Matematika A1a - Analízis, Közgazdász hallgatóknak

Készítette: Fülöp Ottilia

1. Gyakorlat feladatai: Bevezető feladatok (Egyenletek, egyenlőtlenségek megoldása. Függvénytranszformációk. Halmazok)

Hasonló feladatokat találnak a Neptunban, az Információk menü legördítésével, a Neptun elektronikus tananyagok, azon belül pedig az **Egyváltozós valós függvények** interaktív e-tananyag kiválasztásával. (Ennek a tananyagnak a szerzői Dr. Fülöp Ottilia, Szűcs Zsolt, lektorai Dr. Nágel Árpád, Dr. Nagy Katalin)

1. Feladat (Egyenletek megoldása):

Oldjuk meg $\mathbb{R}$-en a következő egyenleteket és szemléltessük megoldáshalmazukat a számegyenesen:

a) $x + 2 = \sqrt{4x + 13}$;

b) $\left|\frac{3x+2}{x-1}\right| = 3$.

2. Feladat (Abszolútértékes egyenlőtlenség megoldása):

Oldjuk meg $\mathbb{R}$-en a következő egyenlőtlenséget és szemléltessük a megoldáshalmazt a számegyenesen:

$$\left|\frac{x}{2} + 2\right| \leq 3.$$

3. Feladat (Függvénytranszformációk):

Ábrázoljuk függvénytranszformációkkal a következő függvényt:

$$f(x) = x^2 - 6x + 8, \quad x \in \mathbb{R}.$$

4. Feladat (Egyenlőtlenségrendszer felírása):

Írjunk fel olyan egyenlőtlenségrendszert, melynek megoldáshalmaza az $A(0,0)$, $B(0,5)$ és $C(1,3)$ csúcspontú háromszög belseje!

5. Feladat (Halmazműveletek):

Bizonyítsuk be, hogy az

$$A = \{1, 2, 10\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geq 1\}$$

halmazok esetén $A \subseteq C$, $A \neq C$, $B \subseteq C$, $B \neq C$, $A \not\subseteq B$ és $B \not\subseteq A$!

6. Feladat (Indirekt bizonyítás):

Bizonyítsuk be indirekt, hogy $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$!

7. Feladat (Teljes indukció használata (opcionális)):

Bizonyítsuk be teljes indukcióval, hogy

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

2. Gyakorlat feladatai: Polinomok

1. Feladat (Egyszerű gyöktényezős alakra hozás):

Alakítsa szorzattá az alábbi polinomokat:

a) $p(x) = x^2 + 7x + 10$;

b) $q(x) = -2x^2 + 7x - 3$.

2. Feladat (Maradékos polinomosztás):

Végezzük el a $p(x) : q(x)$ polinomosztást, ha $p(x) = 2x^4 - x^2 - 5x + 6$ és $q(x) = x^2 - 3x$. Ellenőrizzük az osztás helyességét is!

3. Feladat (Polinom egész gyökeinek megkeresése):

Keressük meg a $p(x) = x^3 - x^2 - 25x + 25$ polinom egész gyökeit!

4. Feladat (Polinom valós gyökeinek megkeresése és a gyöktényezős alak felírása, I.):

Keressük meg a $p(x) = x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 2x - 3$ polinom valós gyökeit! Írjuk fel a polinom gyöktényezős alakját!

5. Feladat (Polinom gyökeinek megkeresése és a gyöktényezős alak felírása, II.):

A c valós paraméter mely értékére lesz $x_1 = 1$ gyöke a $p(x) = 4x^4 + cx^3 - 3x^2 - 4x - 1$ polinomnak? Írjuk fel a kapott c érték esetében a $p(x)$ polinom összes valós gyökét és a $p(x)$ polinom $\mathbb{R}$-beli gyöktényezős alakját!

6. Feladat (Egy paraméteres feladat (opcionális)):

A b valós paraméter mely értékére lesz $x_1 = -1$ legalább kétszeres gyöke a $p(x) = x^5 - bx^2 - bx + 1$ polinomnak?

3. Gyakorlat feladatai: Függvénykompozíció. Inverz függvény

1. Feladat (Egyváltozós valós-valós függvény értelmezési tartománya):

Adjuk meg az $\mathbb{R}$ lehető legbővebb részhalmazát, amelyen értelmezhető az

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x-1}}{3x+2} \log_{\frac{1}{3}} |2x-1|.$$

2. Feladat (Függvénykompozíció, I.):

Írjuk fel az $f \circ g$ és $g \circ f$ összetett függvényeket (ha léteznek) az alábbi esetben: $f(x) = x^3, \quad x \in \mathbb{R}$ és $g(x) = \sqrt[6]{x}, \quad x \in [0, \infty)$.
Mit veszünk észre?

