Tartalomjegyzék:

1. folytonossá tétel
2. konvexitásvizsgálat
3. szélsőérték feladat
4. Taylor pol.
5. implicit deriválás
6. L'Hôpital szabály
7. paraméteres deriválás

① *(4 pont)* Határozza meg az a és b valós számokat úgy, hogy az $f(x) = \begin{cases} \frac{2^x-1}{x} & \text{ha } x < 0, \\ ax+b & \text{ha } 0 \le x \le 2, \\ \frac{\ln(x-1)}{x^3-8} & \text{ha } x > 2. \end{cases}$ függvény mindenhol folytonos legyen.

hasonló: L'Hôpital szabály (8.feladat)

M.o.: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2^x-1}{x} \overset{L'H}{\underset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=}} \lim\limits_{x\to 0} \frac{(\ln(2))\cdot 2^x}{1} = \ln(2)$

$\lim\limits_{x\to 2} \frac{\ln(x-1)}{x^3-8} \overset{L'H}{\underset{\text{"}0/0\text{"}}{=}} \lim\limits_{x\to 2} \frac{\frac{1}{x-1}\cdot 1}{3x^2} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{1}{\underset{\downarrow\, 1}{(x-1)}\cdot \underset{\downarrow\, 4}{3x^2}} = \frac{1}{12}$

Válasszuk $f(0) = a\cdot 0 + b = b$ -t úgy hogy f folytonos legyen 0-ban, vagyis $\boxed{b = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2^x-1}{x} = \ln(2)}$

és $f(2) = a\cdot 2 + b = a\cdot 2 + \ln(2)$ -t úgy, hogy f folytonos legyen 2-ben, vagyis

$a\cdot 2 + \ln(2) = \lim\limits_{x\to 2} \frac{\ln(x-1)}{x^3-8} = 1/12 \implies a = \boxed{\frac{1/12 - \ln(2)}{2}}$

A többi pontban a fv. folytonos

② *(4 pont)* Határozza meg, hogy az $f(x) = \ln(4x^2+1)$ függvény hol konvex ill. konkáv.

Tekintsük a második deriváltat, mert ha $f''(x) > 0$ $\forall x \in I \Rightarrow f(x)$ konvex I-n
$ < 0 \Rightarrow$ konkáv

hasonló: konvexitás

$f'(x) = \frac{1}{4x^2+1} \cdot 8x$

$f''(x) = \frac{8(4x^2+1) - (8x)^2}{(4x^2+1)^2} = \frac{8 + 32x^2 - 64x^2}{(4x^2+1)^2} = \frac{8 - 32x^2}{(4x^2+1)^2} =$

mivel $(4x^2+1)^2 > 0$ $\quad f''(x) \underset{>0}{<0} \iff 8 - 32x^2 \underset{>0}{<0}$

$8 - 32x^2 = 0 \quad /:8$
$1 - 4x^2 = 0 \quad /+4x^2$
$1 = 4x^2$
$\frac{1}{4} = x^2$
$\pm\frac{1}{2} = x$

$f(x)$ konvex $\iff f''(x) > 0 \iff -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$

$f(x)$ konkáv $\iff f''(x) < 0 \iff x > \frac{1}{2}$ v. $x < -\frac{1}{2}$

		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$	
$f(x)$	$\cap$	I.p	$\cup$			I.p	$\cap$
$f''(x)$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$

3 *(4 pont)* Határozza meg, hogy az $y = \frac{1}{x}$, $x > 0$ hiperbola melyik pontja van legközelebb az origóhoz.

hasonló: szöveges szélsőérték feladatok

Egy pont távolsága az origótól: $\sqrt{x^2+y^2}$, azt az (x, y) pontot keressük, melyre ez minimális feltéve, hogy $y = 1/x$, $x \geq 0$ (vagyis a pont rajta van a hiperbolán)

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1/x^2}, \quad x_0 = \arg\min_x f(x) = ?$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1/x^2}} \cdot \left(2x - \frac{2}{x^3}\right), \quad f'(x) = 0, \text{ ha } 2x - \frac{2}{x^3} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$x = 1/x^3 \iff 1 = 1/x^2 \iff x^2 = 1$$

$$x = \pm 1$$

Mivel csak az $x \geq 0$ pontokban keressük a minimum helyet, a megoldás az $\boxed{(x_0, 1/x_0) = (1, 1)}$ pont.

