

Matematika A1a - Analízis, D kurzusok, 2025/26-os tanév, 1. félév (Gazdálkodási és menedzsment alapszakos hallgatóknak)

A 2. zh témakörei – Feladattípusok

A feladatok mindegyike feleletválasztós teszt formában lesz megfogalmazva. A ZH-t nem Moodle platformon, hanem teremben írják majd. A ZH feladatai teszt formájúak lesznek, de nem igaz-hamis feleletválasztós, hanem mondatkiegészítő típusú kérdésekkel, azaz a kért részmegoldásokat mondatkiegészítéssel kell befejezni. Így rossz válaszáért nem lesz pontlevonás.

A 2. ZH-n három feladatot kell megoldani: a teljes függvényvizsgálattal kapcsolatos feladat 10 pontos lesz, a maradék kettő pedig 5-5 pontos.

A 2. ZH feladattípusai a következők (természetesen a függvények és a számadatok teljesen mások lehetnek):

1. **Feladat (teljes függvényvizsgálat):** Végezzünk teljes függvényvizsgálatot és ábrázoljuk az alábbi függvényt:

$$f(x) = 5 - \frac{10x}{x^2 + 1}, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

Megoldás: Az f függvény kétszer is deriválható az értelmezési tartomány minden pontjában (mivel $\frac{10x}{x^2 + 1}$ racionális törtfüggvény) és

$$f'(x) = - \left(\frac{10(x^2 + 1) - 10x(2x)}{(x^2 + 1)^2} \right) = - \frac{-10x^2 + 10}{(x^2 + 1)^2} = 10 \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2}.$$

Az $f'(x) = 0$ egyenlet megoldásai:

$x^2 - 1 = 0$, $x_{1,2} = \pm 1$. Elkészítjük az elsőrendű derivált előjelét és a monotonitási íveket tartalmazó táblázatot, vagy külön vizsgáljuk f' előjelét és kapjuk a következőt:

Monotonitás és lokális szélsőértékek:

Ha $x \in (-\infty, -1)$, akkor $f'(x) > 0$, ezért f szigorúan monoton növekvő a $(-\infty, -1)$ intervallumon.

Ha $x \in (-1, 1)$, akkor $f'(x) < 0$, ezért f szigorúan monoton csökkenő a $(-1, 1)$ intervallumon.

Ha $x \in (1, \infty)$, akkor $f'(x) > 0$, ezért f szigorúan monoton növekvő az $(1, \infty)$ intervallumon.

Az $x_1 = -1$ lokális maximumhely, $f(-1) = 10$ lokális maximum érték, $x_1 = 1$ lokális minimumhely, $f(1) = 0$ lokális minimum érték.

Megjegyzés: ha táblázatos alakban oldotta meg, nem szükséges külön összefoglalni, de akkor a táblázat utolsó sorába jelölésekkel be kell írni mindent, amit előbb felsoroltunk.

Konvexitás, inflexiós pontok:

$$f''(x) = 10 \left(\frac{2x(x^2+1)^2 - 2(x^2-1)(x^2+1)2x}{(x^2+1)^4} \right) = \frac{20x(3-x^2)}{(x^2+1)^3}.$$

Az $f''(x) = 0$ egyenlet megoldásai:

$$x_3 = 0 \text{ vagy } x_{4,5} = \pm\sqrt{3}.$$

Ha $x \in (-\infty, -\sqrt{3})$, akkor $f''(x) > 0$, ezért f konvex a $(-\infty, -\sqrt{3})$ intervallumon.

Ha $x \in (-\sqrt{3}, 0)$, akkor $f''(x) < 0$, ezért f konkáv a $(-\sqrt{3}, 0)$ intervallumon.

Ha $x \in (0, \sqrt{3})$, akkor $f''(x) > 0$, ezért f konvex a $(0, \sqrt{3})$ intervallumon.

Ha $x \in (\sqrt{3}, \infty)$, akkor $f''(x) < 0$, ezért f konkáv a $(\sqrt{3}, \infty)$ intervallumon.

Inflexió pontok: $x_3 = 0$, $x_4 = -\sqrt{3}$ és $x_4 = \sqrt{3}$.

