Mentett fotó

A csoport

1	2	3	4	5	össz

Építőmérnöki BSc szak, Matematika A1, 1. zh., 2021. október 7., 12-13.

Név: .... Neptun kód: .... Tankör: ....

1. (a) *(2 pont)* Definiálja az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ térvektorok skaláris szorzatát (nem a kiszámítás kell!)!
   (b) *(2 pont)* Írja le a $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ és a $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ trigonometrikus alakban adott komplex számok hányadosának trigonometrikus alakját!

2. *(4 pont)* Határozza meg a $z = \frac{(1-\sqrt{3}i)^9}{\sqrt{2}+\sqrt{6}i}$ komplex szám algebrai alakját!

3. *(4 pont)* Határozza meg a $z^5 + 8iz^2 = 0$ egyenlet komplex gyökeinek algebrai alakját!

4. *(4 pont)* Határozza meg a z értéket úgy, hogy az $A(3,-3,4)$, $B(3,3,2)$ és $C(0,1,z)$ csúcsú háromszög C csúcsánál derékszög legyen! Mekkora az A, B, C háromszög legkisebb szöge?

5. *(4 pont)* Határozza meg, hogy a $P(-1,2,-2)$ pont és az $x = 4-2t$, $y = 3+t$ és $z = -1+3t$ paraméterezésű egyenes távolságát!

① a) $\underline{a}\,\underline{b} = |\underline{a}|\cdot|\underline{b}|\cdot\cos\gamma$, ahol γ az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok által közrezárt kisebb $(0 \le \gamma \le \pi)$ szög, és $|\underline{a}|$ az $\underline{a}$ vektor hossza.

b) $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\cdot\left[\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right]$$

② $$z = \frac{(1-\sqrt{3}i)^9}{\sqrt{2}+\sqrt{6}i} = \frac{(1-\sqrt{3}i)^9}{\sqrt{2}(1+\sqrt{3}i)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{(1-\sqrt{3}i)^{10}}{(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{(1-\sqrt{3}i)^{10}}{4}$$

Megoldás számológép nélkül:

• trig. alak:

$$(1-\sqrt{3}i) = 2\left[\cos\left(\tfrac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(\tfrac{5\pi}{3}\right)\right]$$

$$r = \sqrt{1+3} = 2$$

$$\operatorname{tg}\varphi = -\sqrt{3}, \quad b<0 \Rightarrow \varphi = \tfrac{5\pi}{3}$$

• $(1-\sqrt{3}i)^{10} = 2^{10}\left[\cos\left(\tfrac{50\pi}{3}\right) + i\sin\left(\tfrac{50\pi}{3}\right)\right] =$

$$\frac{50\pi}{3} = \frac{25}{3}\cdot 2\pi = 8\cdot 2\pi + \frac{2}{3}\pi$$

$$= 2^{10}\left[\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right] = 2^{10}\left[-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right] = 2^{9}(-1+\sqrt{3}i)$$

$$\Rightarrow z = \frac{2^9}{\sqrt{2}\cdot 4}\left(-1+\sqrt{3}i\right) = 2^6\left(-\sqrt{2}+\sqrt{6}i\right)$$

Megoldás számológéppel

· trigonometrikus alak:

$$(1-\sqrt{3}i) \cong 2\left[\cos(2{,}094) + i\sin(2{,}094)\right]$$

$$r = \sqrt{1+3} = 2$$

$$\operatorname{tg}\varphi = -\sqrt{3},\ b<0 \Rightarrow \varphi \sim -1{,}047 + \pi \sim 2{,}094$$

$$\cdot\ (1-\sqrt{3}i)^{10} \approx 2^{10}\left[\cos(\underbrace{10\cdot 2{,}094}_{20{,}94}) + i\sin(10\cdot 2{,}094)\right] =$$

$$= 2^{10}\left[-0,5 + i\cdot 0,866\right]$$

$$z = \frac{2^{10}}{\sqrt{2}\cdot 4}\left[-0,5 + i\cdot 0,866\right]$$

3. $z^5 + 8iz^2 = 0$

$\boxed{1.}$ $z^2 = 0$:

