Ennek alapján

$$\int_3^{\infty} \frac{7x-4}{x^2-3x+2} dx = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_3^{\omega} \frac{7x-4}{x^2-3x+2} dx.$$

Parciális törtekre bontással kiszámítjuk a határozatlan integrált:

$$\frac{7x-4}{x^2-3x+2} = \frac{7x-4}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{(A+B)x-2A-B}{(x-1)(x-2)},$$

ahonnan $A+B=7$ és $-2A-B=-4$, azaz $A=-3$ és $B=10$.

Tehát

$$\frac{7x-4}{x^2-3x+2} = \frac{-3}{x-1} + \frac{10}{x-2} = \frac{10}{x-2} - \frac{3}{x-1},$$

azaz

$$\int \frac{7x-4}{x^2-3x+2} dx = \int \frac{10}{x-2} dx - \int \frac{3}{x-1} dx = 10 \ln(x-2) - 3 \ln(x-1) + c = \ln \frac{(x-2)^{10}}{(x-1)^3} + c.$$

A Newton-Leibniz formulát használva írhatjuk, hogy az improprius integrál

$$\begin{aligned} \int_3^{\infty} \frac{7x-4}{x^2-3x+2} dx &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_3^{\omega} \frac{7x-4}{x^2-3x+2} dx = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left[\ln \frac{(x-2)^{10}}{(x-1)^3} \right]_3^{\omega} = \\ &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left[\ln \frac{(\omega-2)^{10}}{(\omega-1)^3} - \ln \frac{1}{2^3} \right] = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left[\ln \frac{\omega^{10} \left(1 - \frac{2}{\omega}\right)^{10}}{\omega^3 \left(1 - \frac{1}{\omega}\right)^3} - \ln \frac{1}{2^3} \right] = +\infty, \end{aligned}$$

azaz az improprius integrál divergens.

Megjegyzés: A zh-ban ennél a típusfeladatnál lehet olyan 1. típusú improprius integrál is, amely konvergens. Lehet olyan feladat is, melyben az integrandus függvény parciális integrálással számítandó ki és lehet olyan is, melyben a $t = e^x$ helyettesítést kell használni!

2. **Feladat:** Vizsgálja hányadoseszttel az

$$\int_1^{\infty} \frac{10x+1}{x^5+1} dx$$

improprius integrál konvergenciáját!

Megoldás: Felírhatjuk, hogy

$$\frac{10x+1}{x^5+1} \sim \frac{x}{x^5} = \frac{1}{x^4},$$

$$\text{mert } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{10x+1}{x^5+1}}{\frac{1}{x^4}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(10x+1)x^4}{x^5+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 \left(10 + \frac{1}{x}\right)}{x^5 \left(1 + \frac{1}{x^5}\right)} = 10 > 0$$

véges szám.

Az $\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx$ improprius integrál konvergens, ha $p > 1$ és divergens, ha $p \leq 1$.

Így az $\int_1^\infty \frac{1}{x^4} dx$ improprius integrál konvergens (mivel $p = 4 > 1$), és a hányadosesztet használva kapjuk, hogy az $\int_1^\infty \frac{10x+1}{x^5+1} dx$ improprius integrál is konvergens.

Megjegyzés: A zh-ban ennél a típusfeladatnál lehet olyan 1. típusú improprius integrál is, amely divergens. Vegyük észre, hogy ehhez a feladathoz tudni kellett, hogy az $\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx$ improprius integrál konvergens, ha $p > 1$ és divergens, ha $p \leq 1$.

3. **Feladat:** Mutassa meg, hogy az $x + y - 4z = 4$ és a $2x + 2y - 8z = 16$ síkok párhuzamosak és határozza meg a távolságukat!

