

Kalkulus 1

Pataki Gergely

BME

2025. július 1.–2025. október 14.

pataki@math.bme.hu
math.bme.hu/~pataki/crs/an1

Szintaxis

Kijelentés olyan mondat, ami egyértelműen **igaz** vagy egyértelműen **hamis**. Ezeket **kijelentésváltozókkal** jelöljük.

Például

A: A nap 6:14-kor kel.

B: 2025. szeptember 10-én a nap 5:30 és 6:30 között kel Budapesten.

Atomi kijelentés, ami nem bontható. Ezekből készítünk **összetett kijelentéseket**. Ehhez összekötőjeleket, azaz unér vagy binér **logikai operátorokat** és zárójeleket használunk.

Szintaxis

Kijelentés olyan mondat, ami egyértelműen **igaz** vagy egyértelműen **hamis**. Ezeket **kijelentésváltozókkal** jelöljük.

Például

A: A nap 6:14-kor kel. **Nem kijelentés, mert nem elég egyértelmű.**

B: 2025. szeptember 10-én a nap 5:30 és 6:30 között kel Budapesten.

Atomi kijelentés, ami nem bontható. Ezekből készítünk **összetett kijelentéseket**. Ehhez összekötőjeleket, azaz unér vagy binér **logikai operátorokat** és zárójeleket használunk.

Szintaxis

Kijelentés olyan mondat, ami egyértelműen **igaz** vagy egyértelműen **hamis**. Ezeket **kijelentésváltozókkal** jelöljük.

Például

A: A nap 6:14-kor kel. **Nem kijelentés, mert nem elég egyértelmű.**

B: 2025. szeptember 10-én a nap 5:30 és 6:30 között kel Budapesten. **Ez kijelentés.**

Atomi kijelentés, ami nem bontható. Ezekből készítünk **összetett kijelentéseket**. Ehhez összekötőjeleket, azaz unér vagy binér **logikai operátorokat** és zárójeleket használunk.

Logikai jelek

- Kijelentés nem lehet egyszerre igaz és hamis (**ellentmondásmentesség**).
- Kijelentés nem lehet egyszerre se igaz se hamis (**harmadik kizárása**).
- Az összetett kijelentés igazságértéke csak a benne szereplő atomok igazságértékétől függ.

Hogy mi az igazságértéke egy kijelentésnek a benne szereplőktől függően azt az **igazságtábla** alapján határozzuk meg.

		$\neg$	$\wedge$	$\vee$	$\oplus$	$\implies$	$\iff$	$\bar{\wedge}$	$\bar{\vee}$
		negáció	és	vagy	kizáró vagy	implikáció	ekvivalencia	nand	nor
A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \oplus B$	$A \implies B$	$A \iff B$	$A \bar{\wedge} B$	$A \bar{\vee} B$
i	i	h	i	i	h	i	i	h	h
i	h	h	h	i	i	h	h	i	h
h	i	i	h	i	i	i	h	i	h
h	h	i	h	h	h	i	i	i	i

Definíció

Egy unér és binér operátorokból álló rendszert teljesnek nevezünk, ha minden unér és binér operátor kifejezhető vele.

Az **interpretáció** azt jelenti, hogy kiválasztunk egy sort, vagyis megmondjuk az egyes változók igazságértékét.

Ha a P kijelentés ugyanazokban az interpretációkban igaz mint a Q , ezt így jelöljük: $P \equiv Q$.

Ha Q minden olyan interpretációban igaz, amelyekben igaz P , azt így jelöljük: $P \models Q$.

Ha P minden interpretációban igaz, akkor **tautológiának** nevezzük. Jelölés $\models P$ vagy $\top \models P$, ahol $\top$ mindig igaz, vagyis tautológia.

Ha P minden interpretációban hamis, akkor **kontradikciónak** nevezzük. Jelölés $\models \neg P$ vagy $P \models \perp$, ahol $\perp$ mindig hamis, vagyis kontradikció.

Például $\models (A \iff B)$ ugyanazt jelenti mint $A \equiv B$. $A \vee \neg A$ tautológia, és $A \wedge \neg A$ kontradikció.

Feladat

Vizsgáljuk az $A \implies (B \vee C)$ az $(A \wedge B) \oplus C$ és a $\neg(A \vee B) \implies \neg B$ kijelentéseket.