Megjegyzés: ha táblázatos alakban oldotta meg, nem szükséges külön összefoglalni, de akkor a táblázat utolsó sorába jelölésekkel be kell írni mindent, amit előbb felsoroltunk.

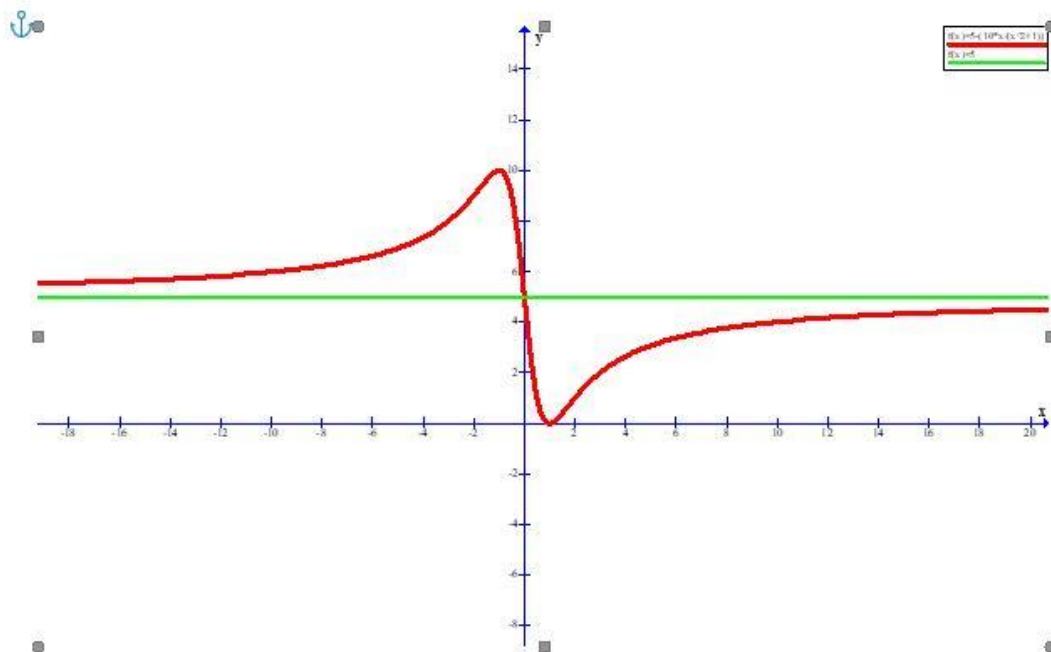
(Teljes pontszám csak indoklásért jár, ami vagy táblázat, vagy pedig a függvény másodrendű deriváltjának az előjelére való utalás.)

Határértékek és aszimptoták:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(5 - \frac{10x}{x^2+1} \right) = 5.$$

Tehát $\pm\infty$ -ben az $y = 5$ vízszintes aszimptota.

Ábra:



2. **Feladat (Nehezebb deriválás (explicit függvény esetében), érintő egyenes felírásával):** – Ezt a feladattípust azért kérjük, mert nagyon meg kell tanulni a deriválást!

$$\text{Legyen } f(x) := \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 \ln(3x^2 + e^{2x}), \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

Írjuk fel az $x_0 = 0$ pontban az érintő egyenes egyenletét.

Megoldás:

A függvény deriválható értelmezési tartományán és a deriváltat a szorzatfüggvény deriválási szabályával, valamint a láncszabály alkalmazásával számítjuk ki:

$$\begin{aligned} f'(x) &:= \left[\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 \right]' \ln(3x^2 + e^{2x}) + \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 \left[\ln(3x^2 + e^{2x}) \right]' = \\ &= 3 \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 \left(\frac{x-1}{x+1}\right)' \ln(3x^2 + e^{2x}) + \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 \frac{(3x^2 + e^{2x})'}{3x^2 + e^{2x}} = \\ &= 3 \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 \frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2} \ln(3x^2 + e^{2x}) + \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 \frac{6x + 2e^{2x}}{3x^2 + e^{2x}} = \\ &= 6 \frac{(x-1)^2}{(x+1)^4} \ln(3x^2 + e^{2x}) + \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 \frac{6x + 2e^{2x}}{3x^2 + e^{2x}}. \end{aligned}$$

Az érintő egyenes egyenlete: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

A kért érintő egyenes egyenlete: $y - 0 = -2(x - 0)$, azaz $y = -2x$.

