Megoldott feladatok

2010. november 30.

1. Feladat:

Vizsgáljuk az $a_n = \frac{2n+1}{n+3}$ sorozat monotonitását, korlátosságát és konvergenciáját. Konvergencia esetén számítsuk ki a határértéket!

Megoldás:

$a_n = \frac{2n+1}{n+3} = \frac{2(n+3)-5}{n+3} = 2 - \frac{5}{n+3}$. Ha n-et növeljük, $n+3$ is szigorúan monoton növekvő lesz, $\frac{5}{n+3}$ szigorúan monoton csökkenő, $-\frac{5}{n+3}$ szigorúan monoton növekvő, így a_n is az lesz az első elemtől kezdődően.

Ezért egy jó alsó korlát az $a_1 = \frac{3}{4}$, míg az $a_n = 2 - \frac{5}{n+3}$-ból következik, hogy a legjobb felső korlátunk a 2.

Sorozatunk konvergens, mert monoton és korlátos. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(2 - \dfrac{5}{n+3}\right) = 2.$

Megjegyzések:

1. Amennyiben nem használjuk az $a_n = 2 - \frac{5}{n+3}$ átírást, tekinthetjük az $a_{n+1} - a_n = \frac{2(n+1)+1}{(n+1)+3} - \frac{2n+1}{n+3} = \frac{2n+3}{n+4} - \frac{2n+1}{n+3} = \frac{5}{(n+4)(n+3)} > 0$ különbséget, melyből következik, hogy $a_{n+1} > a_n$, tehát sorozatunk szigorúan monoton növekvő. Ekkor a limesz: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+1}{n+3} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\left(2 + \frac{1}{n}^{\nearrow 0}\right)}{n\left(1 + \frac{3}{n}_{\searrow 0}\right)} = 2.$

2. Pozitív tagú sorozatok esetén (mint amilyen ez is) tekinthetjük az $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ hányadost is, ha monotonitást vizsgálunk. Ekkor azt kell megnéznünk, hogy 1-nél nagyobb vagy kisebb a hányados, ettől függően szigorúan monoton növekvő vagy csökkenő a sorozat.

2. Feladat

Legyen $a_n = \frac{2n-1}{5n+2}$. Határozzuk meg azt a legkisebb n_0 természetes számot (küszöbindexet), melyre teljesül, hogy $\forall n > n_0$ esetén az a_n eltérése az $(a_n)_{n\geqslant 1}$ sorozat határértékétől kisebb mint $\varepsilon = 10^{-2}$.

Megoldás

Amennyiben testszőleges ε-hoz adjuk meg a küszöbindexet, a sorozat konvergenciáját bizonyítjuk a definíció segítségével.

Most viszont számoljuk ki a küszöbindexet a kért $\varepsilon = 10^{-2}$ értékre.

A sorozat határértéke $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n-1}{5n+2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\left(2-\frac{1}{n}^{\nearrow 0}\right)}{n\left(5+\frac{2}{n}_{\searrow 0}\right)} = \dfrac{2}{5}$.

Teljesülnie kell az $\left|\frac{2n-1}{5n+2} - \frac{2}{5}\right| < \frac{1}{100}$ egyenlőtlenségnek, ami a következőkkel ekvivalens: $\left|-\frac{9}{5(5n+2)}\right| < \frac{1}{100} \Longleftrightarrow 180 < (5n+2) \Longleftrightarrow 178 < 5n \Longleftrightarrow n > \frac{178}{5}$. Ezért $n_0 = \left[\frac{178}{5}\right] = 35$ a kért küszöbszám.

3. Feladat

Az a paraméter mely értékeire lesz a következő függvény folytonos?

$$g : (-\pi;\pi) \longrightarrow \mathbb{R}, \;\; g(x) = \begin{cases} \frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 10x} & , \text{ha } x \neq 0 \\ a+5 & , \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

Megoldás

$g(x)$a $(-\pi;\pi)\setminus\{0\}$ pontokban folytonos, egyedül az $x=0$-an kell a folytonosságot vizsgálni.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 10x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin 5x}{5x}\right)^{\nearrow 1} \cdot \left(\frac{10x}{\operatorname{tg} 10x}\right)^{\nearrow 1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = a+5,$$

ezért $a = \frac{1}{2} - 5 = -\frac{9}{2}$.