Ugyanazt jelentik a következő párok:

1.	$A \implies B$	$(\neg A) \vee B$	
2.	$A \implies B$	$(\neg B) \implies (\neg A)$	kontrapozíció
3.	$A \vee B$	$B \vee A$	$\vee$ kommutatív
4.	$A \wedge B$	$B \wedge A$	$\wedge$ kommutatív
5.	$A \otimes B$	$B \otimes A$	$\otimes$ kommutatív
6.	$A \iff B$	$B \iff A$	$\iff$ kommutatív (szimmetrikus)
7.	A	$A \vee A$	$\vee$ idempotens
8.	A	$A \wedge A$	$\wedge$ idempotens
9.	A	$\neg(\neg A)$	$\neg$ involutív
10.	$(A \vee B) \vee C$	$A \vee (B \vee C)$	$\vee$ asszociatív
11.	$(A \wedge B) \wedge C$	$A \wedge (B \wedge C)$	$\wedge$ asszociatív
12.	$(A \otimes B) \otimes C$	$A \otimes (B \otimes C)$	$\otimes$ asszociatív
13.	$(A \iff B) \iff C$	$A \iff (B \iff C)$	$\iff$ asszociatív
14.	$A \vee (B \wedge C)$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$	$\vee$ disztributív $\wedge$ -ra
15.	$A \wedge (B \vee C)$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	$\wedge$ disztributív $\vee$ -ra
16.	$A \otimes B$	$\neg(A \iff B)$	$\otimes$ különbözőek; $\iff$ egyformák
17.	$\neg(A \vee B)$	$(\neg A) \wedge (\neg B)$	de Morgan
18.	$\neg(A \wedge B)$	$(\neg A) \vee (\neg B)$	de Morgan

Nulladrendű logika, kijelentéslogika, vagy ítéletlogika

- ▶ **Atom** oszthatatlan állítás *példa: D : A kerék defektes, L : a kerék leereszt*
- ▶ **Kötőszó** *példa: $\neg$ nem, $\wedge$ és, $\vee$ vagy, $\implies$ ha ..., akkor ...*
- ▶ **Összetett kijelentések, mondatok:** *példa: $D \implies L$, $L \wedge \neg D$*
- ▶ **Zárójelek:** szerkezet tisztázására, műveleti sorrend

Elsőrendű logika, predikátumlogika

- ▶ **Term:** Lehetnek típusok, ekkor minden term valamelyik típushoz tartozik. (Nincs logikai értékek típusa.)
 - ▶ **konstansok** konkrét dolgok *példa: k egy konkrét bicikli első kereke*
 - ▶ **változók:** általános "helykitöltők" *példa: x, y tetszőleges biciklikerekek*
 - ▶ **függvényértékek**
- ▶ **Függvény:** Termekhez termet rendel.
- ▶ **Predikátum:** tulajdonságok, kapcsolatok *példa: $\delta(x)$ az x kerék defektes, $\lambda(x)$ az x kerék leereszt.* Olyan mint a függvény, csak értéke logikai érték.
- ▶ **Kvantorok (csak változókra):** $\forall, \exists$ *példa: $\forall x : \delta(x) \implies \lambda(x)$*
- ▶ **Formulák:** Atomok, amik predikátumok, és belőlük, logikai jelekből és kvantorokból felépített **összetett formulák**. pl: $\varphi \wedge \alpha(x)$, $\forall x \alpha(x)$

Kvantorok

univerzális, egzisztenciális: $\forall, \exists$

Ha a φ logikai formulának van egy szabad változója, akkor $\forall x : \varphi$ vagy $\forall x : \varphi(x)$ azt jelenti, hogy bármely x változó esetén igaz az φ formula. Ugyanígy $\exists x : \varphi$ vagy $\exists x : \varphi(x)$ azt jelenti, hogy létezik olyan x változó ami esetén igaz φ .

Kvantorok

univerzális, egzisztenciális: $\forall, \exists$

Ha a φ logikai formulának van egy szabad változója, akkor $\forall x : \varphi$ vagy $\forall x : \varphi(x)$ azt jelenti, hogy bármely x változó esetén igaz az φ formula. Ugyanígy $\exists x : \varphi$ vagy $\exists x : \varphi(x)$ azt jelenti, hogy létezik olyan x változó ami esetén igaz φ .

Használjuk még a $\exists!$ jelet. $\exists! x : \varphi(x)$ azt jelenti, hogy létezik pontosan egy olyan x ami esetén igaz φ .

Kvantorok

univerzális, egzisztenciális: $\forall, \exists$

Ha a φ logikai formulának van egy szabad változója, akkor $\forall x : \varphi$ vagy $\forall x : \varphi(x)$ azt jelenti, hogy bármely x változó esetén igaz az φ formula. Ugyanígy $\exists x : \varphi$ vagy $\exists x : \varphi(x)$ azt jelenti, hogy létezik olyan x változó ami esetén igaz φ .

Használjuk még a $\exists!$ jelet. $\exists! x : \varphi(x)$ azt jelenti, hogy létezik pontosan egy olyan x ami esetén igaz φ .