Megoldás: Jelölje S_1 az $x + y - 4z = 4$, S_2 pedig a $2x + 2y - 8z = 16$ síkot. Az S_1 sík egy normálvektora $\mathbf{n}_1 = (1, 1, -4)$, az S_2 sík egy normálvektora $\mathbf{n}_2 = (2, 2, -8) = 2 \cdot \mathbf{n}_1$, így a két sík párhuzamos egymással.

Legyen $\mathbf{n} = \mathbf{n}_1 = (1, 1, -4)$ a két sík közös normálvektora. A két sík távolságát kiszámíthatjuk például úgy, hogy veszünk az S_1 síkon egy P_1 pontot, valamint az S_2 síkon egy P_2 pontot és meghatározzuk a $\overrightarrow{P_1 P_2}$ $\mathbf{n}$ vektorra vett merőleges vetületvektorának a hosszát, ami nem más, mint $\left| \left\langle \overrightarrow{P_1 P_2}, \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} \right\rangle \right|$, azaz a $\overrightarrow{P_1 P_2}$ és az $\frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|}$ egységvektor skaláris szorzatának az abszolút értéke.

Legyen például $P_1(0, 0, -1) \in S_1$ és $P_2(0, 0, -2) \in S_2$. (Érdekes minél több 0-val számolni.)

Ekkor $\overrightarrow{P_1 P_2} = (0, 0, -1)$. Az $\mathbf{n}$ vektor hossza $|\mathbf{n}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-4)^2} = \sqrt{18} (= 3\sqrt{2})$, egységvektora pedig $\frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} = \left(\frac{1}{\sqrt{18}}, \frac{1}{\sqrt{18}}, -\frac{4}{\sqrt{18}} \right)$. A két sík távolsága pedig

$$\left| \left\langle \overrightarrow{P_1 P_2}, \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} \right\rangle \right| = \left| \left\langle (0, 0, -1), \left(\frac{1}{\sqrt{18}}, \frac{1}{\sqrt{18}}, -\frac{4}{\sqrt{18}} \right) \right\rangle \right| = \frac{4}{\sqrt{18}}.$$

Megjegyzés: Amennyiben más módszerrel, de helyesen számítják ki a 2 sík távolságát, azt a megoldást is elfogadjuk.

4. **Feladat:** Oldja meg a $z^6 + (16 + 16i)z^2 = 0$ egyenletet a komplex számok halmazán! A megoldásokat bármilyen alakban elfogadjuk!

Megoldás: Mivel az egyenlet $z^2[z^4 + (16 + 16i)] = 0$ alakba írható, $z_{1,2} = 0$, azaz a 0 kétszeres gyöke az egyenletnek.

A többi négy megoldást a $z^4 + (16 + 16i) = 0$ egyenletet megoldva kapjuk meg. Mivel $z^4 = -(16 + 16i) = -16 - 16i$, kiszámítjuk a $-16 - 16i$ komplex negyedik gyökeket.

Átírjuk trigonometrikus alakba a $-16 - 16i$ komplex számot:

$$-16 - 16i = 16(-1 - i) = 16\sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right).$$

A négy komplex negyedik gyök a következő:

$$z_k = \sqrt[4]{16\sqrt{2}} \left(\cos \frac{5\pi + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi + 2k\pi}{4} \right), \text{ ahol } k \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

Tehát az eredeti egyenlet 6 megoldása (az indexeket kicsit megváltoztattuk, az $z_{1,2} = 0$ megoldásokat a végére tettük be):

$$\begin{aligned} z_0 &= 2^{\frac{8}{3}} \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{5\pi}{16} + i \sin \frac{5\pi}{16} \right), \quad z_1 = 2^{\frac{8}{3}} \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{13\pi}{16} + i \sin \frac{13\pi}{16} \right), \\ z_2 &= 2^{\frac{8}{3}} \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{21\pi}{16} + i \sin \frac{21\pi}{16} \right), \quad z_3 = 2^{\frac{8}{3}} \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{29\pi}{16} + i \sin \frac{29\pi}{16} \right), \\ z_4 &= 0, \quad z_5 = 0. \end{aligned}$$

5. **Feladat:** Oldja meg a $z^3 - z^2 + 8z = 0$ egyenletet a komplex számok halmazán! A megoldásokat algebrai alakban kérjük! Írjuk fel a $p(z) = z^3 - z^2 + 8z$ polinom $\mathbb{C}$ -beli gyöktényezős alakját!

