Matematika A1a - Analízis, D kurzusok
(Gazdálkodási és menedzsment alapszakos hallgatóknak)

A 2. zh témakörei – Feladatok

A 2. ZH feladatai is feleletválasztós Moodle-teszt formában lesznek megfogalmazva.
A 2. ZH leírásában kb. ezt a szöveget látja majd:

„A 2. ZH megoldásához 45 perc áll rendelkezésére. Mindegyik feladatban akár több helyes és helytelen válasz lehet (előre nem lehet tudni a helyes válaszok számát), de az biztos, hogy a 0 pontot érő „Nem válaszolok” opción kívül van a feladatban legalább egy helyes válasz és legalább egy helytelen válasz is. Ezért fogalmazunk minden feladatban úgy, hogy „Válasszon ki egyet vagy többet”, azt értve ezen, hogy az összes helyes választ kérjük, csak nem lehet előre tudni, hány válasz helyes: egy vagy több.

A kiválasztott helyes válaszokra részpontszámokat kapnak úgy, hogy minden feladatban az összes helyes válasz megtalálása a feladat pontszámának 100 %-át éri. Amennyiben helytelen válaszokat is bejelölnek (kiválasztanak), ezekre negatív részpontszámok járnak úgy, hogy egy feladaton belül az összes helytelen válasz megjelölése (azaz helyes válaszként történő kiválasztása) a feladat pontszámának (-100 %)-át éri. Tehát ez a szabály azt is jelenti, hogy egy-egy helyes válasz pontértéke csupán attól függ, hogy a feladat hány pontos és hány helyes válasz van az adott feladatban.
Három feladatot kell megoldani a 2. ZH-ban: a teljes függvényvizsgálattal kapcsolatos feladat 10 pontos lesz, a maradék kettő pedig 5-5 pontos. A feladatok között nem lehet össze-vissza lépkedni.

Engedélyezett próbálkozás: 1

Teszt lezárva ekkor: ...

A teszt megoldásához ismernie kell a teszt jelszavát.

Időkorlát: 45 perc”

Minta 2. ZH-t már nem találnak a Moodle-platformon, most már mindenki tudja, hogy néz ki egy Moodle-platformbeli tesztfeladat.
Továbbra is fontos, hogy felismerjék, ha egy képlet ekvivalens átalakításokon esett keresztül (pl. ha közös szorzótényező ki lett emelve, vagy ha valamilyen egyszerűsítés történt, vagy pl. használtuk a $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ képletet, stb.)

A 2. ZH feladattípusai a következők (természetesen a függvények és a számadatok teljesen mások lehetnek):

1. **Feladat (teljes függvényvizsgálat):** Végezzünk teljes függvényvizsgálatot és ábrázoljuk az alábbi függvényt:

$$f(x)=5-\frac{10x}{x^2+1},\ x\in(-\infty,+\infty).$$

Megoldás: Az f függvény kétszer is deriválható az értelmezési tartomány minden pontjában (mivel $\frac{10x}{x^2+1}$ racionális törtfüggvény) és

$$f'(x)=-\left(\frac{10\left(x^2+1\right)-10x(2x)}{\left(x^2+1\right)^2}\right)=-\frac{-10x^2+10}{\left(x^2+1\right)^2}=10\frac{x^2-1}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

Az $f'(x)=0$ egyenlet megoldásai:

$x^2-1=0$, $x_{1,2}=\pm1$. Elkészítjük az elsőrendű derivált előjelét és a monotonitási íveket tartalmazó táblázatot, vagy külön vizsgáljuk f' előjelét és kapjuk a következőt:

Monotonitás és lokális szélsőértékek:

Ha $x\in(-\infty,-1)$, akkor $f'(x)>0$, ezért f szigorúan monoton növekvő a $(-\infty,-1)$ intervallumon.

Ha $x\in(-1,1)$, akkor $f'(x)<0$, ezért f szigorúan monoton csökkenő a $(-1,1)$ intervallumon.

Ha $x\in(1,\infty)$, akkor $f'(x)>0$, ezért f szigorúan monoton növekvő az $(1,\infty)$ intervallumon.

Az $x_1=-1$ lokális maximumhely, $f(-1)=10$ lokális maximum érték, $x_1=1$ lokális minimumhely, $f(1)=0$ lokális minimum érték.

Megjegyzés: ha táblázatos alakban oldotta meg, nem szükséges külön összefoglalni, de akkor a táblázat utolsó sorába jelölésekkel be kell írni mindent, amit előbb felsoroltunk.