4. Feladat

Vizsgáljuk és ábrázoljuk a következő függvényt!

$$f(x) = \frac{5x^2 - 10x + 5}{x^2+1}$$

Megoldás

1. Értelmezési tartomány:$D_f = \mathbb{R}$
   A függvényünk nem páros, nem páratlan és nem periodikus.

2. Zérushelyek: $x^2 - 2x + 1 = 0 \Longleftrightarrow x_{1,2} = 1$.

3. Aszimptotikus vizsgálat: A függvény $+\infty$-ben és $-\infty$-ben ugyanoda tart,

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{5x^2-10x+5}{x^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2\left(5-\frac{10}{x}^{\nearrow 0}+\frac{5}{x^2}^{\nearrow 0}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}_{\searrow 0}\right)}=5$$

$y=5$ vízszintes aszimptota $\pm\infty$-ben.

Függőleges aszimptotánk nincsen.

4. Elsőrendű derivált és alkalmazásai (szigorúan monoton ívek, lokális szélsőértékek)

$$f'(x)=\frac{(10x-10)\left(x^2+1\right)-\left(5x^2-10x+5\right)\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=10\cdot\frac{x^2-1}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$f'(x)=0 \Longleftrightarrow x_{1,2}=\pm 1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+++$	0	$---$	0	$+++$	
$f(x)$		$\nearrow$	10 lokális maximum	$\searrow$	0 lokális minimum	$\nearrow$	

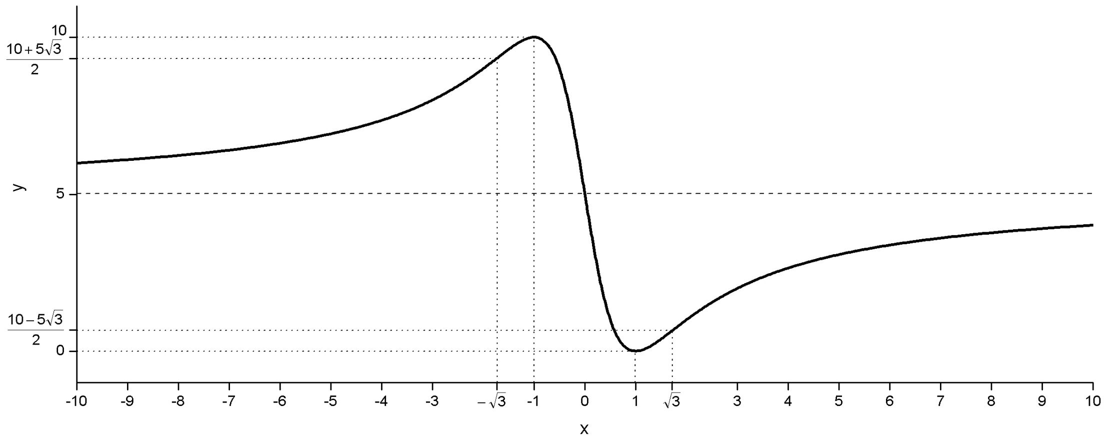
5. Másodrendű derivált és alkalmazásai (konvex-, konkáv ívek és inflexiós pontok):
Kiszámoljuk a másodrendű deriváltat:

$$f''(x)=\left[10\cdot\frac{x^2-1}{\left(x^2+1\right)^2}\right]'=10\cdot\frac{2x\left(x^2+1\right)^2-\left(x^2-1\right)\cdot 2\left(x^2+1\right)\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^4}=$$

$$=10\cdot\frac{2x\left(x^2+1\right)\left[x^2+1-\left(x^2-1\right)\cdot 2\right]}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+1\right)^3}=\frac{20x\cdot\left(3-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^3}$$

A másodrendű derivált zérushelyei: $x_1=0$ $\qquad x_{2,3}=\pm\sqrt{3}$.

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$2x$		$---$	$-$	$---$	0	$+++$	$+$	$+++$	
$3-x^2$		$---$	0	$+++$	$+$	$+++$	0	$---$	
$f''(x)$		$+++$	0	$---$	0	$+++$	0	$---$	
$f(x)$		$\smile$ konvex	$\frac{10+5\sqrt{3}}{2}$ inflexiós pont	$\frown$ konkáv	5 inflexiós pont	$\smile$ konvex	$\frac{10-5\sqrt{3}}{2}$ inflexiós pont	$\frown$ konkáv	



6. értékkészlet: $R_f = [0;10]$

Megjegyzés

Kicsit leegyszerűsíthetjük a megoldást, ha még az elején figyelembe vesszük, hogy $f(x) = 5 - \frac{10x}{x^2+1}$.