Megoldás: Mivel az egyenlet $z(z^2 - z + 8) = 0$, ezért $z_1 = 0$ megoldása az egyenletnek.

A másik két megoldás a $z^2 - z + 8 = 0$ egyenlet két komplex gyöke lesz:

$$z_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-32}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-31}}{2} = \frac{1 \pm i\sqrt{31}}{2} = \frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{31}}{2}, \text{ mert } \sqrt{-31} = \pm i\sqrt{31}.$$

A kért gyöktényezős alak pedig $p(z) = z \left(z - \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{31}}{2} \right) \left(z - \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{31}}{2} \right)$.

6. **Feladat:** Igazoljuk, hogy az

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

vektorok bázist alkotnak az $\mathbf{R}^3$ -ben, és adjuk meg az $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ vektornak erre a bázisra vonatkozó koordinátáit!

Megoldás: Az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ vektorok $\mathbf{R}^3$ -ben pontosan akkor alkotnak bázist, ha lineárisan függetlenek.

$$\begin{aligned} \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \lambda_3 \mathbf{a}_3 &= \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 - \lambda_3 = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

ahonnan $\lambda_2 = -2\lambda_3$ és $\lambda_1 = \frac{\lambda_3}{2}$ az utolsó két egyenletből. Ezeket behelyettesítve az első egyenletbe kapjuk, hogy $\frac{\lambda_3}{2} - 2\lambda_3 + \lambda_3 = 0$, ahonnan következik, hogy $\lambda_3 = 0$, így $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, tehát az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ vektorok lineárisan függetlenek $\mathbf{R}^3$ -ben, így bázist alkotnak.

Legyen $B = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$. Az $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ vektornak erre a B bázisra vonatkozó koordinátái

$$[\mathbf{x}]_B = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \text{ a következő tulajdonsággal: } \mathbf{x} = \alpha \mathbf{a}_1 + \beta \mathbf{a}_2 + \gamma \mathbf{a}_3.$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \text{ azaz } \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 2 \\ \beta + 2\gamma = 1 \\ 2\alpha - \gamma = -1, \end{cases}$$

ahonnan az utolsó két egyenletből $\beta = 1 - 2\gamma$ és $\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{\gamma}{2}$.

Behelyettesítve az első egyenletbe:

$$-\frac{1}{2} + \frac{\gamma}{2} + 1 - 2\gamma + \gamma = 2, \text{ ahonnan } \gamma = -3, \beta = 7, \alpha = -2, \text{ azaz } [\mathbf{x}]_B = \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

7. **Feladat:** Határozzuk meg az

$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ és $\mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ vektorok által alkotott vektorrendszer rangját!

Megoldás: Az $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4\}$ vektorrendszer rangja egyenlő az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -5 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ mátrix rangjával.}$$

Elemi sor- és oszlopműveletek segítségével megállapítjuk az $\mathbf{A}$ mátrix rangját. Először felcseréljük a mátrix első és második sorát, mert könnyebben számítjuk ki a rangot, ha az első sor 1-gyel kezdődik. Majd a következő lépésben az első oszlopban az 1 alá nullákat gyártunk le úgy, hogy a második sorból kivonjuk az első sor kétszeresét, valamint a harmadik sorhoz hozzáadjuk az első sor ötszörösét. Ezeket röviden a következőképpen jelölhetjük:

$S_1 \leftrightarrow S_2$, majd a következő lépésben $S_2 - 2S_1$, valamint $S_3 + 5S_1$. Kapjuk, hogy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -5 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -2 & -1 \\ 0 & 11 & 4 & 5 \end{bmatrix} \sim$$