3. Feladat (Függvénykompozíció, II.):

Írjuk fel az $f \circ g$ és $g \circ f$ összetett függvényeket (ha léteznek) az alábbi esetekben:

a) $f(x) = 1 - x^2, \quad x \in \mathbb{R}$ és $g(x) = \sqrt{x}, \quad x \geq 0$;

b) $f(x) = x^2, \quad x \in \mathbb{R}$ és $g(x) = 2^x, \quad x \in \mathbb{R}$.

4. Feladat (Invertálhatóság vizsgálata):

Bizonyítsuk be, hogy az

$$f(x) = |x^2 - 7x + 12|, \quad x \in \mathbb{R}$$

függvény nem invertálható!

5. Feladat (Inverz függvény felírása, I.):

Bizonyítsuk be, hogy az

$$f(x) = \frac{x-2}{2x+3}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}\right\}$$

függvény invertálható és állítsuk elő az inverz függvényt is!

6. Feladat (Inverz függvény felírása, II. (opcionális)):

Bizonyítsuk be, hogy az

$$f(x) = \frac{x+1}{x-2}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

függvény invertálható és állítsuk elő az inverz függvényt is!

7. Feladat (Egy érdekes függvény inverze (opcionális)):

Bizonyítsuk be, hogy az

$$f(x) = \sqrt[3]{27 - x^3}, \quad x \in \mathbb{R}$$

függvény invertálható és állítsuk elő az inverz függvényt is! Mit veszünk észre?

4. Gyakorlat feladatai: Numerikus sorozatok határértéke. Függvényhatárértékek. Folytonosság. Szakadási helyek típusai

A numerikus sorozatok határértékével kapcsolatos összefoglaló (előadáson volt)

Határértékszámításkor (legyen az numerikus sorozat határértéke vagy függvényhatárérték) mindig azzal kezdünk, hogy *behelyettesítünk*. Sorozatok határértékszámítása esetén n helyére ∞-t helyettesítünk. Lehet, hogy behelyettesítés után azonnal eredményhez jutunk, például a következő esetekben:

$$\infty + \infty = \infty; \quad -\infty - \infty = -\infty; \quad \infty \cdot (-\infty) = -\infty; \quad \frac{k}{\pm\infty} = 0;$$

$$\forall k > 0 \text{ esetén} \quad k \cdot 0 = 0; \quad k \cdot \infty = \infty; \quad (-k) \cdot \infty = -\infty.$$

Az is lehet, hogy behelyettesítés után *kritikus esetünk* lesz, például:

$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}; \quad \frac{0}{0}; \quad 0 \cdot (\pm\infty); \quad \infty - \infty; \quad 0^0; \quad (\pm\infty)^0; \quad 1^{\pm\infty}$$

alakok bármelyikét kapjuk, ekkor a határérték kiszámítása további „ügyességet" igényel.

Előadáson tanultuk, hogyan kell sorozatok határértékét kiszámítani, most ismételjük át a legfontosabbakat:

- *Polinom alak határértéke ∞ vagy $-\infty$, főegyütthatótól függően.* Például a

$$\lim_{n\to\infty} (3n^3 - 3n + 1)$$

esetén behelyettesítés után $(\infty - \infty)$ esetünk van, de azonnal láthatjuk, hogy ∞ lesz az eredmény, mert a magasabb fokú tag együtthatója pozitív. Ugyanis kiemelve az előforduló legmagasabb kitevőjű n hatványt:

$$\lim_{n\to\infty}(3n^3 - 3n + 1) = \lim_{n\to\infty} n^3\left(3 - \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right) = \infty,$$

mert újabb behelyettesítés már eredményt ad, $\frac{3}{n^2}$ és $\frac{1}{n^3}$ nullához tartanak, a zárójel emiatt 3-hoz tart, és így $\infty^3 \cdot 3 = \infty$. A fentiek miatt azt is észrevesszük, hogy tetszőleges pozitív főegyütthatójú polinom alak határértéke ∞, míg tetszőleges negatív főegyütthatójú polinom alak határértéke $-\infty$.

