Matematika A1a - Analízis, D kurzusok, 2024/25 tanév, 1. félév
(Gazdálkodási és menedzsment alapszakos hallgatóknak)

A 2. zh témakörei – Feladattípusok

A feladatok mindegyike feleletválasztós teszt formában lesz megfogalmazva. A ZH-t nem Moodle platformon, hanem teremben írják majd. A ZH feladatai teszt formájúak lesznek, de nem igaz-hamis feleletválasztós, hanem mondatkiegészítő típusú kérdésekkel, azaz a kért részmegoldásokat mondatkiegészítéssel kell befejezni. Így rossz válaszért nem lesz pontlevonás.

A 2. ZH-n három feladatot kell megoldani: a teljes függvényvizsgálattal kapcsolatos feladat 10 pontos lesz, a maradék kettő pedig 5-5 pontos.

A 2. ZH feladattípusai a következők (természetesen a függvények és a számadatok teljesen mások lehetnek):

1. **Feladat (teljes függvényvizsgálat):** Végezzünk teljes függvényvizsgálatot és ábrázoljuk az alábbi függvényt:

$$f(x)=5-\frac{10x}{x^2+1},\ x\in(-\infty,+\infty).$$

Megoldás: Az f függvény kétszer is deriválható az értelmezési tartomány minden pontjában (mivel $\frac{10x}{x^2+1}$ racionális törtfüggvény) és

$$f'(x)=-\left(\frac{10\left(x^2+1\right)-10x(2x)}{\left(x^2+1\right)^2}\right)=-\frac{-10x^2+10}{\left(x^2+1\right)^2}=10\frac{x^2-1}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

Az $f'(x)=0$ egyenlet megoldásai:

$x^2-1=0$, $x_{1,2}=\pm1$. Elkészítjük az elsőrendű derivált előjelét és a monotonitási íveket tartalmazó táblázatot, vagy külön vizsgáljuk f' előjelét és kapjuk a következőt:

Monotonitás és lokális szélsőértékek:
Ha $x\in(-\infty,-1)$, akkor $f'(x)>0$, ezért f szigorúan monoton növekvő a $(-\infty,-1)$ intervallumon.
Ha $x\in(-1,1)$, akkor $f'(x)<0$, ezért f szigorúan monoton csökkenő a $(-1,1)$ intervallumon.
Ha $x\in(1,\infty)$, akkor $f'(x)>0$, ezért f szigorúan monoton növekvő az $(1,\infty)$ intervallumon.
Az $x_1=-1$ lokális maximumhely, $f(-1)=10$ lokális maximum érték, $x_1=1$ lokális minimumhely, $f(1)=0$ lokális minimum érték.
Megjegyzés: ha táblázatos alakban oldotta meg, nem szükséges külön összefoglalni, de akkor a táblázat utolsó sorába jelölésekkel be kell írni mindent, amit előbb felsoroltunk.

Konvexitás, inflexiós pontok:

$$f''(x)=10\left(\frac{2x\left(x^2+1\right)^2-2\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)2x}{\left(x^2+1\right)^4}\right)=\frac{20x\left(3-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^3}.$$

Az $f''(x)=0$ egyenlet megoldásai:

$x_3=0$ vagy $x_{4,5}=\pm\sqrt{3}$.

Ha $x\in(-\infty,-\sqrt{3})$, akkor $f''(x)>0$, ezért f konvex a $(-\infty,-\sqrt{3})$ intervallumon.

Ha $x\in(-\sqrt{3},0)$, akkor $f''(x)<0$, ezért f konkáv a $(-\sqrt{3},0)$ intervallumon.

Ha $x\in(0,\sqrt{3})$, akkor $f''(x)>0$, ezért f konvex a $(0,\sqrt{3})$ intervallumon.

Ha $x\in(\sqrt{3},\infty)$, akkor $f''(x)<0$, ezért f konkáv a $(\sqrt{3},\infty)$ intervallumon.

Inflexiós pontok: $x_3=0$, $x_4=-\sqrt{3}$ és $x_4=\sqrt{3}$.