Ugyanazt jelentik a következő párok:

19.	$\neg \forall x : \varphi(x)$	$\exists x : \neg \varphi(x)$
20.	$\neg \exists x : \varphi(x)$	$\forall x : \neg \varphi(x)$

Másodrendű logika

- **Lehet függvény vagy predikátum paramétere predikátum** (mintha a típusok között szerepeltetnénk a logikai értékek típusát), **függvények (és így predikátumok) is kvantifikálhatók.** $\forall, \exists$ példa: $\forall \alpha : \exists x : \neg \alpha(x)$,
 $\forall \alpha : (\alpha(0) \wedge \forall n : (\alpha(n) \implies \alpha(n+1))) \implies \forall n : \alpha(n)$

Magasabbrendű logika

Hilbert ε operátor: ha $\varphi(x)$ egy formula x változóval, akkor $\varepsilon x \varphi(x)$ kifejezés egy olyan x -et jelent, amire $\varphi(x)$ teljesül, ha van ilyen x . Ha nincs ilyen x , akkor egy tetszőleges x -et, amire értelemszerűen nem teljesül $\varphi(x)$.

21.	$\exists x : \varphi(x)$	$\varphi(\varepsilon x \varphi(x))$
22.	$\forall x : \varphi(x)$	$\neg \varphi(\varepsilon x \neg \varphi(x))$

Halmaz axiómák ZFC

$$\{1, 2\} = \{1, 1, 2\} = \{2, 1\} = \{1, 2, 2, 1, 2\}$$

Ha x bármi (pl egy halmaz) és A egy halmaz, akkor $x \in A$ vagy $x \notin A$.

Ha A és B halmaz, akkor

► $A \subset B$, ha $\forall x \in A : x \in B$, vagyis $x \in A \implies x \in B$.

► $A = B$, ha $A \subset B \wedge B \subset A$

Műveletek halmazokkal

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ vagy } x \in B\} \quad (\text{unió vagy egyesítés})$$

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ és } x \in B\} \quad (\text{metszet vagy közös rész})$$

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ és } x \notin B\} \quad (\text{különbség})$$

Ábrázoljuk egy számegyenesen a valós számok P részhalmazát pirossal,



és egy másikon a Z részhalmazt zölddel!

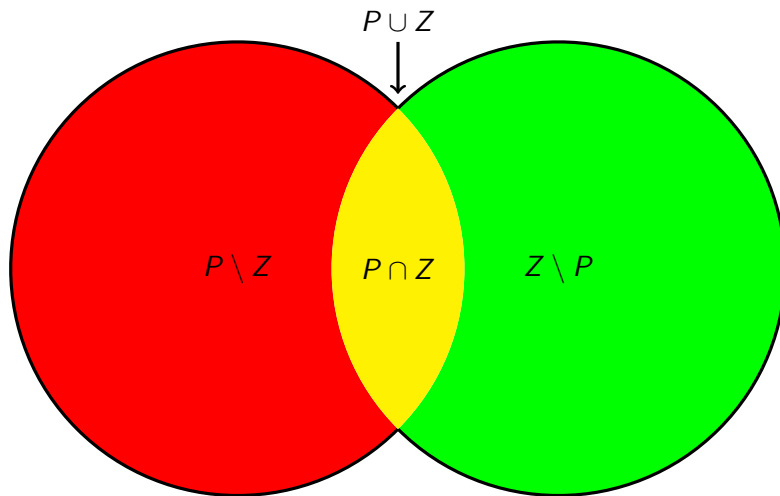


Ha egymásra helyezzük őket, akkor sárga lesz a $P \cap Z$, piros marad a $P \setminus Z$, zöld marad a $Z \setminus P$, és az összes színes rész lesz a $P \cup Z$.



Azt mondjuk, hogy A és B halmaz **diszjunkt**, ha $A \cap B = \emptyset$.

Venn-diagram



1. $A \cap B = B \cap A$; (metszet kommutatív)
2. $A \cup B = B \cup A$; (unió kommutatív)
3. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$; (metszet asszociatív)
4. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$; (unió asszociatív)
5. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$; (metszet disztributív az unióra)
6. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$; (unió disztributív a metszetre)
7. $A = A \cap A = A \cup A$; (metszet és unió idempotens)
8. $(A \cap B) \cup B = (A \cup B) \cap B = B$;

Ha adott az X alaphalmaz, és csak ennek részhalmazzaival dolgozunk, akkor beszélhetünk egy A halmaz **komplementeréről**.

$$\bar{A} = X \setminus A$$

Legyen X alaphalmaz és $A, B, C \subset X$. Ekkor

8. $(A \subset B) \iff (\bar{B} \subset \bar{A}) \iff (\bar{A} \cup B = X) \iff (A \cap \bar{B}) = \emptyset$;
9. $A = \bar{\bar{A}}$; (komplementerképzés involutív)
10. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ és $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$; (de Morgan)

Néhány tisztázandó kérdés

- ▶ Lehet-e egy halmaz eleme egy másik halmaznak?
- ▶ Lehet-e egy halmaz eleme önmagának?
- ▶ Lehet-e egy halmaznak eleme minden halmaz?
- ▶ Hogy konstruálhatunk halmazokat?