- *Racionális tört alak határértéke ∞ vagy $-\infty$, ha a számláló foka nagyobb (ez függ a főegyütthatók előjelétől); 0, ha a nevező foka nagyobb, főegyütthatók hányadosa, ha egyenlők a fokszámok.* Például a

  $$\lim_{n\to\infty}\frac{9n+1}{9n-1}$$

  határértéknél behelyettesítés után $\frac{\infty}{\infty}$ esetünk van. Kiemelünk mind a számlálóban, mind pedig a nevezőben n-et (azaz n előforduló legmagasabb hatványát), és újabb helyettesítés már eredményt ad, hiszen $\frac{1}{n}$ 0-hoz tart:

  $$\lim_{n\to\infty}\frac{9n+1}{9n-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n\left(9+\frac{1}{n}\right)}{n\left(9-\frac{1}{n}\right)} = \frac{9}{9} = 1.$$

  Valóban itt a főegyütthatók hányadosát kaptuk, ugyanis a számlálóban és a nevezőben ugyanolyan fokú polinomjaink voltak, így a kiemelt tényezőkkel egyszerűsíthettünk.

- *„$\sqrt{} - \sqrt{}$” alakú határérték esetén bővítünk a konjugálttal és az $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ képletet használjuk.*

- Az 1^∞ kritikus esetben pedig e-vel kapcsolatos az eredményünk, legfeljebb nem látjuk benne az e számot, ugyanis a $(-\infty)$, ∞ vagy 0 hatványon van az e. Ilyenkor a következő képletet használjuk: Ha $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy nullához tartó, szigorúan monoton számsorozat, akkor

  $$\lim_{n\to\infty}(1+c_n)^{\frac{1}{c_n}} = \mathrm{e}.$$

Használjuk még az előadáson elhangzó következő eredményeket:

- $c \in \mathbb{R}$ esetén $\lim_{n\to\infty} c = c$;
- $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0 \quad \forall k \in \{1, 2, 3, \dots\};$$
- $$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, \text{ ha } |q| < 1 \\ 1, \text{ ha } q = 1 \\ \infty, \text{ ha } q \in (1, +\infty) \\ \text{divergens}, \text{ ha } q \in (-\infty, -1]; \end{cases}$$
- $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{k} = 1 \quad \forall k > 0;$$
- $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$
- $\forall k \in \mathbb{R}$ és $\forall a \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ esetén
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0;$$
- $\forall a \in \mathbb{R}$ esetén
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0;$$
- $\forall k \in \mathbb{R}$ esetén
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{n!} = 0;$$
- $$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0;$$
- $\forall k > 0$ és $a > 1$ esetén esetén
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n^k} = 0.$$

Nevezetes sorozatok nagyságrendje:

$$\log_a n \ll n^k \ll a^n \ll n! \ll n^n,$$

ahol $a > 1$ és $k > 0$.

Függvényhatárértékekkel kapcsolatos összefoglaló (előadáson volt)
Nevezetes függvényhatárértékek 1.:

1. $$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0; \quad \text{és} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0;$$

2. $$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty; \quad \text{és} \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty;$$

3. $$\lim_{x\to\infty} a^x = \begin{cases} 0, & \text{ha } 0 < a < 1 \\ \infty, & \text{ha } a > 1 \end{cases}$$

Nevezetes függvényhatárértékek 2.:

1. $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1; \quad \text{és} \quad \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1;$$

2. $$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1; \quad \text{és} \quad \lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x} = 1;$$

3. $$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}; \quad \text{és} \quad \lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e};$$

4. $$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}, \quad \text{ha } a \in (0,\infty) \setminus \{1\},$$
$$\text{speciális esetben} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Nevezetes függvényhatárértékek 3.:

1.
$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a,\qquad \text{ha } a\in(0,\infty)\setminus\{1\},$$
$$\text{speciális esetben}\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}=1;$$

2.
$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha,\qquad \text{ahol } \alpha\in\mathbb{R}.$$

Egy korlátos és egy nullához tartó függvény szorzata:
Egy korlátos és egy nullához tartó függvény szorzata nullához tart.

Jegyezzük meg: Racionális törtfüggvény limesze esetén

- ha $x\to 0$ és $\frac{0}{0}$ kritikus esetünk van, akkor x előforduló legalacsonyabb hatványát emeljük ki;
- ha $x\to\infty$ vagy $x\to-\infty$ és a $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ kritikus esetek valamelyike áll fenn, akkor x előforduló legmagasabb hatványát emeljük ki!

Racionális törtfüggvény limesze:
Racionális törtfüggvény limesze esetén, ha $x\to\infty$ vagy $x\to-\infty$, az eredmény

- konstans, éspedig a főegyütthatók hányadosa, ha a számláló foka = nevező fokával;
- ∞ vagy $-\infty$, ha a számláló foka nagyobb;
- 0, ha a nevező foka nagyobb.

Megjegyzés:
Racionális törtfüggvény határértéke esetén, ha $x\to x_0$, ahol x_0 egy nemnulla szám, és $\frac{0}{0}$ esetünk van, akkor számlálóban is és nevezőben is gyöktényezős alakra hozunk, majd egyszerűsítünk.