5. Feladat

Válassza meg az $\alpha > 0$ számot úgy, hogy az $y = \alpha \cdot x \cdot \ln x$, $1 \leqslant x \leqslant e$ görbe alatti terület 10 legyen!

Megoldás

Ha $1 \leqslant x \leqslant e$ és $\alpha > 0$, akkor az $y = \alpha \cdot x \cdot \ln x$ pozitív értékű, ezért 1 és e között a görbe alatti terület $T = \int_1^e \alpha \cdot x \cdot \ln x \, dx = 10$

$$\begin{aligned}
\int x \cdot \ln x \, dx &= \int \left(\frac{x^2}{2}\right)' \cdot \ln x \, dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \, dx \text{ (polinom} \cdot ln \Rightarrow \text{parciális integrálás)} \\
&= \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{1}{2} \int x \, dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} + c \\
\int_1^e \alpha \cdot x \cdot \ln x \, dx &= \alpha \left[\frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{x^2}{4}\right]_1^e = \alpha \left[\frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} - \left(0 - \frac{1}{4}\right)\right] = \alpha \left(\frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}\right) = \alpha \frac{e^2+1}{4} \\
\alpha \frac{e^2+1}{4} &= 10 \Longrightarrow \alpha = \frac{40}{e^2+1}
\end{aligned}$$

6. Feladat

Fontosabb helyettesítések:

a) $\int R\left(e^x, e^{2x}, \ldots\right) dx$ (R racionális törtfüggvény) alak esetén $t = e^x$ helyettesítés, ahonnan $x = \ln t$; $dx = \frac{1}{t} \cdot dt$.

Például:

$$\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}\,dx = \int \frac{t^2}{t+1}\cdot\frac{1}{t}\,dt = \int \frac{t}{t+1}\,dt = \int \frac{t+1-1}{t+1}\,dt = \int \left[1-\frac{1}{t+1}\right] dt =$$
$$= t - \ln|t+1| + c = e^x - \ln\left(e^x+1\right) + c$$

$$\begin{aligned} e^x &= t \\ x &= \ln t \\ dx &= \frac{1}{t}dt \end{aligned}$$

b) $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$ típusú integrál esetében $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ helyettesítés

Például:

$$\int \frac{2x}{\sqrt{6x+4}}\,dx = \int \frac{\frac{t^2-4}{3}}{t}\,\frac{t}{3}\,dt = \frac{1}{9}\int \left(t^2-4\right)\,dt = \frac{1}{9}\left[\frac{t^3}{3}-4t\right] + c = \frac{1}{9}\left[\frac{\sqrt{(6x+4)^3}}{3} - 4\sqrt{6x+4}\right] + c$$

$$\begin{aligned} \sqrt{6x+4} &= t \\ 6x+4 &= t^2 \\ x &= \frac{t^2-4}{6} \\ dx &= \frac{1}{6}\cdot 2t\,dt = \frac{t}{3}\,dt \end{aligned}$$

c) $\int \left(x, \sqrt{x^2+a^2}\right) dx$ típusú integrál esetén $x = a\cdot \mathrm{sh}t$ helyettesítés $(dx = a \cdot \mathrm{ch}t\,dt)$

Ilyenkor használjuk még a $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$ képletet, valamint

$$\begin{aligned} \mathrm{sh}\left(\mathrm{arch}x\right) &= \sqrt{x^2-1} \\ \mathrm{ch}\left(\mathrm{arch}x\right) &= \sqrt{x^2+1} \end{aligned}$$

képleteket, melyek a $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\sin\left(\arccos x\right) = \sqrt{1-x^2}$ és $\cos\left(\arcsin x\right) = \sqrt{1-x^2}$ képletek megfelelői a hiperbolikus függvényeknél.

