

**Matematika A1a - Analízis, D kurzusok, 2024/2025/1. félév  
Gazdálkodási és menedzsment alapszakos hallgatók számára!**

**Az 1. ZH témakörei - a feladattípusok és egyéb tudnivalók**

*A feladatok mindegyike feleletválasztós teszt formában lesz megfogalmazva. A ZH-t nem Moodle platformon, hanem teremben írják majd. A ZH feladatai teszt formájúak lesznek, de nem igaz-hamis feleletválasztós, hanem mondatkiegészítő típusú kérdésekkel, azaz a kért részmegoldásokat mondatkiegészítéssel kell befejezni. Így rossz válaszáért nem lesz pontlevonás.*

Az elért pontszámot a legvégén kerekített alakban tároljuk az MS Teams-beli csoportunk fájljai között és a vizsgára vitt pontszám kiszámításakor csak azt vesszük majd figyelembe.

**A ZH-n 4 feladat lesz mondatkiegészítéses teszt alakban a következő típusokból:**

**1. Feladat (Függvénykompozíció):**

Legyen  $f(x) = \sqrt{256 - x^4}$ ,  $D_f = [-4, 4]$  és  $g(x) = x^2$ ,  $D_g = \mathbb{R}$ . Írjuk fel az  $f \circ g$  és  $g \circ f$  összetett függvényeket, ha léteznek.

**Megoldás:**

$$\exists f \circ g \Leftrightarrow R_g \cap D_f \neq \emptyset.$$

$$R_g \cap D_f = [0, \infty) \cap [-4, 4] = [0, 4] \neq \emptyset.$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \in [-4, 4]\} = [-2, 2].$$

$$f \circ g : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}, (f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{256 - x^8}.$$

$$\exists g \circ f \Leftrightarrow R_f \cap D_g \neq \emptyset.$$

$$R_f \cap D_g = [0, 16] \cap \mathbb{R} = [0, 16] \neq \emptyset.$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in [-4, 4] \mid \sqrt{256 - x^4} \in \mathbb{R}\} = [-4, 4].$$

$$g \circ f : [-4, 4] \rightarrow \mathbb{R}, (g \circ f)(x) = g(f(x)) = (\sqrt{256 - x^4})^2 = 256 - x^4.$$

## 2. Feladat (Polinom gyökeinek megkeresése és a gyöktényezős alakjának felírása):

A  $c$  valós paraméter mely értékére lesz  $x_1 = -1$  gyöke a  $p(x) = x^4 - x^3 + cx^2 + x + 6$  polinomnak? Írjuk fel a kapott  $c$  érték esetében a  $p(x)$  polinom összes egész gyökét és a  $p(x)$  polinom  $\mathbb{R}$ -beli gyöktényezős alakját!

### Megoldás:

$x_1 = -1$  gyöke  $p(x)$ -nek  $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow p(-1) = 0 \Leftrightarrow (-1)^4 - (-1)^3 + c(-1)^2 + (-1) + 6 = 0 \Leftrightarrow c = -7.$$

$p(-1) = 0$ , Bézout-tételből  $\Rightarrow p(x)$  osztható  $(x + 1)$ -gyel.

$$(x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6) : (x + 1) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

$$\begin{array}{r} x^4 + x^3 \\ \underline{-2x^3 - 7x^2} \\ -2x^3 - 2x^2 \\ \underline{-5x^2 + x} \\ -5x^2 - 5x \\ \underline{6x + 6} \\ 6x + 6 \\ \underline{0} \end{array}$$

$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$  lehetnek csak  $h(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$  egész gyökei.

$h(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 6 = 0$ , így  $x_2 = 1$  is gyöke a  $p(x)$  polinomnak,

Bézout-tételből  $\Rightarrow h(x)$  osztható  $(x - 1)$ -gyel

$$(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x - 1) = x^2 - x - 6$$

$$\begin{array}{r} x^3 - x^2 \\ \underline{-x^2 - 5x} \\ -x^2 + x \\ \underline{-6x + 6} \\ -6x + 6 \\ \underline{0} \end{array}$$

$x^2 - x - 6 = 0$  egész gyökei  $x_3 = -2$  és  $x_4 = 3$ .