Definíció [Szakadási hely]:
Legyen f értelmezett az x_0 valamely környezetében. Az x_0-beli folytonossághoz a következőknek kell teljesülniük:

- $\exists \lim_{x\to x_0} f(x)$;

- $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Ha a fentiekből valamelyik nem teljesül, akkor $\Rightarrow$ x_0 *szakadási hely.*

Definíció [Szakadási helyek típusai]:
Tegyük fel, hogy f értelmezett az x_0 valamely környezetében és x_0 szakadási hely.

- Ha $\exists \lim_{x\to x_0} f(x)$ és véges, de $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$, akkor $x = x_0$ *megszüntethető szakadási helye f-nek.*

- Ha $\exists \lim_{x\to x_0^+} f(x)$ és $\exists \lim_{x\to x_0^-} f(x)$, mindketten végesek, de egymástól különböző számok, akkor $x = x_0$ *ugráshelye f-nek.*

- Minden előzőktől különböző esetben az $x = x_0$ *szakadási hely másodfajú.*

A megszüntethető szakadási helyeket és az ugráshelyeket közösen *elsőfajú szakadási helyeknek* nevezzük.

1. Feladat (Numerikus sorozatok határértéke):
Számítsuk ki az alábbi sorozatok határértékét

a)
$$a_n = \left(\frac{1-3n}{4n+12}\right)^7, \quad n \in \mathbb{N};$$

b)
$$a_n = \frac{n^2+3n-1}{n^7+7n+5}, \quad n \in \mathbb{N};$$

c)
$$a_n = \frac{3n^3-3n+1}{5n^3+n^2-1}, \quad n \in \mathbb{N};$$

d)
$$a_n = \frac{1-n^3}{n^2+10}, \quad n \in \mathbb{N};$$

e)
$$a_n = \sqrt{n^2+3n-10} - 3n, \quad n \in \mathbb{N};$$

f)

$$a_n = \sqrt[n]{3^n + 2^n}, \quad n \in \mathbb{N};$$

g)

$$a_n = \left(\frac{9n+1}{9n-1}\right)^{2n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

h)

$$a_n = \frac{n^{1000}}{2^n}, \quad n \in \mathbb{N};$$

i)

$$a_n = \frac{\log_3 n + n!}{n^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

2. Feladat (Függvényhatárérték számítások, I.):

Számítsuk ki a következő függvényhatárértékeket:

a) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x} - 1}$;

b) $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^5 + 3x^2 + 1}{x^2 - 10x + 1}$;

c) $\lim_{x \to 0} \frac{x^7 - 2x^5 + x^2}{x^9 + 3x^4 - 2x^2}$.

3. Feladat (Függvényhatárérték számítások, II.):

A $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ összefüggés felhasználásával számítsuk ki a következő függvényhatárértékeket:

a) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 7x}{\sin 3x}$;

b) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$;

c) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{3x}$.

4. Feladat (Egyoldali határértékek kiszámítása):

Számítsuk ki az alábbi függvény esetén a jobb- és bal oldali határértéket az $x_0 = 1$ pontban:

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x^3 - 1}.$$

5. Feladat (Szakadási helyek vizsgálata, I.):

Vizsgáljuk az

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 10}, \text{ ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{2; 5\} \\ 0, \text{ ha } x \in \{2; 5\} \end{cases}$$

függvény szakadási helyeit és adjuk meg azok típusát is!

6. Feladat (Szakadási hely vizsgálata, II.):

Vizsgáljuk az

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{|x|}, \text{ ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 1, \text{ ha } x = 0 \end{cases}$$

függvény szakadási helyét és adjuk meg ennek típusát is!

7. Feladat (Szakadási hely vizsgálata, III.):

Vizsgáljuk az

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}, \text{ ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 1, \text{ ha } x = 0 \end{cases}$$

függvény szakadási helyét és adjuk meg ennek típusát is!

8. Feladat (Függvényhatárérték számítás, III.):

Számítsuk ki a

$$\lim_{x \to \infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - x)$$

függvényhatárértéket!

9. Feladat (Függvényhatárérték számítás, IV.):

Számítsuk ki a

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x^2}$$

függvényhatárértéket!

5-6. Gyakorlatok feladatai: Deriválás. Adott pontbeli érintőegyenes felírása

Az 5. Gyakorlaton érdemes a következő feladatokra fókuszálni: 1., 2., 3., 4.a,b,c,d,f, 5., 6., 7.
A 6. Gyakorlaton érdemes megtárgyalni a következő feladatokat: 4.e,g,h, 8., 9., és a maradék időben a tankörök által nehezebbnek tartott feladattípusokat/deriválást gyakorolni. Az 1. zárthelyit a 6. héten írják, így az 5. gyakorlaton meg kell tanulni deriválni, deriváltfüggvényt felírni és megadni adott abszcisszájú grafikonbeli pontban az érintőegyenes egyenletét!

