Matematika A1a - Analízis, Gazdálkodási és menedzsment alapszakos hallgatóknak

MINTAVIZSGA (ILYEN LESZ AZ ÍRÁSBELI VIZSGA)

Készítette: Fülöp Ottilia

Minden vizsga jelenléti lesz! Az írásbeli vizsga megoldásához 90 perc áll rendelkezésére. Egyik feladat 15 pontos, egy másik pedig 5 pontos. A többi 4 feladat mindegyike 10 pontos! A feladatok hosszából lehet következtetni a feladatok pontszámára. Ez nem jelenti azt, hogy egy-egy helyesen kiválasztott válasz 1 pontot érne! Mindegyik feladatban akár több helyes és helytelen válasz lehet (előre nem lehet tudni a helyes válaszok számát), de az biztos, hogy van a feladatban legalább egy helyes válasz és legalább egy helytelen válasz is. Ezért fogalmazunk minden feladatban úgy, hogy „Válasszon ki egyet vagy többet”, azt értve ezen, hogy az összes helyes választ kéri, csak nem lehet előre tudni, hány válasz helyes: egy vagy több. A kiválasztott helyes válaszokra részpontszámokat kapnak úgy, hogy minden feladatban az összes helyes válasz megtalálása a feladat pontszámának 100%-át éri. A kiválasztott helytelen válaszokra pedig negatív részpontszámok járnak úgy, hogy egy feladaton belül az összes helytelen válasz megtalálása a feladat pontszámának (-100)%-át éri. Tehát ez a szabály azt is jelenti, hogy egy-egy helyes válasz pontértéke csupán attól függ, hogy a feladat hány pontos és hány helyes válasz van az adott feladatban.

Feladat: 1.

Tekintse az alábbi két határértéket:
$A := \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x}$; $B := \lim_{x\to\infty} \left(\frac{3x+2}{3x-2}\right)^x$.

Válasszon ki egyet vagy többet:

☐ *a*) Az A kiszámításához bővíthetünk a számláló konjugáltjával.

☐ *b*) Az A kiszámítását azzal kezdjük, hogy kiemeljük a számlálóból az x előforduló legalacsonyabb hatványát.

☐ *c*) A B határérték csak úgy számítható ki, ha bővítünk a nevező konjugáltjával.

☐ *d*) $B = 1$, mert 1^∞ esetünk van.

☐ *e*) $A = 1$.

☐ *f*) $A = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x^2+9}+3}$

☐ *g*) $A = 0$

☐ $h)$ $B = \mathrm{e}^{\frac{3}{4}}$

☐ $i)$ $B = \mathrm{e}^{\frac{4}{3}}$

☐ $j)$ Nem válaszolok.

Feladat: 2.

Tekintse az

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x^2+1}}{x+5}, \quad x > -5$$

függvényt!
Válasszon ki egyet vagy többet:

☐ $a)$ $f'(x) = \frac{10x+1}{\sqrt{2x^2+1}(x+5)^2}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-5\}.$

☐ $b)$ $f'(x) = \frac{10x-1}{\sqrt{2x^2+1}(x+5)^2}, \quad x > -5.$

☐ $c)$ Az f függvény grafikonjának $x_0 = -10$ abszcisszájú pontjában a grafikonhoz húzott érintőegyenes egyenlete:

$$y - f(-10) = f'(-10)(x+10).$$

☐ $d)$ Az f függvény grafikonjának $x_0 = 0$ abszcisszájú pontjában a grafikonhoz húzott érintőegyenes egyenlete:

$$y = -\frac{1}{25}x + \frac{1}{5}.$$

☐ $e)$ Nem válaszolok.

Feladat: 3.

Tekintse az $f(x) = 5 - \frac{10x}{x^2+1}, x \in \mathbb{R}$ függvényt!

Válasszon ki egyet vagy többet:

☐ $a)$ A $g(x) = f(x) - 5, \quad x \in \mathbb{R}$ függvény páratlan.

☐ $b)$ $f'(x) = \frac{10x^2-10}{(x^2+1)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$

☐ $c)$ $f'(x) = \frac{1-10x^2}{(x^2+1)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$

☐ $d)$ Ha $x \in (-\infty, 1)$, akkor az f függvény szigorúan monoton növekvő.

☐ $e)$ Ha $x \in (1, \infty)$, akkor az f függvény szigorúan monoton csökkenő.

☐ *f*) Ha $x \in (-1, 1)$, akkor az f függvény szigorúan monoton csökkenő.

☐ *g*) Ha $x \in (-\infty, 0)$, akkor az f függvény szigorúan monoton növekvő.

☐ *h*) f konvex a $(-\sqrt{10}, \sqrt{10})$ intervallumon.

☐ *i*) $f''(x) = \frac{20x(3-x^2)}{(x^2+1)^3}, \quad x \in \mathbb{R}$.

☐ *j*) f-nek pontosan két inflexiós pontja van: $x_1 = -\sqrt{3}$ és $x_2 = \sqrt{3}$.

☐ *k*) f-nek pontosan három inflexiós pontja van: $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = 0$ és $x_3 = \sqrt{3}$.

☐ *l*) Az $y = 5$ egyenes vízszintes aszimptotája az f függvénynek $(-\infty)$-ben is és ∞-ben is.

☐ *m*) Az f függvénynek nincs aszimptotája, mivel mindenütt értelmezett.