MEGJEGYZÉS: Az is lehetséges, hogy a deriválás bonyolultnak ígérkezik, de a deriválandó függvény egyszerűbb alakra hozásával már könnyű dolgunk lesz.

Például, ha

$$f(x) = \ln \left(\frac{x^2+1}{x^4+1} \right)^3, \quad x \in \mathbb{R},$$

akkor deriválás előtt érdemes átírni a függvény hozzárendelési szabályát:

$$f(x) = 3 \ln(x^2 + 1) - 3 \ln(x^4 + 1),$$

amit már egyszerű deriválni:

$$f'(x) = \frac{6x}{x^2 + 1} - \frac{12x^3}{x^4 + 1},$$

ahonnan pl. az $x_0 = 1$ pontban az érintő egyenes egyenle: $y - 0 = -3(x - 1)$ vagy $y = -3x + 3$.

A ZH harmadik feladatában lesz még a 3., vagy a 4. feladatban lévő integráltípusokból két integrál:

3. **Feladat:** Számítsa ki az alábbi határozatlan integrálokat:

a) (Alapintegrálokra vezető típus:) $\int \frac{\ln(4x)}{x} dx, \quad x > \frac{1}{4};$

b) (Parciális integrálás bármelyik típusból:) $\int x^2 \cos(4x) dx \quad (x \in \mathbb{R})$

Megoldás:

a) Mivel $(\ln(4x))' = \frac{1}{4x} (4x)' = \frac{4}{4x} = \frac{1}{x}$, így

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln(4x)}{x} dx &= \int [\ln(4x)]' \ln(4x) dx = \\ &= \frac{[\ln(4x)]^2}{2} + c = \frac{\ln^2(4x)}{2} + c. \end{aligned}$$

b) Két egymás utáni parciális integrálással kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \int x^2 \cos(4x) dx &= \int x^2 \left(\frac{\sin(4x)}{4} \right)' dx = x^2 \frac{\sin(4x)}{4} - \frac{2}{4} \int x \sin(4x) dx = \\ &= x^2 \frac{\sin(4x)}{4} - \frac{1}{2} \left[-\frac{x \cos(4x)}{4} + \frac{1}{16} \sin(4x) \right] + c = \\ &= x^2 \frac{\sin(4x)}{4} + \frac{1}{8} x \cos(4x) - \frac{1}{32} \sin(4x) + c, \end{aligned}$$

ahol az első parciális integrálásnál $f(x) = x^2$ és $g'(x) = \cos(4x)$, $f'(x) = 2x$ és $g(x) = \frac{\sin(4x)}{4}$.

A második parciális integrálásnál $f(x) = x$ és $g'(x) = \sin(4x)$, $f'(x) = 1$ és $g(x) = -\frac{\cos(4x)}{4}$.

4. **Feladat:** Számítsa ki az alábbi határozatlan integrálokat:

a) (Alapintegrálokra vezető nehezebb típus:)

$$\int \frac{5}{\left[\cos^2(2x) \right] \sqrt[3]{\tan(2x)+1}} dx, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8} \right);$$

b) (Könnyebb parciális integrálás:) $\int \ln(20x) dx \quad (x > 0).$

Megoldás:

a) Mivel $[\operatorname{tg}(2x)+1]' = \frac{2}{\cos^2(2x)}$, integráljelen kívül osztunk, belül pedig szorzunk

2-vel és írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} \int \frac{5}{\left[\cos^2(2x)\right]^{\frac{3}{2}} \sqrt{\operatorname{tg}(2x)+1}} dx &= \frac{5}{2} \int (\operatorname{tg}(2x)+1)' [\operatorname{tg}(2x)+1]^{-\frac{1}{2}} dx = \\ &= \frac{15}{4} [\operatorname{tg}(2x)+1]^{\frac{1}{2}} + c. \end{aligned}$$

b) Parciális integrálással oldjuk meg. Szereposztás:

$$f(x) = \ln(20x), \quad g'(x) = 1.$$

$$\text{Így } f'(x) = \frac{1}{x}, \quad g(x) = x.$$

$$\int \ln(20x) dx = \int x' \ln(20x) dx = x \ln(20x) - x + c.$$