1. Feladat (Deriváltfüggvény előállítása definíció alapján. Érintőegyenes egyenlete, I.):

Számítsuk ki a definíció alapján a következő függvény deriváltfüggvényét és írjuk fel a grafikon $x_0 = 3$ abszcisszájú pontjához tartozó érintőegyenes egyenletét:

$$f(x) = \sqrt{x^2-1}, \quad x \in [1,\infty).$$

2. Feladat ($f'(x)$ kiszámítása, II.):

Határozza meg $f'(x)$-et és hozzuk egyszerűbb alakba, ha

a) $f(x) = x^3 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{5x^5}, \quad x \in \mathbb{R}\setminus\{0\};$

b) $f(x) = 3a^x - \cos x; \quad x \in \mathbb{R}, \quad (a>0);$

c) $f(x) = (1+x^3)\mathrm{e}^x, \quad x \in \mathbb{R}.$

3. Feladat ($f'(x)$ kiszámítása. Érintőegyenes helyzetének vizsgálata, III.):

Legyen
$$f(x) = \frac{1-x}{1+x} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

a) Határozza meg $f'(x)$-et és hozzuk egyszerűbb alakba!

b) Mennyi a grafikon $x_0 = 1$ abszcisszájú pontjában az érintőegyenes iránytangense?

c) Írjuk fel az $x_0 = 1$ abszcisszájú pontban az érintőegyenes egyenletét!

d) Van-e olyan pontja a grafikonnak, melyben az érintőegyenes vízszintes?

4. Feladat ($f'(x)$ kiszámítása láncszabállyal, IV.):

Határozza meg $f'(x)$-et láncszabállyal:

a) $f(x) = (3x^2 + 4x + 1)^5, \quad x \in \mathbb{R};$

b) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}, \quad x \in \mathbb{R};$

c) $f(x) = (1 + \sqrt[3]{x})^3, \quad x \in \mathbb{R};$

d) $f(x) = \mathrm{e}^{x^4}, \quad x \in \mathbb{R};$

e) $f(x) = \mathrm{tg}\,[(x^2 + x)^3], \quad x \in (0, 10^{-2});$

f) $f(x) = \cos(\mathrm{e}^{2x+3}), \quad x \in \mathbb{R};$

g) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}, \quad x \in [0, \infty);$

h) $f(x) = \sqrt[3]{1 + x\sqrt{x+3}}, \quad x \in [0, \infty)$. (Ez utóbbi eredményét hozzuk egyszerűbb alakba!)

5. Feladat (Deriváltfüggvény kiszámítása, V.):

Határozza meg f deriváltfüggvényét, ha f hozzárendelési szabálya
$$f(x) = \frac{x^3 + 3}{x^2 - x - 2},$$
értelmezési tartománya pedig a lehető legbővebb!

6. Feladat (Deriváltfüggvény kiszámítása. Érintőegyenes egyenlete, VI.):

Határozza meg f deriváltfüggvényét, ha f hozzárendelési szabálya

$$f(x) = (x^2 + 1)\mathrm{e}^x,$$

értelmezési tartománya pedig a lehető legbővebb! Írjuk fel az $x_0 = 0$ abszcisszájú pontban a grafikonhoz húzott érintőegyenes egyenletét!

7. Feladat (Derivált kiszámítása, érintőegyenes egyenletének felírása, VII.):

Deriváljuk a következő függvényt és írjuk fel a függvény grafikonjának $x_0 = 0$ abszcisszájú pontjában a grafikonhoz húzott érintőegyenes egyenletét!

$$f(x) = \frac{\cos\sqrt{x^2+1}}{x+2}, \quad x > -2.$$

8. Feladat (Implicit függvény deriválása, érintőegyenes egyenlete, VIII.):

Számítsuk ki $y'(0)$ értékét az

$$x^9 + xy + y^9 = 512$$

implicit függvény esetén! Írjuk fel az $x_0 = 0$ abszcisszájú pontban a grafikonhoz húzott érintőegyenes egyenletét!