Tehát  $p(x)$   $\mathbb{Z}$ -beli gyökei:  $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = -2$  és  $x_4 = 3$ ,

$\mathbb{R}$ -beli gyöktényezős alakja pedig

$$p(x) = (x + 1)(x - 1)(x + 2)(x - 3).$$

### 3. Feladat (Függvényhatárérték számítások):

Számítsuk ki a következő függvények határértékét:

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x}$ ;

b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+2}{3x-2}\right)^x$ .

(Itt bármilyen, előadáson vagy gyakorlaton vett függvényhatárérték típus lehet, nem csak a fenti kettő.)

#### Megoldás:

a)  $\frac{0}{0}$  esetünk van, ilyen típusnál bővítünk a "konjugálttal" és használjuk az  $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$  képletet:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x^2+9}-3)(\sqrt{x^2+9}+3)}{x(\sqrt{x^2+9}+3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+9-9}{x(\sqrt{x^2+9}+3)} = \frac{0}{6} = 0. \end{aligned}$$

b)  $1^\infty$  esetünk van  $\Rightarrow$  felírjuk az alaphoz levő kifejezést  $(1 + u)$  alakba, ahol  $u \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+2}{3x-2}\right)^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \left(1 + \frac{4}{3x-2}\right)^{\frac{3x-2}{4}} \right]^{\frac{4x}{3x-2}} = \\ &= e^{\frac{4}{3}}, \end{aligned}$$

mert  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{3x-2} = \frac{4}{3}$ .

### 4. Feladat (Szakadási hely vizsgálata):

Vizsgáljuk az

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(8x)}{\sin(4x)}, & \text{ha } x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \setminus \{0\} \\ -1, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvény szakadási helyét és adjuk meg ennek típusát is!

**Megoldás:**

Az elemi függvények folytonosak (értelmezési tartományukon), így  $f$  folytonos az  $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) \setminus \{0\}$  halmazon. Lehetséges szakadási hely csupán  $x_1 = 0$ .

$x_1 = 0$ -ban:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(8x)}{\sin(4x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(8x)}{8x} \cdot \frac{4x}{\sin 4x} \cdot \frac{8x}{4x} = \frac{8}{4} = 2,$$

mert  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(8x)}{8x} = 1$  és  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\sin 4x} = 1$  (nevezetes függvényhatárértékek).

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2 \neq -1 = f(0),$$

így  $x_1 = 0$  megszüntethető szakadási helye (tehát elsőfajú szakadási helye)  $f$ -nek.

**5. Feladat (Szakadási helyek vizsgálata):**

Vizsgáljuk az

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 20}{x^2 - x - 12}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{-3; 4\} \\ 0, & \text{ha } x \in \{-3; 4\} \end{cases}$$

függvény szakadási helyeit és adjuk meg azok típusát is!

**Megoldás:**

A racionális törtfüggvény nevezőjének megoldásai  $-3$  és  $4$ , a számláló megoldásai  $-5$  és  $4$ . Az elemi függvények folytonosak (értelmezési tartományukon), a racionális törtfüggvény pedig elemi függvény, így  $f$  folytonos az  $\mathbb{R} \setminus \{-3; 4\}$  halmazon. Lehetséges szakadási helyek:  $x_1 = -3$  és  $x_2 = 4$ .

$x_1 = -3$ -ban:

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x^2 + x - 20}{x^2 - x - 12} = \infty,$$

mert  $\frac{-14}{-0}$  esetünk van, míg

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x^2 + x - 20}{x^2 - x - 12} = -\infty,$$

mert  $\frac{-14}{+0}$  esetünk van, így  $x_1 = -3$  másodfajú szakadási hely.

$x_2 = 4$ -ben:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + x - 20}{x^2 - x - 12} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(x+5)}{(x-4)(x+3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x+5}{x+3} = \frac{9}{7} \neq 0 = f(4), \end{aligned}$$

így  $f$ -nek megszüntethető, azaz elsőfajú szakadása van  $x_2 = 4$ -ben.

(Megjegyezzük, hogy amennyiben pl.  $f(4) = \frac{9}{7}$  lett volna, akkor  $x_2 = 4$ -ben  $f$ -nek nem lenne szakadása.)