Megj: a $\sqrt{\ }$ fgv monoton így az $f(x)$ helyett a $g(x) = x^2 + 1/x^2$ fgv minimumát is kereshetjük!

4 *(3+1 pont)* Határozza meg az $f(x) = \sqrt{1-2x}$ függvény másodrendű Taylor-polinomját az $a = 0$ helyen! A fenti Taylor-polinomot használva adjon becslést az $\sqrt{0,8}$ értékére (a becslés hibája NEM kérdés!)!

hasonló: Taylor polinomok

$a = 0$, $n = 2$

$$f(x) = \sqrt{1-2x}, \quad f(0) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1-2x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2), \quad f'(0) = -1$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4}(1-2x)^{-\frac{3}{2}} \cdot 4, \quad f''(0) = -1$$

$$T_{0,2}^f(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + f''(0)\frac{(x-0)^2}{2!}$$

$$\| $$

$$\boxed{1 - x - \frac{x^2}{2}}$$

$$\boxed{\sqrt{0.8} = f(0.1) \approx \underbrace{1 - 0.1}_{0.9} - \underbrace{\frac{(0.1)^2}{2}}_{0.005} = 0.895}$$

5 *(4 pont)* Határozza meg az $x^2+x+y^3+xy=9$ implicit módon adott függvény $x=2$, $y=1$ pontjában az érintő egyenletét!

hasonló: implicit derivált

$$x^2 + x + y(x)^3 + x\,y(x) = 9 \quad \Big/ \frac{d}{dx}$$

$$2x + 1 + 3y(x)^2 \cdot y'(x) + \left(y(x) + x \cdot y'(x)\right) = 0$$

$$y'(x)\left[3y(x)^2 + x\right] + 2x + 1 + y(x) = 0$$

$$y'(x) = -\frac{2x+1+y(x)}{3y(x)^2+x}$$

$\Rightarrow$ az $(x,y)=(2,1)$ pontban az érintő meredeksége $-\dfrac{2\cdot 2+1+1}{3\,1^2+2} = -\dfrac{6}{5}$

az érintő egy pontja $(2,1)$, így az egyenlet:

$$\boxed{(y-1) = -\tfrac{6}{5}(x-2) \quad \left[y = -\tfrac{6}{5}x + \tfrac{17}{5}\right]}$$

6 *(4 pont)* Határozza meg a $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{x}$ határértéket.

„$\infty - \infty$" alakú → hozzuk közös nevezőre → L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x - e^x + 1}{(e^x-1)x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1-e^x}{(e^x-1)+xe^x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-e^x}{e^x+e^x+x\cdot e^x} = \boxed{-\tfrac{1}{2}}$$

hasonló: L'Hôpital szabály (7.feladat)

7 *(4 pont)* Határozza meg, hogy az $x=t^2$, $y=3t^3+9t$ paraméterezésű görbe mely pontjában lesz az érintő párhuzamos az $y=9x-6$ egyenessel!

hasonló: paraméteresen adott fgv deriváltja

az $y=9x-6$ egyenes meredeksége 9

keressük azt az (x,y) pontot, ahol $\dfrac{dy}{dx} = 9$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\dot y}{\dot x}$$

$$\left.\begin{array}{l}\dot y = 9t^2+9 \\ \dot x = 2t\end{array}\right\} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{9}{2}\cdot\left(t+\frac{1}{t}\right) \longrightarrow \frac{dy}{dx} = 9, \text{ ha } \frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right) = 1$$

$$t + \frac{1}{t} = 2$$

$$t^2+1 = 2t$$

$$t^2-2t+1=0$$

$$\boxed{(x_0, y_0) = (1^2, 3\cdot 1^3 + 9\cdot 1) = (1, 12)} \Leftarrow t_0 = 1$$