$\int \left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right) dx$ típusú integrál esetében $x = a \cdot \mathrm{ch} t$ helyettesítés $(dx = a \cdot \mathrm{sh} t \, dt)$

$\int \left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right) dx$ típusú integrál esetén pedig $x = a \cdot \sin t$ vagy $x = a \cdot \cos t$ helyettesítések bármelyike alkalmazható (ekkor $dx = a \cdot \cos t \, dt$ vagy a második helyettesítés esetén $dx = -a \cdot \sin t \, dt$)

Például:

$$\int \sqrt{x^2 - 16} dx = \int \sqrt{16\left(\mathrm{ch}^2 t - 1\right)} \cdot 4 \mathrm{sh} t \, dt = 16 \int \mathrm{sh}^2 t \, dt = 16 \int \frac{-1 + \mathrm{ch} 2t}{2} dt = -8t + 8 \int \mathrm{ch} 2t \, dt =$$

$$= -8t + \frac{8}{2} \mathrm{sh} 2t + c = -8 \mathrm{arch} \frac{x}{4} + 4 \cdot 2 \cdot \mathrm{sh}\left(\mathrm{arch} \frac{x}{4}\right) \mathrm{ch}\left(\mathrm{arch} \frac{x}{4}\right) + c =$$

$$= -8 \mathrm{arch} \frac{x}{4} + 8 \cdot \sqrt{\left(\frac{x}{4}\right)^2 - 1} \frac{x}{4} + c == -8 \mathrm{arch} \frac{x}{4} + \frac{x}{2} \cdot \sqrt{x^2 - 16} + c$$

$$\begin{aligned} x &= 4 \mathrm{ch} t \\ dx &= 4 \mathrm{sh} t \, dt \\ t &= \mathrm{arch} \frac{x}{4} \end{aligned}$$

Használtuk itt a $\mathrm{sh}^2 t = \frac{-1 + \mathrm{ch} 2t}{2}$ linearizálás-képletet, melynek a párja: $\mathrm{ch}^2 t = \frac{1 + \mathrm{ch} 2t}{2}$ és a $\mathrm{sh} 2t = 2 \cdot \mathrm{sh} t \cdot \mathrm{ch} t$ képletet.

7. Feladat

Számítsuk ki az $\int \frac{dx}{x^4 - 81}$ értékét!

Megoldás

$$\frac{1}{x^4 - 81} = \frac{1}{(x^2 - 9)(x^2 + 9)} = \frac{1}{(x - 3)(x + 3)(x^2 + 9)} = \frac{A}{x - 3} + \frac{B}{x + 3} + \frac{Cx + D}{x^2 + 9}$$

$$= \frac{A(x + 3)\left(x^2 + 9\right) + B(x - 3)\left(x^2 + 9\right) + (Cx + D)(x - 3)(x + 3)}{x^4 - 81}$$

x csökkenő hatványai szerint rendezve a számlálót kapjuk, hogy

$$= \frac{(A + B + C)x^3 + (3A - 3B + D)x^2 + (9A + 9B - 9C)x + 27A - 27B - 9D}{x^4 - 81},$$

ahonnan a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} A+B+C &= 0 \\ 3A-3B+D &= 0 \\ 9A+9B-9C &= 0 \\ 27A-27B-9D &= 1 \end{aligned}$$

Az első és harmadik egyenletből kapjuk, hogy $C=0$, majd ezt mindegyik egyenletbe behelyettesítve és megoldva a három egyenletből álló három ismeretlenes egyenletrendszert (két egyenlet ugyanaz lesz) kapjuk, hogy $A=\frac{1}{108}$, $B=-\frac{1}{108}$, $D=-\frac{1}{18}$.

Ezért az elemi törtekre bontás a következőhöz vezet:

$$\int \frac{dx}{x^4-81} = \int \left[\frac{1}{108}\cdot\frac{1}{x-3} - \frac{1}{108}\cdot\frac{1}{x+3} - \frac{1}{18}\cdot\frac{1}{x^2+9}\right] dx = \frac{1}{108}\cdot\ln|x-3| - \frac{1}{108}\cdot\ln|x+3| - \frac{1}{18}\cdot\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+c$$

mert $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+9} = \frac{3}{9}\int \frac{\frac{1}{3}dx}{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1} = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+c$

8. Improprius integrálok

a) „végtelen határú integrál”

$$\int_2^\infty \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = \lim_{\omega\to\infty}\int_2^\omega \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = \lim_{\omega\to\infty} 2\left(\sqrt{\omega-1}-1\right) = +\infty$$

divergens, (ha véges volna, akkor az improprius integrál konvergens lenne)

