Matematika A1a - Analízis, D kurzusok, 2022/2023/1. félév

Az 1. ZH témakörei - a feladattípusok és egyéb tudnivalók

A feladatok mindegyike feleletválasztós teszt formában lesz megfogalmazva. Tippelni nem érdemes, mert ha valamit hibásan jelölnek be (a helyes válaszokat kell bejelölni), akkor pontlevonás jár. Teremben, tanári felügyelettel lebonyolított Moodle-platformos ZH lesz az 1.ZH. Aki pontosan 1 héttel a ZH időpontja előtt Teamsen jelzi nekem, hogy papír alapú ZH-tesztet szeretne írni, annak viszünk be feladatsort, de ebben az esetben minden megoldást, piszkozatot bekérünk. Természetesen pontozásnál csak a feladatlap tesztkérdéseinek bejelölt válasza számít! 45 percig lehet dolgozni a ZH-n. A Moodle platformon az 1. ZH előtti héten megnyitok egy Minta 1.ZH-t is, azt nem kötelező megoldani.

Az elért pontszámot a legvégén kerekített alakban tároljuk az MS Teams-beli csoportunk fájljai között és a vizsgára vitt pontszám kiszámításakor csak azt vesszük majd figyelembe.

A ZH-n 4 feladat lesz feleletválasztós teszt alakban a következő típusokból:

1. Feladat (Függvénykompozíció):

Legyen $f(x) = \sqrt{256 - x^4}$, $D_f = [-4, 4]$ és $g(x) = x^2$, $D_g = \mathbb{R}$. Írjuk fel az $f \circ g$ és $g \circ f$ összetett függvényeket, ha léteznek.

Megoldás:

$\exists f \circ g \Leftrightarrow R_g \cap D_f \neq \emptyset$.
$R_g \cap D_f = [0, \infty) \cap [-4, 4] = [0, 4] \neq \emptyset$.

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \in [-4, 4]\} = [-2, 2].$$

$f \circ g : [-2, 2] \to \mathbb{R}$, $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{256 - x^8}$.
$\exists g \circ f \Leftrightarrow R_f \cap D_g \neq \emptyset$.

$R_f \cap D_g = [0,16] \cap \mathbb{R} = [0,16] \neq \emptyset.$

$$D_{g\circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in [-4,4] \mid \sqrt{256-x^4} \in \mathbb{R}\} = [-4,4].$$

$g \circ f : [-4,4] \to \mathbb{R}$, $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \left(\sqrt{256-x^4}\right)^2 = 256 - x^4.$

2. Feladat (Polinom gyökeinek megkeresése és a gyöktényezős alakjának felírása):

A c valós paraméter mely értékére lesz $x_1 = -1$ gyöke a $p(x) = x^4 - x^3 + cx^2 + x + 6$ polinomnak? Írjuk fel a kapott c érték esetében a $p(x)$ polinom összes egész gyökét és a $p(x)$ polinom $\mathbb{R}$-beli gyöktényezős alakját!

Megoldás:

$x_1 = -1$ gyöke $p(x)$-nek $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow p(-1) = 0 \Leftrightarrow (-1)^4 - (-1)^3 + c(-1)^2 + (-1) + 6 = 0 \Leftrightarrow c = -7.$
$p(-1) = 0$, Bézout-tételből $\Rightarrow p(x)$ osztható $(x+1)$-gyel.

$$\begin{array}{l}
(x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6) : (x+1) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \\
\underline{x^4 + x^3} \\
\quad -2x^3 - 7x^2 \\
\quad \underline{-2x^3 - 2x^2} \\
\qquad\qquad -5x^2 + x \\
\qquad\qquad \underline{-5x^2 - 5x} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 6x + 6 \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{6x + 6} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ lehetnek csak $h(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ egész gyökei.
$h(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 6 = 0$, így $x_2 = 1$ is gyöke a $p(x)$ polinomnak, Bézout-tételből $\Rightarrow h(x)$ osztható $(x-1)$-gyel

$$\begin{array}{l}
(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x-1) = x^2 - x - 6 \\
\underline{x^3 - x^2} \\
\quad -x^2 - 5x \\
\quad \underline{-x^2 + x}
\end{array}$$

$$
\begin{array}{r}
-6x+6 \\
\underline{-6x+6} \\
0
\end{array}
$$

$x^2-x-6=0$ egész gyökei $x_3=-2$ és $x_4=3$.
Tehát $p(x)$ $\mathbb{Z}$-beli gyökei: $x_1=-1$, $x_2=1$, $x_3=-2$ és $x_4=3$, $\mathbb{R}$-beli gyöktényezős alakja pedig

$$p(x)=(x+1)(x-1)(x+2)(x-3).$$

3. Feladat (Függvényhatárérték számítások):

Számítsuk ki a következő függvények határértékét:

a) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x}$;

b) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2}{3x-2}\right)^x$.