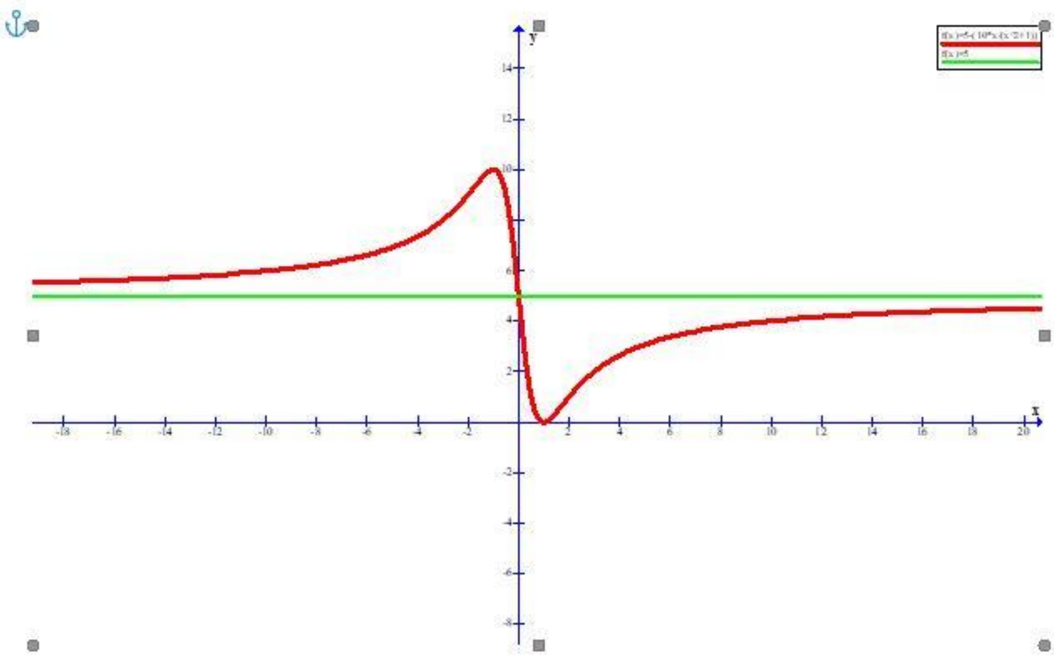
Megjegyzés: ha táblázatos alakban oldotta meg, nem szükséges külön összefoglalni, de akkor a táblázat utolsó sorába jelölésekkel be kell írni mindent, amit előbb felsoroltunk.
(Teljes pontszám csak indoklásért jár, ami vagy táblázat, vagy pedig a függvény másodrendű deriváltjának az előjelére való utalás.)

Határértékek és aszimptoták:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(5-\frac{10x}{x^2+1}\right)=5.$$

Tehát $\pm\infty$-ben az $y=5$ vízszintes aszimptota.

Ábra:



2. **Feladat (Nehezebb deriválás (explicit függvény esetében), érintő egyenes felírással):** – Ezt a feladattípust azért kérjük, mert nagyon meg kell tanulni a deriválást!

   Legyen $f(x) := \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 \ln(3x^2 + \mathrm{e}^{2x})$, $x \in R \setminus \{-1\}$.

   Írjuk fel az $x_0 = 0$ pontban az érintő egyenes egyenletét.

Megoldás:
A függvény deriválható értelmezési tartományán és a deriváltat a szorzatfüggvény deriválási szabályával, valamint a láncszabály alkalmazásával számítjuk ki:

$$f'(x) := \left[\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3\right]' \ln(3x^2 + \mathrm{e}^{2x}) + \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 \left[\ln(3x^2 + \mathrm{e}^{2x})\right]' =$$

$$= 3\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 \left(\frac{x-1}{x+1}\right)' \ln(3x^2 + \mathrm{e}^{2x}) + \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 \frac{(3x^2 + \mathrm{e}^{2x})'}{3x^2 + \mathrm{e}^{2x}} =$$

$$= 3\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 \frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2} \ln(3x^2 + \mathrm{e}^{2x}) + \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 \frac{6x + 2e^{2x}}{3x^2 + \mathrm{e}^{2x}} =$$

$$= 6\frac{(x-1)^2}{(x+1)^4} \ln(3x^2 + \mathrm{e}^{2x}) + \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 \frac{6x + 2e^{2x}}{3x^2 + \mathrm{e}^{2x}}.$$

Az érintő egyenes egyenlete: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