9. Feladat (Derivált kiszámítása, érintőegyenes egyenletének felírása, IX. (opcionális)):
Deriváljuk a következő függvényt és írjuk fel a függvény grafikonjának $x_0 = 0$ abszcisszájú pontjában a grafikonhoz húzott érintőegyenes egyenletét!

$$f(x) = \frac{\ln\sqrt{1+x}}{(x^2+1)^4}, \quad x > -1.$$

7-8. Gyakorlatok feladatai: Monotonitási intervallumok meghatározása. Lokális szélsőértékek és egyéb szépségek

1. Feladat (Másodrendű derivált kiszámítása):

Számítsuk ki az f függvény másodrendű deriváltját, ha

$$f(x) = \frac{1}{\cos x}, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

2. Feladat (Derivált kiszámítása. Bolzano-féle közbülsőpont tétel alkalmazása):

Határozza meg f deriváltfüggvényét és mutassuk meg, hogy az $f(x) = 0$ egyenletnek pontosan egy gyöke van a $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$ intervallumban!

$$f(x) = \left(x - \frac{\pi}{6}\right)\cos x + x \operatorname{tg}\frac{3x}{2}, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right).$$

3. Feladat (Monotonitási intervallumok meghatározása. Lokális szélsőértékek kiszámítása, I.):

Határozza meg az alábbi függvény monotonitási intervallumait, lokális szélsőértékhelyeit és lokális szélsőértékeit:

$$f(x) = \frac{x^3}{3x^2+1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

4. Feladat (Monotonitási intervallumok meghatározása. Lokális szélsőértékek kiszámítása, II.):

Határozza meg az alábbi függvény monotonitási intervallumait, lokális szélsőértékhelyeit és lokális szélsőértékeit:

$$f(x) = x - \ln(1+x), \quad x \in (-1, \infty).$$

5. Feladat (Függvény differenciálhatóságának vizsgálata. Deriváltfüggvény felírása):

Vizsgáljuk az

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1, \text{ ha } x \le 0 \\ \sqrt{1+x}, \text{ ha } 0 < x \le 3 \\ 2, \text{ ha } 3 < x \end{cases}$$

függvény folytonosságát és differenciálhatóságát az $x_1 = 0$ és $x_2 = 3$ helyeken! Írjuk fel a deriváltfüggvényt (ahol létezik)!

6. Feladat (Korlátos és zárt intervallumon értelmezett f függvény abszolút szélsőértékei):

A korlátos és zárt intervallumon folytonos függvényekre vonatkozó Weierstrass tételt használva határozzuk meg az alábbi korlátos és zárt intervallumon értelmezett f függvény abszolút maximumát és abszolút minimumát, ha ezek léteznek! Hol veszi fel f ezeket az értékeket?

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1, \quad x \in [-10, 12]$$

7. Feladat (Nem korlátos intervallumon értelmezett f függvény abszolút szélsőértékei):

Határozzuk meg az alábbi nem korlátos intervallumon értelmezett f függvény abszolút maximumát és abszolút minimumát, ha ezek léteznek! Hol veszi fel f ezeket az értékeket?

$$f(x) = 2x + \frac{200}{x}, \quad x \in (0, \infty)$$

8. Feladat (Szöveges szélsőérték-feladatok):

Határozzuk meg az R sugarú körbe írható maximális területű téglalap területét!

9. Feladat (Logaritmikus derivált):

Határozzuk meg az $f'(x)$-et, ha

$$f(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{x^2}, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right).$$

9. Gyakorlat feladatai: Konvex, konkáv ívek, inflexiós pontok. Aszimptoták. L'Hospital szabály

1. Feladat (Konvex, konkáv ívek, inflexiós pontok kiszámítása, I.):

Adjuk meg, mely intervallumokon konvex és melyeken konkáv az alábbi függvény! Adjuk meg továbbá az inflexiós pontokat is!

$$f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 36x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

2. Feladat (Konvex, konkáv ívek, inflexiós pontok kiszámítása, II.):

Adjuk meg, mely intervallumokon konvex és melyeken konkáv az alábbi függvény! Adjuk meg továbbá az inflexiós pontokat is!

$$f(x) = \frac{x^3}{3x^2 + 1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

3. Feladat (Aszimptotikus vizsgálat, I.):

Vizsgáljuk meg, van-e a következő függvénynek ∞-ben és $(-\infty)$-ben aszimptotája? Ha igen, kérjük az aszimptota/aszimptoták egyenletét!

$$f(x) = \frac{x^2 + 9}{x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

4. Feladat (Aszimptotikus vizsgálat, II.):

Vizsgáljuk meg, van-e a következő függvénynek ∞-ben és $(-\infty)$-ben aszimptotája? Ha igen, kérjük az aszimptota/aszimptoták egyenletét!

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} + x, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

5. Feladat (Aszimptotikus vizsgálat, III.):

Vizsgáljuk meg, van-e a következő függvénynek ∞-ben és $(-\infty)$-ben aszimptotája? Ha igen, kérjük az aszimptota/aszimptoták egyenletét!

$$f(x) = x^3 - x^2 - 2x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

6. Feladat (L'Hospital szabály alkalmazása):

L'Hospital szabállyal számítsuk ki az alábbi határértékeket! Állapítsuk meg, milyen kritikus eseteink vannak?

a) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\mathrm{e}^x - 1}\right)$;

b) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$;

c) $\lim_{x\to 0^+} \left(\ln \frac{1}{x}\right)^x$.