(Itt bármilyen, előadáson vagy gyakorlaton vett függvényhatárérték típus lehet, nem csak a fenti kettő.)

Megoldás:

a) $\frac{0}{0}$ esetünk van, ilyen típusnál bővítünk a "konjugálttal" és használjuk az $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ képletet:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x^2+9}-3)(\sqrt{x^2+9}+3)}{x(\sqrt{x^2+9}+3)} = \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x^2+9-9}{x(\sqrt{x^2+9}+3)} = \frac{0}{6} = 0.
\end{aligned}
$$

b) 1^∞ esetünk van $\Rightarrow$ felírjuk az alapban levő kifejezést $(1+u)$ alakba, ahol $u\to 0$:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2}{3x-2}\right)^x &= \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{4}{3x-2}\right)^{\frac{3x-2}{4}}\right]^{\frac{4x}{3x-2}} = \\
&= \mathrm{e}^{\frac{4}{3}},
\end{aligned}
$$

mert $\lim_{x\to\infty} \frac{4x}{3x-2} = \frac{4}{3}$.

4. Feladat (Szakadási hely vizsgálata):

Vizsgáljuk az

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(8x)}{\sin(4x)}, \text{ ha } x \in \left(-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right) \setminus \{0\} \\ -1, \text{ ha } x = 0 \end{cases}$$

függvény szakadási helyét és adjuk meg ennek típusát is!

Megoldás:

Az elemi függvények folytonosak (értelmezési tartományukon), így f folytonos az $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \setminus \{0\}$ halmazon. Lehetséges szakadási hely csupán $x_1 = 0$.

$x_1 = 0$-ban:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(8x)}{\sin(4x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(8x)}{8x} \cdot \frac{4x}{\sin 4x} \cdot \frac{8x}{4x} = \frac{8}{4} = 2,$$

mert $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(8x)}{8x} = 1$ és $\lim_{x\to 0} \frac{4x}{\sin 4x} = 1$ (nevezetes függvényhatárértékek).

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 2 \neq -1 = f(0),$$

így $x_1 = 0$ megszüntethető szakadási helye (tehát elsőfajú szakadási helye) f-nek.

5. Feladat (Szakadási helyek vizsgálata):

Vizsgáljuk az

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + x - 20}{x^2 - x - 12}, \text{ ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{-3; 4\} \\ 0, \text{ ha } x \in \{-3; 4\} \end{cases}$$

függvény szakadási helyeit és adjuk meg azok típusát is!

Megoldás:

A racionális törtfüggvény nevezőjének megoldásai -3 és 4, a számláló megoldásai -5 és 4. Az elemi függvények folytonosak (értelmezési tartományukon), a racionális törtfüggvény pedig elemi függvény, így f folytonos az $\mathbb{R} \setminus \{-3; 4\}$ halmazon. Lehetséges szakadási helyek: $x_1 = -3$ és $x_2 = 4$.

$x_1 = -3$-ban:

$$\lim_{x \to -3^+} f(x) = \lim_{x \to -3^+} \frac{x^2 + x - 20}{x^2 - x - 12} = \infty,$$

mert $\frac{-14}{-0}$ esetünk van, míg

$$\lim_{x \to -3^-} f(x) = \lim_{x \to -3^-} \frac{x^2 + x - 20}{x^2 - x - 12} = -\infty,$$

mert $\frac{-14}{+0}$ esetünk van, így $x_1 = -3$ másodfajú szakadási hely.

$x_2 = 4$-ben:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 4} f(x) &= \lim_{x \to 4} \frac{x^2 + x - 20}{x^2 - x - 12} = \\
&= \lim_{x \to 4} \frac{(x-4)(x+5)}{(x-4)(x+3)} = \\
&= \lim_{x \to 4} \frac{x+5}{x+3} = \frac{9}{7} \neq 0 = f(4),
\end{aligned}$$

így f-nek megszüntethető, azaz elsőfajú szakadása van $x_2 = 4$-ben. (Megjegyezzük, hogy amennyiben pl. $f(4) = \frac{9}{7}$ lett volna, akkor $x_2 = 4$-ben f-nek nem lenne szakadása.)