A főátló alá csupa nullát akarunk legyártani, így $S_3 + \frac{11}{5}S_2$ és ugyanitt a második sort (-1)-gyel beszorozzuk, majd a következő lépésben $5 \cdot S_3$ elvégzése után kapjuk, hogy

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{5} & \frac{14}{5} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 14 \end{bmatrix} \sim$$

Most az első sorban szeretnénk nullákat látni a főátló felett, így a második oszlopból kivonva az első oszlop kétszeresét, valamint a harmadik és negyedik oszlopból kivonva az első oszlopot, azaz $O_2 - 2O_1$, $O_3 - O_1$, $O_4 - O_1$ kapjuk, hogy

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 14 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 14 \end{bmatrix} \sim$$

$O_2: 5$, $O_3: 2$ után egy következő lépésben $O_3 - O_2$, $O_4 - O_2$ oszlopműveletekkel

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 14 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 14 \end{bmatrix} \sim$$

$O_3 \cdot (-1)$, $O_4: 14$, majd egy következő lépésben $O_4 - O_3$ és az így kapott mátrixunk már olyan lesz, melyre igaz, hogy minden sorában és oszlopában legfeljebb egy 1-es lesz, és melyben az 1-esek száma már nem csökkenthető:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

és ebben a mátrixban az 1-esek száma 3, ami nem más, mint az A mátrix, és egyben az $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ vektorrendszer rangja, tehát $\text{rang}\{a_1, a_2, a_3, a_4\} = 3$.

Folyt. köv., még van 3 feladattípus, nincs vége!

8. **Feladat:** Számítsuk ki az

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 10 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ mátrix inverzét az adjungált mátrix segítségével!}$$

Megoldás: $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 10 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 10 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 10 & 0 \end{vmatrix} = 1 - 30 - 2 \cdot (0 - 20) = 11 \neq 0$, tehát A invertálható mátrix.

Kiszámítjuk az adjungált mátrixot:

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 10 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 10 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 10 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 10 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 20 & -10 \\ -2 & -29 & 20 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 20 & -29 & -2 \\ -10 & 20 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ekkor

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{adj } A = \begin{bmatrix} \frac{1}{11} & -\frac{2}{11} & \frac{1}{11} \\ \frac{20}{11} & -\frac{29}{11} & -\frac{2}{11} \\ -\frac{10}{11} & \frac{20}{11} & \frac{1}{11} \end{bmatrix}.$$

9. **Feladat:** Számítsuk ki az

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 10 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ mátrix inverzét elemi sorműveletek segítségével!}$$

Megoldás: Felírjuk az $[A, E_3]$ mátrixot, és látjuk, hogy az első oszlopban a főátló alatt csak egy nem zérus elem áll: a harmadik sorban. Emiatt elvégezzük az $S_3 - 10S_1$ sorműveletet. Most a második oszlopban szeretnénk a főátló alá nullákat legyártani. A következő mátrixot már az $S_3 + 20S_2$ sorművelettel kapjuk:

$$[A, E_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 10 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -20 & -29 & -10 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & -10 & 20 & 1 \end{array} \right] \sim$$

$\frac{S_3}{11}$, majd a következőkben $S_1 - 3S_3$, illetve $S_2 - 2S_3$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{10}{11} & \frac{20}{11} & \frac{1}{11} \end{array} \right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{41}{11} & -\frac{60}{11} & -\frac{3}{11} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{20}{11} & -\frac{29}{11} & -\frac{2}{11} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{10}{11} & \frac{20}{11} & \frac{1}{11} \end{array} \right] \sim$$