☐ *n*) Ha $x \in (0, \sqrt{3})$, akkor $f''(x) > 0$, ezért f konvex a $(0, \sqrt{3})$ intervallumon.

☐ *o*) Nem válaszolok.

Feladat: 4.

Tekintse az $f(x) = \frac{1}{x^2+4x+5}, \quad x \in \mathbb{R}$ függvényt!

Válasszon ki egyet vagy többet:

☐ *a*) Az $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ határozatlan integrál kiszámításához azonnal alkalmazható az $\int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln t + c, \quad t \in \mathbb{R}$ alapképlet.

☐ *b*) $\int f(x)\,\mathrm{d}x \neq \ln(x^2 + 4x + 5) + c$.

☐ *c*) Az $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ kiszámításához az $f(x)$ függvényt parciális törtek összegére bontjuk.

☐ *d*) Az $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ kiszámításához az integrandus függvény nevezőjét két négyzet összegeként írjuk fel.

☐ *e*) Az $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ kiszámításához használjuk az $\int \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \operatorname{arctg} t + c, \quad t \in \mathbb{R}$ alapképletet.

☐ *f*) $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x+2) + c$.

☐ *g*) $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \operatorname{arctg}(x+2) + c$.

$\square$ *h*) $\int_{-2}^{\sqrt{3}-2} f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x+2)\right]_{-2}^{\sqrt{3}-2}$.

$\square$ *i*) $\int_{-2}^{\sqrt{3}-2} \frac{1}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{3}$.

$\square$ *j*) Nem válaszolok.

Feladat: 5.

Tekintse az $f(x) = \frac{\mathrm{e}^{4x}}{\mathrm{e}^{2x}+1}, \quad x \in \mathbb{R}$ függvényt!

Válasszon ki egyet vagy többet:

$\square$ *a*) Az $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ határozatlan integrált csak úgy lehet kiszámítani, hogy használjuk az $(\mathrm{e}^{2x}+1)' = 2\mathrm{e}^{2x}$ deriváltat.

$\square$ *b*) $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{2x}\cdot\ln(\mathrm{e}^{2x}+1)}{2} + c$.

$\square$ *c*) Az $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ határozatlan integrál kiszámítható a második helyettesítési szabállyal.

$\square$ *d*) Az $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ határozatlan integrál kiszámítható a $t = \mathrm{e}^x$ helyettesítéssel.

$\square$ *e*) Második helyettesítési szabály segítségével nem számítható ki az $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ határozatlan integrál, mert $(\mathrm{e}^{4x})' = 4\mathrm{e}^{4x}$.

$\square$ *f*) A $t = \mathrm{e}^x$ helyettesítéssel az $\int \frac{t^3}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$ határozatlan integrált kapjuk.

$\square$ *g*) A $t = \mathrm{e}^x$ helyettesítéssel az $\int \frac{t^4}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$ határozatlan integrált kapjuk.

$\square$ *h*) $\int \frac{\mathrm{e}^{4x}}{\mathrm{e}^{2x}+1}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{4} - \frac{1}{4}\ln(\mathrm{e}^{2x}+1) + c$.

$\square$ *i*) $\int \frac{\mathrm{e}^{4x}}{\mathrm{e}^{2x}+1}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2} - \frac{1}{2}\ln(\mathrm{e}^{2x}+1) + c$.

$\square$ *j*) Nem válaszolok.

Feladat: 6.

Tekintse azt az A síkidomot, melyet az $y = x - 1$ egyenletű egyenes és az $y^2 = x + 1$ egyenletű parabola határolnak!

Válasszon ki egyet vagy többet:

$\square$ *a*) Az A síkidom területe nem véges szám.

$\square$ *b*) A feladatban megadott egyenes és parabola négy különböző pontban metszik egymást.

☐ *c*) A feladatban megadott egyenes és parabola két különböző pontban metszik egymást.

☐ *d*) Az A síkidom szimmetrikus az y tengelyre nézve.

☐ *e*) Az A síkidom területét az $\int_{-1}^{2}[(y+1)-(y^2-1)]\,\mathrm{d}y$ határozott integrál adja meg.

☐ *f*) Az A síkidom területét az $\int_{-1}^{3}[\sqrt{x+1}-(x-1)]\,\mathrm{d}x$ határozott integrál adja meg.

☐ *g*) $Terület\ (A) = \frac{2}{9}$ területegység.

☐ *h*) $Terület\ (A) = \frac{9}{2}$ területegység.

☐ *i*) Az A síkidom területe y szerinti határozott integrálással egyetlen határozott integrállal nem számítható ki.

☐ *j*) Nem válaszolok.

A TELJES FELADATMEGOLDÁSOKAT A KÖVETKEZŐ HELYEKEN TALÁLJÁK:

Az 1. és 2. Feladatok megoldását az 1. zh témakörei fájlban találják meg (ott a 3. és 7. Feladatok).

A 3. Feladat megoldását a 2. zh témakörei fájlban találják meg (ott az 1. Feladat).

A többi feladatot az előadások anyagaiban találják meg.
A *Hogyan készüljünk a vizsgára* fájlban a vizsga feladattípusairól részletes információt kapunk.
Természetesen változtatunk majd az együtthatókon, a függvényeken, nagy valószínűséggel másképp fogalmazunk, és teszt formájában lesznek a feladatok megjelenítve.

Jó felkészülést kívánok mindenkinek!
Dr. Fülöp Ottilia