ha $z^2 = 0 \Rightarrow \boxed{z_1 = 0}$

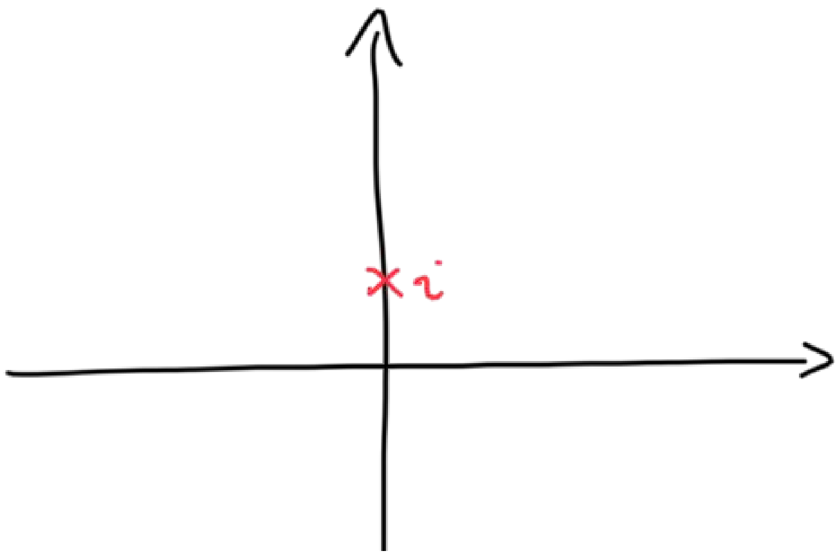
$\boxed{2.}$ $z^2 \neq 0$

ha $z^2 \neq 0 \Rightarrow$ oszthatunk z^2-tel

$$z^3 + 8i = 0$$

$$z^3 = -8i$$

$$\boxed{z_{2,3,4} = \sqrt[3]{-8i}}$$



- trigonometrikus alak:

$$(-8i) = 8\left(\cos\left(\tfrac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\tfrac{3\pi}{2}\right)\right)$$

$-8i$

$$r = \sqrt{8^2} = 8$$

$$a = 0,\ b < 0 \Rightarrow \varphi = \tfrac{3\pi}{2}$$

$$\boxed{z_2} = \sqrt[3]{8}\cdot\left(\cos\left(\frac{3\pi/2}{3}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi/2}{3}\right)\right) = 2\left(\cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right) =$$

$$\boxed{= 2i}$$

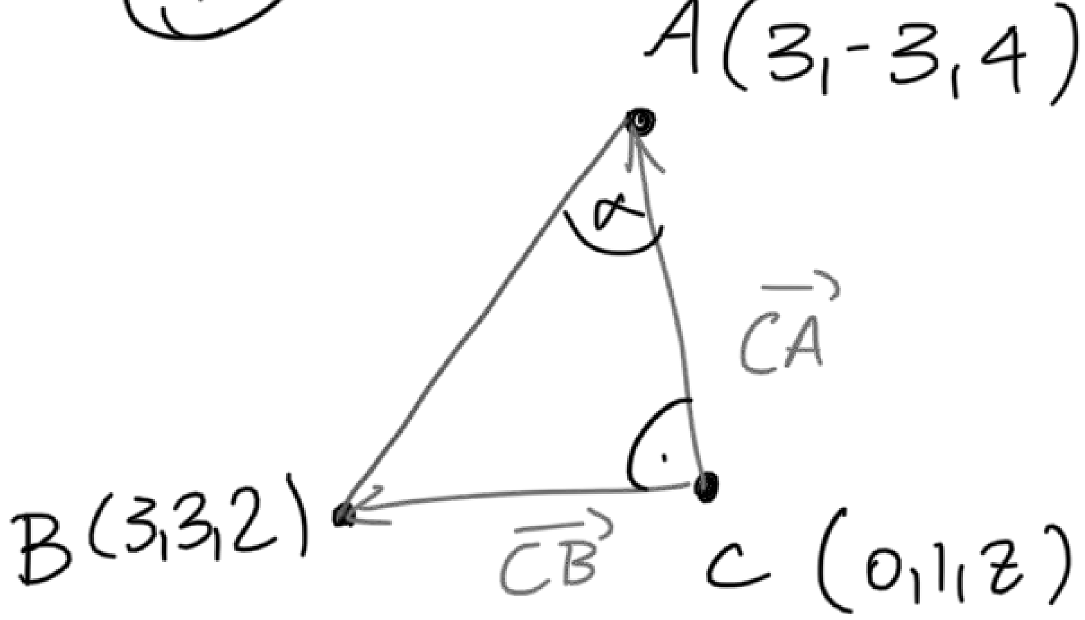
$$\boxed{z_3} = \sqrt[3]{8}\left(\cos\left(\frac{3\pi/2 + 2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi/2 + 2\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right) =$$

$$= 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) \boxed{= -\sqrt{3} - i}$$

$$\boxed{z_4} = \sqrt[3]{8}\left(\cos\underbrace{\left(\frac{3\pi/2 + 4\pi}{3}\right)}_{11\pi/6} + i\sin\left(\frac{3\pi/2 + 4\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= 2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) \boxed{= \sqrt{3} - i}$$

4.