$S_1 - 2S_2$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{11} & -\frac{2}{11} & \frac{1}{11} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{20}{11} & -\frac{29}{11} & -\frac{2}{11} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{10}{11} & \frac{20}{11} & \frac{1}{11} \end{array} \right],$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{11} & -\frac{2}{11} & \frac{1}{11} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{20}{11} & -\frac{29}{11} & -\frac{2}{11} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{10}{11} & \frac{20}{11} & \frac{1}{11} \end{array} \right]}_{E_3} \quad \underbrace{\left[\begin{array}{ccc} \frac{1}{11} & -\frac{2}{11} & \frac{1}{11} \\ \frac{20}{11} & -\frac{29}{11} & -\frac{2}{11} \\ -\frac{10}{11} & \frac{20}{11} & \frac{1}{11} \end{array} \right]}_{A^{-1}}$$

$$\text{így az } A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{11} & -\frac{2}{11} & \frac{1}{11} \\ \frac{20}{11} & -\frac{29}{11} & -\frac{2}{11} \\ -\frac{10}{11} & \frac{20}{11} & \frac{1}{11} \end{bmatrix}.$$

10. **Feladat:** Határozza meg azt az X mátrixot, amelyre

$$a \cdot b^T \cdot X - B = 6 \cdot X, \text{ ahol } a = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Megoldás: Mivel $a \cdot b^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ egy 3x3-as mátrix és B is egy 3x3-as

mátrix, ezért $\mathbf{X}$ is egy 3x3-as mátrix, amennyiben létezik.

Az eredeti mátrixegyenlet ekvivalens a következővel:

$$\underbrace{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}^T - 6\mathbf{E}_3)}_{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{D} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}, \text{ ahol } \mathbf{D} \stackrel{jel}{=} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}^T - 6\mathbf{E}_3, \text{ azaz}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & 6 & -6 \end{bmatrix}.$$

Amennyiben létezik a $\mathbf{D}^{-1}$ mátrix, a $\mathbf{D} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$ mátrixegyenletet balról szorozva a $\mathbf{D}^{-1}$ mátrixszal, pontosan a keresett $\mathbf{X}$ megoldást kapjuk meg. Ehhez ki kell számítanunk a $\mathbf{D}^{-1}$ mátrixot. A $\mathbf{D}$ mátrix determinánsát legkönnyebben a harmadik oszlopa szerinti kifejtéssel kaphatjuk meg:

$$\det \mathbf{D} = (-6) \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = (-6)(10 - 4) = -36 \neq 0.$$

Kiszámítjuk az $\text{adj } \mathbf{D}$ adjungált mátrixot:

$$\text{adj } \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 6 & -6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 6 & -6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -5 & 0 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -5 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 12 & 12 & 18 \\ 12 & 30 & 36 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 12 & 12 & 0 \\ 12 & 30 & 0 \\ 18 & 36 & 6 \end{bmatrix}.$$

Ekkor

$$\mathbf{D}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{D}} \cdot \text{adj } \mathbf{D} = \begin{bmatrix} -\frac{12}{36} & -\frac{12}{36} & 0 \\ -\frac{12}{36} & -\frac{30}{36} & 0 \\ -\frac{18}{36} & -\frac{36}{36} & -\frac{6}{36} \end{bmatrix} \left(\text{vagy} \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{5}{6} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{6} \end{bmatrix} \right).$$

A mátrixegyenletünk $\mathbf{X}$ megoldása pedig

$$\begin{aligned} \mathbf{X} = \mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} -\frac{12}{36} & -\frac{12}{36} & 0 \\ -\frac{12}{36} & -\frac{30}{36} & 0 \\ -\frac{18}{36} & -\frac{36}{36} & -\frac{6}{36} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{24}{36} & -\frac{24}{36} & \frac{12}{36} \\ -\frac{24}{36} & -\frac{42}{36} & \frac{30}{36} \\ -\frac{42}{36} & -\frac{60}{36} & -\frac{30}{36} \end{bmatrix} \left(\text{vagy} \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{7}{6} & \frac{5}{6} \\ -\frac{7}{6} & -\frac{5}{3} & \frac{5}{6} \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$