10. Gyakorlat feladatai: Teljes függvényvizsgálat

1. Feladat (Teljes függvényvizsgálat, I.):

Végezzen teljes függvényvizsgálatot és vázolja a grafikont, ha

$$f(x) = \left(\frac{x-1}{2x+1}\right)^2, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}.$$

2. Feladat (Teljes függvényvizsgálat, II.):

Végezzen teljes függvényvizsgálatot és vázolja a grafikont, ha

$$f(x) = x - \operatorname{arctg} x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

3. Feladat (Teljes függvényvizsgálat, III.):

Végezzen teljes függvényvizsgálatot és vázolja a grafikont, ha

$$f(x) = x^x, \quad x \in (0, \infty).$$

4. Feladat (Teljes függvényvizsgálat, IV.):

Végezzen teljes függvényvizsgálatot és vázolja a grafikont, ha

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

5. Feladat (Teljes függvényvizsgálat, V.):

Végezzen teljes függvényvizsgálatot és vázolja a grafikont, ha

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

6. Feladat (Teljes függvényvizsgálat, VI. (opcionális)):

Végezzen teljes függvényvizsgálatot és vázolja a grafikont, ha

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{2 - x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}.$$

11. Gyakorlat feladatai: Határozatlan integrál. Határozott integrál. Síkidom területe (I.)

1. Feladat ($f'(x)$-ből $f(x)$ felírása):

Adjuk meg az $f(x)$-et az alábbi esetek mindegyikében! $f(x)$ értelmezési tartománya az a legbővebb halmaz legyen, melyen f differenciálható!

a) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x \in (0, \infty);$

b) $f''(x) = 3\mathrm{e}^x + 5\sin x, \quad x \in \mathbb{R};$

c) $f^{(3)}(x) = \sin x, \quad x \in \mathbb{R}.$

2. Feladat (Határozatlan integrálok kiszámítása, I.):

Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat:

a) $\int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}) \,\mathrm{d}x$, ahol $x > 0$;

b) $\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} \,\mathrm{d}x$, ahol $x > 0$;

c) $\int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x$, ahol $x > 0$.

3. Feladat (Határozatlan integrálok kiszámítása első helyettesítési módszerrel, II.):

Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat:

a) $\int \frac{\mathrm{e}^{3x}}{\mathrm{e}^{3x}+5} \,\mathrm{d}x$, ahol $x \in \mathbb{R}$;

b) $\int x^3(4x^4 + 6)^{2016} \,\mathrm{d}x$, ahol $x \in \mathbb{R}$;

c) $\int \frac{1}{\cos^2 x\sqrt{(\operatorname{tg} x)^3}} \,\mathrm{d}x$, ahol $x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$.

4. Feladat (Határozatlan integrálok kiszámítása parciális integrálással, III.):

Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat:

a) $\int x^2 \cos(5x)\,\mathrm{d}x$, ahol $x \in \mathbb{R}$;

b) $\int \mathrm{e}^{-3x} \sin(2x)\,\mathrm{d}x$, ahol $x \in \mathbb{R}$;

c) $\int \mathrm{e}^{-x} \cos(3x)\,\mathrm{d}x$, ahol $x \in \mathbb{R}$;

d) $\int \operatorname{arctg}(3x)\,\mathrm{d}x$, ahol $x \in \mathbb{R}$;

e) $\int x^2 \ln x\,\mathrm{d}x$, ahol $x \in (0, \infty)$;

f) $\int \mathrm{e}^{-2x} \sin x\,\mathrm{d}x$, ahol $x \in \mathbb{R}$.

(Ebben a feladatban az utolsó integrál opcionális, a többi kötelezően megoldandó!)

5. Feladat (Határozott integrálok kiszámítása, I.):

Számítsuk ki az alábbi határozott integrált:

$$\int_1^{\mathrm{e}} x^2 \ln x\,\mathrm{d}x.$$

6. Feladat (Síkidom területének kiszámítása, I.):

Számítsuk ki annak a síkidomnak a területét, melyet az $f(x) = x^2 \ln x, \quad x \in (0, \infty)$ függvény grafikonja, az x-tengely, valamint az $x = 1$ és $x = \mathrm{e}$ egyenesek határolnak!

7. Feladat (Síkidom területének kiszámítása, II.):

Számítsuk ki annak a síkidomnak a területét, melyet az $f(x) = x^2, \quad x \in \mathbb{R}$ és a $g(x) = \sqrt{2x}, \quad x \in [0, \infty)$ függvények grafikonja zár be!