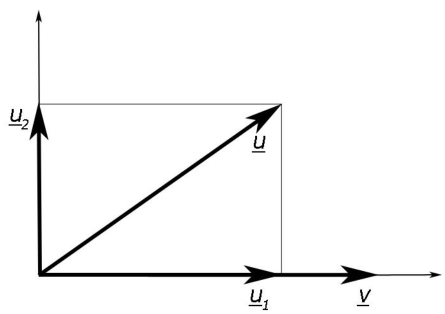
$$\begin{aligned} \text{mert } \int \frac{dx}{\sqrt{x-1}} &= \int (x-1)^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{(x-1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+c = 2\sqrt{x-1}+c \\ \int_2^\omega \frac{dx}{\sqrt{x-1}} &= 2\left[\sqrt{x-1}\right]_2^\omega = 2\left(\sqrt{\omega-1}-1\right) \end{aligned}$$

b) „szakadásos függvény integrálja”

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}} = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_0^{2-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{2-x}} = \lim_{\varepsilon\to 0+}\left[-2\left(\sqrt{\varepsilon}^{\nearrow 0}-\sqrt{2}\right)\right] = 2\sqrt{2} \quad \text{konvergens,}$$

$$\begin{aligned} \text{mert } \int \frac{dx}{\sqrt{2-x}} &= -\int -(2-x)^{-\frac{1}{2}}\,dx = -2(2-x)^{-\frac{1}{2}}+c = -2\sqrt{2-x}+c \\ \int_0^{2-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{2-x}} &= -2\left[\sqrt{2-x}\right]_0^{2-\varepsilon} = -2\left(\sqrt{2-2+\varepsilon}-\sqrt{2}\right) = -2\left(\sqrt{\varepsilon}-\sqrt{2}\right) \end{aligned}$$

9. $\underline{u}$ vektor felbontása $\underline{v}$-vel párhuzamos és arra merőleges komponensek összegére:



$$\begin{aligned} \underline{u}_1 &= \left(\underline{u} \cdot \frac{\underline{v}}{|\underline{v}|}\right) \cdot \frac{\underline{v}}{|\underline{v}|} \\ \underline{u}_2 &= \underline{u} - \underline{u}_1 \end{aligned}$$

Ellenőrzés: $\underline{u}_1 \cdot \underline{u}_2 = 0$

Példa

Határozzuk meg az $\underline{u}\,(1,2,3)$ vektor $\underline{v}\,(0;1;2)$ vektor tartóegyenesére vett merőleges vetületvektorát!

$\underline{u}_1 = \left[(1,2,3) \cdot \left(0; \frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right] \cdot \left(0; \frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{8}{\sqrt{5}} \cdot \left(0; \frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \left(0; \frac{8}{5}; \frac{16}{5}\right)$

mert $\frac{\underline{v}}{|\underline{v}|} = \frac{1}{\sqrt{1^2+2^2}}\,(0;1;2) = \left(0; \frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

10. Feladat

Vizsgáljuk hogy legfeljebb másodfokú valós együtthatós polinomok $(\mathcal{P}_2\,[X]\,, +, \mathbb{R}, \cdot)$ vektorterében lineárisan függetlenek-e az $f_1\,(X) = 4X+1$, $f_2\,(X) = X^2 + X$ és $f_3\,(X) = 3X^2 - X$ „vektorok”?

Megoldás

A lineárisan függetlenség definícióját használva induljunk ki az $\alpha \cdot f_1\,(X) + \beta \cdot f_2\,(X) + \gamma \cdot f_3\,(X) = 0$ azonosságból, ahol 0 a zérus polinom.

$\alpha\,(4X+1) + \beta\left(X^2+X\right) + \gamma\left(3X^2 - X\right) = 0$, fokszámok szerint rendezve
$(\beta + 3\gamma)\,X^2 + (4\alpha + \beta - \gamma)\,X + \alpha = 0$, ahonnan

$$\begin{aligned} \alpha &= 0 \\ 4\alpha + \beta - \gamma &= 0 \Longrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0, \\ \beta + 3\gamma &= 0 \end{aligned}$$

tehát $f_1\,(X)$, $f_2\,(X)$, $f_3\,(X)$ vektorok lineárisan függetlenek.

11. Egyenletrendszerek:

A t paraméter értékétől függően vizsgáljuk az alábbi egyenletrendszer megoldásainak számát!