• A C csúcsnál derékszög van, ha a $\vec{CA}\,\vec{CB}$ skaláris szorzat 0, vagyis

$$\vec{CA} = (3,-4,4-z)$$
$$\vec{CB} = (3,2,2-z)$$

$$0 = \vec{CA}\,\vec{CB} = 9-8+(4-z)(2-z) = 1+8-6z+z^2 = z^2-2\cdot 3\cdot z+9 =$$
$$= (z-3)^2 \Rightarrow \boxed{z=3}$$

$$|\vec{CA}| = \sqrt{9+16+1} = \sqrt{26}$$
$$|\vec{CB}| = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14}$$

$\Rightarrow$ Az A csúcsnál fekvő szög a legkisebb, jel. α-val

radián

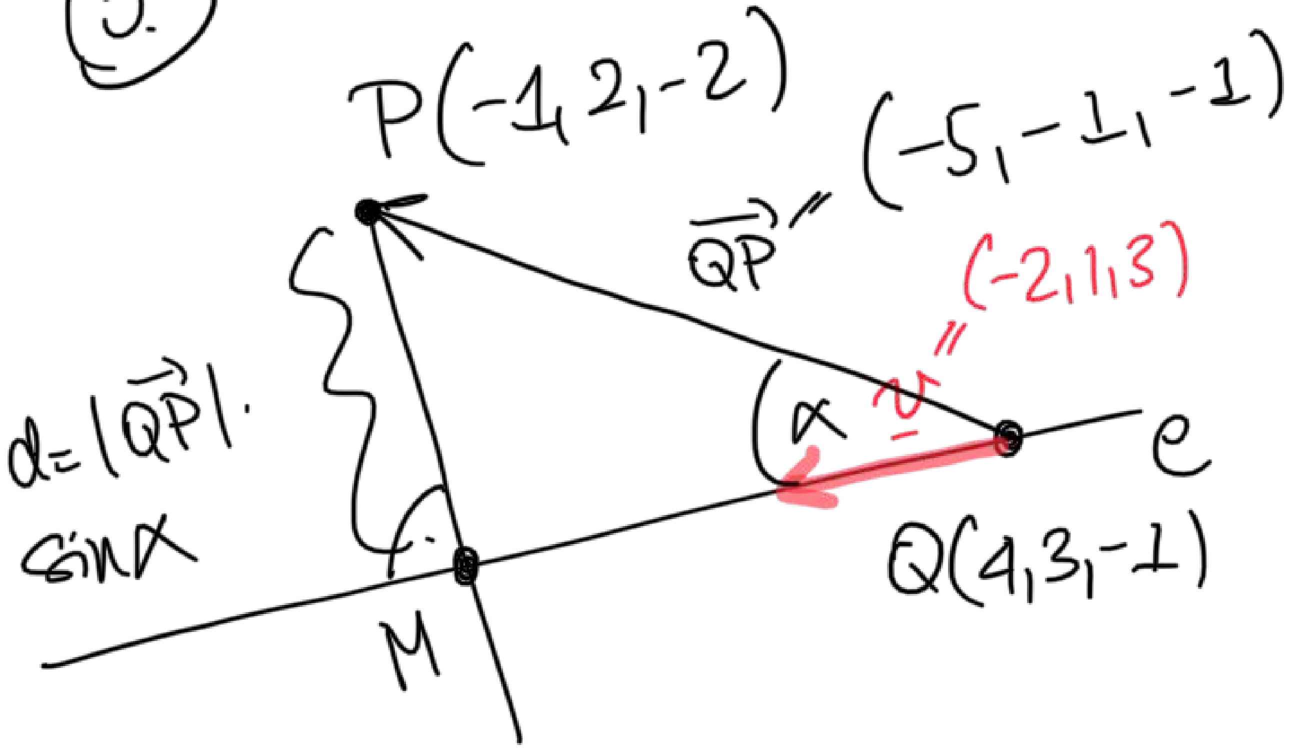
↓

$$\tan(\alpha) = \frac{|\vec{CB}|}{|\vec{CA}|} = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{26}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{13}} \Rightarrow \alpha = 0{,}633$$

?

$36°$ ← fok

5.



A távolságot a rajzon a P és M pont távolsága, ami $|\overrightarrow{QP}| \cdot \sin\alpha$, ahol Q az egyenes egy pontja, α pedig a $\overrightarrow{QP}$ vektor és a $\underline{v}$ irányvektor által bezárt szög.

- $|\overrightarrow{QP}| = |\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}| = |(-1-4,\ 2-3, -2-(-1))| = |(-5,-1,-1)| =$

$= \sqrt{25+1+1} = \sqrt{27}$

- $\cos\alpha = \dfrac{\underline{v}\ \overrightarrow{QP}}{|\underline{v}| \cdot |\overrightarrow{QP}|} = \dfrac{10-1-3}{\sqrt{27}\sqrt{4+1+9}} = \dfrac{6}{\sqrt{27}\sqrt{14}}$

$\Downarrow$

$\sin\alpha = \sqrt{1-(\cos\alpha)^2} = \sqrt{1-\dfrac{36}{27 \cdot 14}} \approx 0{,}95$

27 · 14

tehát a d távolság $\approx \sqrt{27} \cdot 0.95 \approx \boxed{4{,}94}$