Konvexitás, inflexiós pontok:

$$f''(x)=10\left(\frac{2x\left(x^2+1\right)^2-2\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)2x}{\left(x^2+1\right)^4}\right)=\frac{20x\left(3-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^3}.$$

Az $f''(x)=0$ egyenlet megoldásai:

$x_3=0$ vagy $x_{4,5}=\pm\sqrt{3}$.

Ha $x\in(-\infty,-\sqrt{3})$, akkor $f''(x)>0$, ezért f konvex a $(-\infty,-\sqrt{3})$ intervallumon.

Ha $x\in(-\sqrt{3},0)$, akkor $f''(x)<0$, ezért f konkáv a $(-\sqrt{3},0)$ intervallumon.

Ha $x\in(0,\sqrt{3})$, akkor $f''(x)>0$, ezért f konvex a $(0,\sqrt{3})$ intervallumon.

Ha $x\in(\sqrt{3},\infty)$, akkor $f''(x)<0$, ezért f konkáv a $(\sqrt{3},\infty)$ intervallumon.

Inflexiós pontok: $x_3=0$, $x_4=-\sqrt{3}$ és $x_4=\sqrt{3}$.

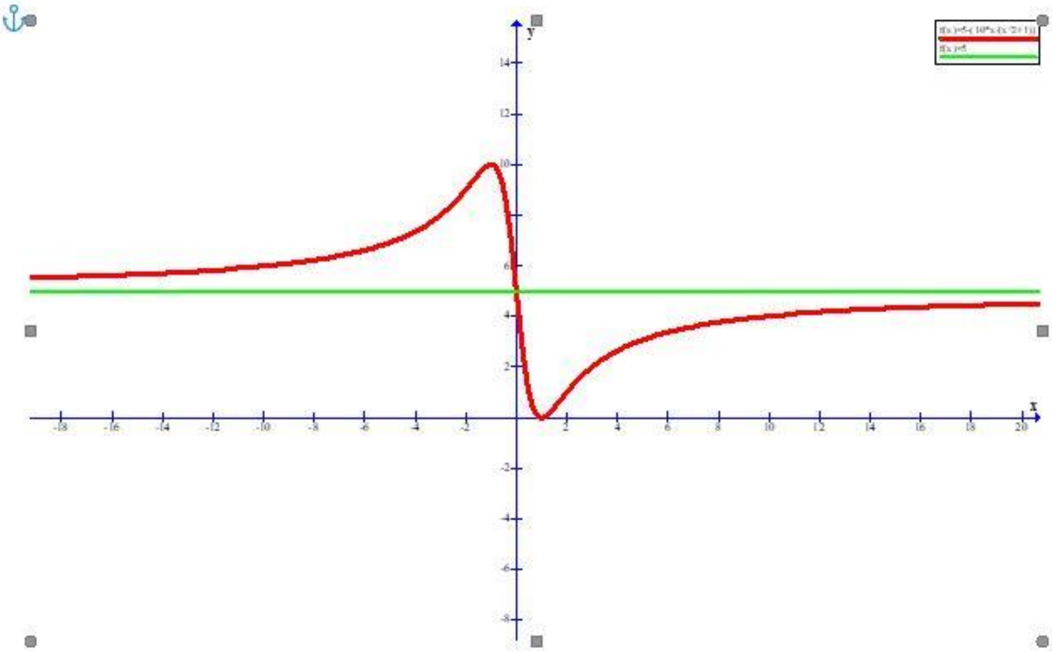
Megjegyzés: ha táblázatos alakban oldotta meg, nem szükséges külön összefoglalni, de akkor a táblázat utolsó sorába jelölésekkel be kell írni mindent, amit előbb felsoroltunk.
(Teljes pontszám csak indoklásért jár, ami vagy táblázat, vagy pedig a függvény másodrendű deriváltjának az előjelére való utalás.)

Határértékek és aszimptoták:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(5-\frac{10x}{x^2+1}\right)=5\,.$$

Tehát $\pm\infty$-ben az $y=5$ vízszintes aszimptota.

Ábra:



2. **<u>Feladat</u> (Nehezebb deriválás (explicit függvény esetében), érintő egyenes felírással):** – Ezt a feladattípust azért kérjük, mert nagyon meg kell tanulni a deriválást!

   Legyen $f(x):=\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^3\ln(3x^2+e^{2x})$, $x\in R\setminus\{-1\}$.

   Írjuk fel az $x_0=0$ pontban az érintő egyenes egyenletét.