12-14. Gyakorlatok feladatai: Határozott integrálok. Racionális törtfüggvények integrálja. Síkidom területe (II.)
Az integrálszámítás egyéb alkalmazásai

1. Feladat (Határozott integrálok kiszámítása, II.):

Számítsuk ki az alábbi határozott integrálokat:

a) $\int_0^1 \sqrt{5x+4}\,\mathrm{d}x$;

b) $\int_1^3 x^2\sqrt[3]{1+x^3}\,\mathrm{d}x$;

c) $\int_0^\pi \mathrm{e}^x\sin(2x)\,\mathrm{d}x$;

d) $\int_1^4 \ln(5x-2)\,\mathrm{d}x$.

Racionális törtfüggvények határozatlan integrálásával kapcsolatos feladatok:

2. Feladat (Ha az integrandus függvény nevezője elsőfokú polinom, vagy annak hatványa):

Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat, ha $x > 3$:

a) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x-3}$;

b) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-3)^2}$.

3. Feladat (Ha az integrandus függvény számlálója magasabb fokú, mint a nevezője $\to$ polinomosztással):

Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrált, ha $x \in \mathbb{R}$:

$$\int \frac{x^3-x^2-x-7}{x^2+2x+3}\,\mathrm{d}x.$$

4. Feladat (Ha a nevező másodfokú, negatív diszkriminánsú, a számláló pedig elsőfokú):

Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrált, ha $x \in \mathbb{R}$:

$$\int \frac{2x+3}{x^2+2x+3}\,\mathrm{d}x.$$

5. Feladat (Ha a nevező másodfokú, 0 diszkriminánsú, a számláló pedig elsőfokú → parciális törtekre bontással):

Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrált, ha $x \in (-1, \infty)$:

$$\int \frac{2x+3}{x^2+2x+1} \, \mathrm{d}x.$$

6. Feladat (Ha a nevező másodfokú, pozitív diszkriminánsú, a számláló pedig elsőfokú → parciális törtekre bontással):

Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrált, ha $x \in (1, \infty)$:

$$\int \frac{11-x}{6x^2+x-2} \, \mathrm{d}x.$$

7. Feladat (Racionális törtfüggvény határozott integrálja, I.):

Számítsuk ki az alábbi határozott integrált:

$$\int_1^2 \frac{11-x}{6x^2+x-2} \, \mathrm{d}x.$$

8. Feladat (Racionális törtfüggvény határozott integrálja, II.):

Számítsuk ki az alábbi határozott integrált:

$$\int_0^1 \frac{2x+3}{x^2+2x+3} \, \mathrm{d}x.$$

9. Feladat (Síkidom területének kiszámítása, III.):

Számítsuk ki annak a síkidomnak a területét, melyet az $y = -x^2 + 8x - 9, \quad x \in \mathbb{R}$ és az $y = \frac{x^2}{2} - 4x + 9, \quad x \in \mathbb{R}$ egyenletű görbék zárnak be!

10. Feladat (Síkidom területének kiszámítása, IV.):

Számítsuk ki annak a síkidomnak a területét, melyet az $y = x - 1$ egyenes és az $y^2 = 2x + 6$ egyenletű parabola zár be!

11. Feladat (x-tengely körüli forgástest térfogatának kiszámítása, I.):

Számítsuk ki az $f : [0, \pi], \quad f(x) = \sin x$ függvény grafikonjának x-tengely körüli megforgatásával keletkező forgástest térfogatát!

12. Feladat (x-tengely körüli forgástest térfogatának kiszámítása, II.):

Számítsuk ki az $f : [0, \pi], \quad f(x) = \mathrm{e}^{-x}\sqrt{\sin x}$ függvény grafikonjának x-tengely körüli megforgatásával keletkező forgástest térfogatát!

13. Feladat (Ívhossz kiszámítása):

Számítsuk ki az $f : [0, 4], \quad f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ függvény grafikonjának ívhosszát!

14. Feladat (Síkidom területének kiszámítása, V.):

Határozzuk meg annak a síkidomnak a területét, melyet az $y = x^4, \quad x \in \mathbb{R}$ és az $y = 3x^2 - 2, \quad x \in \mathbb{R}$ egyenletű görbék zárnak be!

15. Feladat (Síkidom területének kiszámítása, VI. (opcionális)):

Határozzuk meg annak a síkidomnak a területét, melyet az $y = -2x - 2, \quad x \in \mathbb{R}$ és az $y = x^2 + 2x + 1, \quad x \in \mathbb{R}$ egyenletű görbék zárnak be!