Ahol van megoldás, ott oldjuk is meg az egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 &= 2 \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 &= 4 \\ 4x_1 + 14x_2 + x_3 + 7x_4 &= 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + tx_4 &= 7 \end{aligned}$$

Mátrixos alakba írva:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & 3 & 5 \\ 4 & 14 & 1 & 7 \\ 2 & -3 & 3 & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{A}} \cdot \underline{x} = \underline{b}$$

Gauss módszerrel kapjuk, hogy:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 14 & 1 & 7 & 4 \\ 2 & -3 & 3 & t & 7 \end{array}\right] \overset{\begin{pmatrix} S_2 - 2S_1 \\ S_3 - 2S_1 \\ S_4 - S_1 \end{pmatrix}}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & 2 & t-3 & 5 \end{array}\right] \overset{\begin{pmatrix} S_3 + S_2 \\ S_4 - 2S_2 \end{pmatrix}}{\sim}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t-1 & 5 \end{array}\right] \overset{\begin{pmatrix} S_2 \cdot (-1) \\ S_3 \leftrightarrow S_4 \end{pmatrix}}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t-1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

a)

pontosan egy megoldásunk akkor lenne, ha

$$\text{rang} A = \text{rang}\,[A|b] = 4 \text{ (ismeretlenek száma)},$$

ez nem állhat fenn.

b)

∞ sok megoldásunk van $\iff$ $\text{rang} A = \text{rang}\,[A|b] < 4$

Ez csak akkor lehetséges, ha a két rang $= 3$, azaz $t \neq 1$.

Ekkor

$$\begin{aligned}
2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 &= 2 \\
4x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\
(t-1)\,x_4 &= 5 \implies x_4 = \frac{5}{t-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2x_1 + 5x_2 + x_3 &= 2 - \frac{15}{t-1} \\
4x_2 - x_3 &= -\frac{5}{t-1} \\
x_4 &= \frac{5}{t-1}
\end{aligned}$$

Ekkor a szabadságfok $= 4 - 3 = 1$

$$\begin{aligned}
x_3 &= u \in \mathbb{R} \\
x_2 &= \frac{1}{4}\left(u - \frac{5}{t-1}\right) \\
x_1 &= \frac{1}{2}\left(2 - \frac{15}{t-1} - u - \frac{5}{4}u + \frac{25}{4}\frac{1}{t-1}\right) = \\
&= \frac{1}{2}\left(2 - \frac{35}{4}\frac{1}{t-1} - \frac{9}{4}u\right) \\
x_4 &= \frac{5}{t-1}
\end{aligned}$$

c)

nincs megoldás (azaz az egyenletrendszer megoldáshalmaza üres), ha $\text{rang} A \neq \text{rang}\,[A|b]$. Ez úgy lehet, hogy $\text{rang} A = 2 < 3 = \text{rang}\,[A|b]$, azaz

$t = 1$

Megjegyzés

Ha nem kéri a feladat, hogy oldjuk is meg az egyenletrendszert ott, ahol van megoldás, akkor elég csak a megoldások számát tárgyalni a t paraméter függvényében, azaz a b) pontban szereplő (x_1, x_2, x_3, x_4) megoldásokat nem kell megadni.

12. Mátrixok

12. A. feladat

Ortogonális-e az $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$ mátrix?

Megoldás

$\underline{\underline{A}}$ ortogonális $\iff \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{A}}^{\mathsf{T}} = \underline{\underline{A}}^{\mathsf{T}} \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{I}}$ egységmátrix.

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{A}}^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{\sqrt{5}}{3} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{I}}_3$$

Hasonlóan be kell látnunk, hogy $\underline{\underline{A}}^{\mathsf{T}} \cdot \underline{\underline{A}}$ is ugyanennyi (házi feladat).

12. B. feladat

Számítsuk ki az $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 9 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ mátrix inverzét!

Megoldás

$\det\underline{\underline{A}} = 20 + 54 + 18 - 27 - 20 - 36 = 72 - 63 = 9 \neq 0$ tehát van inverz mátrix.

$$\mathrm{adj}\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 0 & -6 & 3 \\ 6 & -7 & -1 \\ -3 & 17 & -4 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & -3 \\ -6 & -7 & 17 \\ 3 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{\det\underline{\underline{A}}} \cdot \mathrm{adj}\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{7}{9} & \frac{17}{9} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} & -\frac{4}{9} \end{bmatrix}$$

Alkalmazás

Oldjuk meg az $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{X}} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ mátrix egyenletet, ahol $\underline{\underline{A}}$ az előző mátrix!

Megoldás

$$\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{7}{9} & \frac{17}{9} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} & -\frac{4}{9} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -\frac{2}{3} \\ \frac{10}{3} & -2 & \frac{61}{9} \\ \frac{5}{3} & 0 & -\frac{17}{9} \end{bmatrix}$$