Megoldás:

A függvény deriválható értelmezési tartományán és a deriváltat a szorzatfüggvény deriválási szabályával, valamint a láncszabály alkalmazásával számítjuk ki:

$$f'(x) := \left[\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3\right]' \ln(3x^2+e^{2x}) + \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 \left[\ln(3x^2+e^{2x})\right]' =$$

$$= 3\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 \left(\frac{x-1}{x+1}\right)' \ln(3x^2+e^{2x}) + \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 \frac{(3x^2+e^{2x})'}{3x^2+e^{2x}} =$$

$$= 3\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 \frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2} \ln(3x^2+e^{2x}) + \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 \frac{6x+2e^{2x}}{3x^2+e^{2x}} =$$

$$= 6\frac{(x-1)^2}{(x+1)^4} \ln(3x^2+e^{2x}) + \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 \frac{6x+2e^{2x}}{3x^2+e^{2x}}.$$

Az érintő egyenes egyenlete: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

A kért érintő egyenes egyenlete: $y - 0 = -2(x-0)$, azaz $y = -2x$.

A ZH harmadik feladatában lesz még a 3., vagy a 4. feladatban lévő integráltípusokból két integrál:

3. **Feladat:** Számítsa ki az alábbi határozatlan integrálokat:

a) (Alapintegrálokra vezető típus:) $\int \frac{\ln(4x)}{x} \mathrm{dx}$, $\quad x > \frac{1}{4}$;

b) (Parciális integrálás bármelyik típusból:) $\int x^2 \cos(4x) \mathrm{dx}$ $\quad (x \in R)$

Megoldás:

a) Mivel $(\ln(4x))' = \frac{1}{4x}(4x)' = \frac{4}{4x} = \frac{1}{x}$, így

$$\int \frac{\ln(4x)}{x}\mathrm{dx} = \int [\ln(4x)]' \ \ln(4x)\mathrm{dx} =$$

$$= \frac{[\ln(4x)]^2}{2} + c = \frac{\ln^2(4x)}{2} + c \ .$$

b) Két egymás utáni parciális integrálással kapjuk, hogy

$$\int x^2 \cos(4x)\mathrm{dx} = \int x^2 \left(\frac{\sin(4x)}{4}\right)' \mathrm{dx} = x^2 \frac{\sin(4x)}{4} - \frac{2}{4}\int x \sin(4x)\mathrm{dx} =$$

$$= x^2 \frac{\sin(4x)}{4} - \frac{1}{2}\left[-\frac{x\cos(4x)}{4} + \frac{1}{16}\sin(4x) \right] + c =$$

$$= x^2 \frac{\sin(4x)}{4} + \frac{1}{8}x\cos(4x) - \frac{1}{32}\sin(4x) + c,$$

ahol az első parciális integrálásnál $f\left(x\right) = x^2$ és $g'(x) = \cos(4x)$, $f'\left(x\right) = 2x$ és $g(x) = \frac{\sin(4x)}{4}$.

A második parciális integrálásnál $f\left(x\right) = x$ és $g'(x) = \sin(4x)$, $f'\left(x\right) = 1$ és $g(x) = -\frac{\cos(4x)}{4}$.

4. **<u>Feladat:</u>** Számítsa ki az alábbi határozatlan integrálokat:

a) (Alapintegrálokra vezető nehezebb típus:)

$$\int \frac{5}{\left[\cos^2(2x)\right]\sqrt[3]{\mathrm{tg}\ (2x)+1}}\mathrm{dx},\ x \in \left(-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8} \right);$$

b) (Könnyebb parciális integrálás:) $\int \ln{(20x)}\mathrm{dx} \quad (x > 0)$.

Megoldás:

a) Mivel $\left[tg(2x)+1\right]' = \frac{2}{\cos^2(2x)}$, integráljelen kívül osztunk, belül pedig szorzunk 2-vel és írhatjuk, hogy

$$\int \frac{5}{\left[\cos^2(2x)\right]\sqrt[3]{\mathrm{tg}\ (2x)+1}}\mathrm{dx} = \frac{5}{2}\int (\mathrm{tg}\ (2x)+1)'\left[\mathrm{tg}\ (2x)+1)\right]^{-\frac{1}{3}}\mathrm{dx} =$$

$$= \frac{15}{4}\left[\mathrm{tg}\ (2x)+1)\right]^{\frac{2}{3}} + c.$$

b) Parciális integrálással oldjuk meg. Szereposztás:

$f(x) = \ln(20x)$, $g'(x) = 1$.

Így $f'(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = x$.

$\int \ln{(20x)}\mathrm{dx} = \int x' \ln{(20x)}\mathrm{dx} = x\ln(20x) - x + c$.