A kért érintő egyenes egyenlete: $y - 0 = -2(x - 0)$, azaz $y = -2x$.
MEGJEGYZÉS: Az is lehetséges, hogy a deriválás bonyolultnak ígérkezik, de a deriválandó függvény egyszerűbb alakra hozásával már könnyű dolgunk lesz. Például, ha
$f(x) = \ln\left(\frac{x^2+1}{x^4+1}\right)^3$, $\quad$ x ∈ ℝ,
akkor deriválás előtt érdemes átírni a függvény hozzárendelési szabályát:

$$f(x) = 3\ln(x^2 + 1) - 3\ln(x^4 + 1),$$

amit már egyszerű deriválni:

$$f'(x) = \frac{6x}{x^2 + 1} - \frac{12x^3}{x^4 + 1},$$

ahonnan pl. az $x_0 = 1$ pontban az érintő egyenes egyenle: $y - 0 = -3(x - 1)$
vagy $y = -3x + 3$.

A ZH harmadik feladatában lesz még a 3., vagy a 4. feladatban lévő integráltípusokból két integrál:

3. **Feladat:** Számítsa ki az alábbi határozatlan integrálokat:

a) (Alapintegrálokra vezető típus:) $\int \frac{\ln(4x)}{x}\mathrm{dx}, \quad x > \frac{1}{4};$

b) (Parciális integrálás bármelyik típusból:) $\int x^2 \cos(4x)\mathrm{dx} \quad (x \in R)$

Megoldás:

a) Mivel $(\ln(4x))' = \frac{1}{4x}(4x)' = \frac{4}{4x} = \frac{1}{x}$, így

$$\int \frac{\ln(4x)}{x}\mathrm{dx} = \int [\ln(4x)]' \; \ln(4x)\mathrm{dx} =$$

$$= \frac{[\ln(4x)]^2}{2} + c = \frac{\ln^2(4x)}{2} + c \;.$$

b) Két egymás utáni parciális integrálással kapjuk, hogy

$$\int x^2 \cos(4x)\mathrm{dx} = \int x^2\left(\frac{\sin(4x)}{4}\right)' \mathrm{dx} = x^2\frac{\sin(4x)}{4} - \frac{2}{4}\int x\sin(4x)\mathrm{dx} =$$

$$= x^2\frac{\sin(4x)}{4} - \frac{1}{2}\left[-\frac{x\cos(4x)}{4} + \frac{1}{16}\sin(4x)\right] + c =$$

$$= x^2\frac{\sin(4x)}{4} + \frac{1}{8}x\cos(4x) - \frac{1}{32}\sin(4x) + c,$$

ahol az első parciális integrálásnál $f(x) = x^2$ és $g'(x) = \cos(4x)$, $f'(x) = 2x$ és $g(x) = \frac{\sin(4x)}{4}$.

A második parciális integrálásnál $f(x) = x$ és $g'(x) = \sin(4x)$, $f'(x) = 1$ és $g(x) = -\frac{\cos(4x)}{4}$.

4. **Feladat:** Számítsa ki az alábbi határozatlan integrálokat:

a) (Alapintegrálokra vezető nehezebb típus:)

$$\int \frac{5}{\left[\cos^2(2x)\right]\sqrt[3]{\mathrm{tg}\,(2x)+1}}\mathrm{dx}, \; x \in \left(-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right);$$

b) (Könnyebb parciális integrálás:) $\int \ln(20x)\mathrm{dx} \quad (x > 0)$.

Megoldás:

a) Mivel $\left[tg(2x)+1\right]'=\dfrac{2}{\cos^2(2x)}$, integráljelen kívül osztunk, belül pedig szorzunk 2-vel és írhatjuk, hogy

$$\int \frac{5}{\left[\cos^2(2x)\right]\sqrt[3]{\text{tg }(2x)+1}}\text{dx}=\ \frac{5}{2}\int(\text{tg }(2x)+1)'\left[\text{tg }(2x)+1)\right]^{-\frac{1}{3}}\text{dx}=$$

$$=\ \frac{15}{4}\left[\text{tg }(2x)+1)\right]^{\frac{2}{3}}+c\,.$$

b) Parciális integrálással oldjuk meg. Szereposztás:

$f(x)=\ln(20x)$, $g'(x)=1$.

Így $f'(x)=\dfrac{1}{x}$, $g(x)=x$.

$\int \ln(20x)\text{dx} = \int x'\ln(20x)\text{dx}=x\ln(20x)-x+c$.