6. Feladat (Deriváltfüggvény kiszámítása):

Határozza meg $f'(x)$-et és hozzuk egyszerűbb alakba, ha

a) $f(x) = \frac{3x^4}{\sqrt{x+1}\cos x}, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right);$

b) $f(x) = \sin\left(\frac{e^x+1}{e^{2x}}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$

Megoldás:

a)

$$\left(\frac{3x^4}{\sqrt{x+1}\cos x}\right)' = \frac{(3x^4)'\sqrt{x+1}\cos x - 3x^4(\sqrt{x+1}\cos x)'}{(x+1)\cos^2 x} =$$
$$= \frac{12x^3\sqrt{x+1}\cos x - 3x^4\left[\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\cos x + \sqrt{x+1}(-\sin x)\right]}{(x+1)\cos^2 x} =$$
$$= \frac{24x^4\cos x + 24x^3\cos x - 3x^4\cos x + 6x^4(x+1)\sin x}{2\sqrt{x+1}(x+1)\cos^2 x} =$$
$$= \frac{21x^4\cos x + 24x^3\cos x + 6x^4(x+1)\sin x}{2\sqrt{x+1}(x+1)\cos^2 x}$$

minden $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ esetén.

b)

$$\left[\sin\left(\frac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^{2x}}\right)\right]' = \cos\left(\frac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^{2x}}\right)\cdot\left(\frac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^{2x}}\right)' =$$
$$= \cos\left(\frac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^{2x}}\right)\cdot\frac{(\mathrm{e}^x+1)'e^{2x} - (\mathrm{e}^x+1)(\mathrm{e}^{2x})'}{\mathrm{e}^{4x}} =$$
$$= \cos\left(\frac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^{2x}}\right)\cdot\frac{\mathrm{e}^{3x} - 2\mathrm{e}^{3x} - 2\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{4x}} =$$
$$= -\frac{\mathrm{e}^x+2}{\mathrm{e}^{2x}}\cos\left(\frac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^{2x}}\right),$$

minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.

7. Feladat (Derivált kiszámítása, érintőegyenes egyenletének felírása):

Deriváljuk a következő függvényt és írjuk fel a függvény grafikonjának $x_0 = 0$ abszcisszájú pontjában az érintőegyenes egyenletét:

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x^2+1}}{x+5}, \quad x > -5.$$

Megoldás:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(\sqrt{2x^2+1})'(x+5) - \sqrt{2x^2+1}(x+5)'}{(x+5)^2} = \\
&= \frac{\frac{1}{2\sqrt{2x^2+1}} \cdot 4x(x+5) - \sqrt{2x^2+1} \cdot 1}{(x+5)^2} = \\
&= \frac{2x(x+5) - (2x^2+1)}{\sqrt{2x^2+1}(x+5)^2} = \\
&= \frac{10x-1}{\sqrt{2x^2+1}(x+5)^2}.
\end{aligned}
$$

$D_{f'} = (-5, \infty)$.
f grafikonjához az $x = x_0$ abszcisszájú pontban húzott érintőegyenes egyenlete:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0),$$

$f'(0) = -\frac{1}{25}$, $f(0) = \frac{1}{5}$,
így a kért érintőegyenes egyenlete:

$$y - \frac{1}{5} = -\frac{1}{25}(x-0), \text{ vagy } y = -\frac{1}{25}x + \frac{1}{5}.$$

8. Feladat (Implicit függvény deriválása):

Számítsuk ki $y'(0)$ értékét az

$$x^3 + xy + y^3 = 27$$

implicit függvény esetén!

Megoldás:

Nem áll módunkban kifejezni y-t x függvényében, de mivel $0^3 + 0 \cdot y(0) + (y(0))^3 = 27$, az látható, hogy $y_0 = 3$.

Deriváljuk a képlet bal-, majd a jobb oldalát is (mindkét oldal akárhányszor differenciálható), végig szem előtt tartva, hogy $y = y(x)$, majd kifejezzük az $y'(x)$-et.

$$
\begin{aligned}
3x^2 + y + xy' + 3y^2y' &= 0 \\
y'(x + 3y^2) &= -(3x^2 + y)
\end{aligned}
$$

$$y' = -\frac{3x^2 + y}{x + 3y^2},$$

azaz

$$y'(0) = -\frac{3 \cdot 0^2 + 3}{0 + 3 \cdot 3^2} = -\frac{1}{9}.$$