## 6. Feladat (Deriváltfüggvény kiszámítása):

Határozza meg  $f'(x)$ -et és hozzuk egyszerűbb alakba, ha

a)  $f(x) = \frac{3x^4}{\sqrt{x+1} \cos x}, \quad x \in (0, \frac{\pi}{2});$

b)  $f(x) = \sin\left(\frac{e^x+1}{e^{2x}}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$

**Megoldás:**

a)

$$\begin{aligned} \left(\frac{3x^4}{\sqrt{x+1} \cos x}\right)' &= \frac{(3x^4)' \sqrt{x+1} \cos x - 3x^4 (\sqrt{x+1} \cos x)'}{(x+1) \cos^2 x} = \\ &= \frac{12x^3 \sqrt{x+1} \cos x - 3x^4 \left[\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \cos x + \sqrt{x+1} (-\sin x)\right]}{(x+1) \cos^2 x} = \\ &= \frac{24x^4 \cos x + 24x^3 \cos x - 3x^4 \cos x + 6x^4 (x+1) \sin x}{2\sqrt{x+1} (x+1) \cos^2 x} = \\ &= \frac{21x^4 \cos x + 24x^3 \cos x + 6x^4 (x+1) \sin x}{2\sqrt{x+1} (x+1) \cos^2 x} \end{aligned}$$

minden  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$  esetén.

b)

$$\begin{aligned} \left[ \sin \left( \frac{e^x + 1}{e^{2x}} \right) \right]' &= \cos \left( \frac{e^x + 1}{e^{2x}} \right) \cdot \left( \frac{e^x + 1}{e^{2x}} \right)' = \\ &= \cos \left( \frac{e^x + 1}{e^{2x}} \right) \cdot \frac{(e^x + 1)' e^{2x} - (e^x + 1)(e^{2x})'}{e^{4x}} = \\ &= \cos \left( \frac{e^x + 1}{e^{2x}} \right) \cdot \frac{e^{3x} - 2e^{3x} - 2e^{2x}}{e^{4x}} = \\ &= -\frac{e^x + 2}{e^{2x}} \cos \left( \frac{e^x + 1}{e^{2x}} \right), \end{aligned}$$

minden  $x \in \mathbb{R}$  esetén.

### 7. Feladat (Derivált kiszámítása, érintőegyenes egyenletének felírása):

Deriváljuk a következő függvényt és írjuk fel a függvény grafikonjának  $x_0 = 0$  abszcisszájú pontjában az érintőegyenes egyenletét:

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{x + 5}, \quad x > -5.$$

**Megoldás:**

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(\sqrt{2x^2 + 1})'(x + 5) - \sqrt{2x^2 + 1}(x + 5)'}{(x + 5)^2} = \\ &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{2x^2 + 1}} \cdot 4x(x + 5) - \sqrt{2x^2 + 1} \cdot 1}{(x + 5)^2} = \\ &= \frac{2x(x + 5) - (2x^2 + 1)}{\sqrt{2x^2 + 1}(x + 5)^2} = \\ &= \frac{10x - 1}{\sqrt{2x^2 + 1}(x + 5)^2}. \end{aligned}$$

$$D_{f'} = (-5, \infty).$$

$f$  grafikonjához az  $x = x_0$  abszcisszájú pontban húzott érintőegyenes egyenlete:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0),$$

$$f'(0) = -\frac{1}{25}, f(0) = \frac{1}{5},$$

így a kért érintőegyenes egyenlete:

$$y - \frac{1}{5} = -\frac{1}{25}(x - 0), \text{ vagy } y = -\frac{1}{25}x + \frac{1}{5}.$$

### 8. Feladat (Implicit függvény deriválása):

Számítsuk ki  $y'(0)$  értékét az

$$x^3 + xy + y^3 = 27$$

implicit függvény esetén!

#### Megoldás:

Nem áll módunkban kifejezni  $y$ -t  $x$  függvényében, de mivel  $0^3 + 0 \cdot y(0) + (y(0))^3 = 27$ , az látható, hogy  $y_0 = 3$ .

Deriváljuk a képlet bal-, majd a jobb oldalát is (mindkét oldal akárhányszor differenciálható), végig szem előtt tartva, hogy  $y = y(x)$ , majd kifejezzük az  $y'(x)$ -et.

$$3x^2 + y + xy' + 3y^2y' = 0$$

$$y'(x + 3y^2) = -(3x^2 + y)$$

$$y' = -\frac{3x^2 + y}{x + 3y^2},$$

azaz

$$y'(0) = -\frac{3 \cdot 0^2 + 3}{0 + 3 \cdot 3^2} = -\frac{1}{9}.$$

A fenti feladatokból összeállítunk egy Minta 1. ZH-t is, melyet szintén a honlapomon találnak meg.