Tétel (Russel-féle antinómia)

Nem létezik univerzális halmaz.

Halmaz axiómák ZFC

Változók: halmazok, predikátum: $\in$

Axióma (Létezés axiómája)

Létezik üres halmaz. (helyette elég, hogy létezik halmaz, sőt ez az axióma elhagyható)

$$\exists A : \forall X : X \notin A \quad (\text{jelölés: } \emptyset = A)$$

Axióma (Páraxióma)

Ha X és Y halmaz, akkor van olyan halmaz, melynek pontosan X és Y az elemei.

$$\forall X, Y : \exists \{X, Y\}$$

Axióma (Meghatározottsági axióma (extenzionalitás axiómája))

Ha két halmaznak ugyanazok az elemei, akkor a két halmaz egyenlő.

$$\forall X \forall Y : \forall Z : (Z \in X \iff Z \in Y) \implies X = Y \quad (\text{egyébként } X \neq Y)$$

Halmaz axiómák ZFC

Változók: halmazok, predikátum: $\in$

Axióma (Regularitási axióma)

Egy nem-üres halmaznak mindig van olyan eleme, amellyel diszjunkt.

$$\forall X \neq \emptyset : \exists Y \in X : Y \cap X = \emptyset \quad (\implies \forall A : A \notin A)$$

Axióma (Részhalmazaxióma (SÉMA, elhagyható))

Ha φ egy formula és A egy halmaz, akkor létezik az A halmaz φ tulajdonságú elemeiből álló halmaz.

$$\{x \in A \mid \varphi(x)\}$$

Axióma (Unióaxióma)

Ha $\mathcal{A}$ halmazok halmaza, akkor létezik X halmaz aminek eleme az $\mathcal{A}$ minden elemének eleme.

$$\forall \mathcal{A} : \exists X : \forall A \in \mathcal{A} : \forall x \in A : x \in X$$

Halmaz axiómák ZFC

Változók: halmazok, predikátum: $\in$

Axióma (Hatványhalmaz axióma)

Ha X egy halmaz, akkor van olyan $\mathcal{H}$ halmaz, aminek eleme X minden részhalmaza.

$$\forall X : \exists \mathcal{H} : \forall A \subset X : A \in \mathcal{H}.$$

A legszűkebb ilyen halmaz, aminek nincsenek más elemei az A hatványhalmaza. Jele

$$\mathcal{P}(X), \quad \text{vagy} \quad 2^X, \quad \text{vagy} \quad \text{Exp}(X).$$

Axióma (Végtelenségi axióma)

Van induktív halmaz.

$$\exists \mathcal{A} : \emptyset \in \mathcal{A} \wedge (X \in \mathcal{A} \implies (X \cup \{X\}) \in \mathcal{A})$$

Axióma (Helyettesítési axióma (SÉMA))

Ha egy halmaz elemeit kicseréljük, akkor halmazt kapunk.

Halmaz axiómák ZFC

Axióma (Kiválasztási-axióma)

Ha $\mathcal{A}$ elemei nem üres halmazok, akkor létezik $f : \mathcal{A} \rightarrow \bigcup \mathcal{A}$ úgy, hogy $\forall A \in \mathcal{A} : f(A) \in A$.

Megjegyzés (Kalkulus 1. 240)

Tétel (Átviteli elv)

Az f függvény pontosan akkor folytonos az $a \in \text{Dom}_f$ pontban, ha minden $x_n \text{ Dom}_f$ -beli, a -hoz konvergáló sorozatra $f(x_n) \rightarrow f(a)$.

Bizonyítás.

Fordítva, ha f nem folytonos a -ban, akkor valamilyen $\varepsilon > 0$ -hoz akárhogy választjuk a $\delta > 0$ -t, mindig lesz $x \in \text{Dom}_f$, melyre

$$|x - a| < \delta, \quad \text{és} \quad |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon.$$

Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén legyen x_n egy $\delta = 1/n > 0$ -hoz tartozó ilyen érték. Ekkor $x_n \rightarrow a$, de $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$, így $f(x_n) \not\rightarrow f(a)$. □

Megjegyzés

ZF-ben a kiválasztási axióma független, nem igazolható és nem is cáfolható.

Lemma (Zorn-lemma)

Legyen X parciálisan rendezett halmaz. Ha minden rendezett részhalmaza felülről korlátos, akkor létezik maximális eleme.

(Maximális elem olyan, aminél nincs nagyobb. (Mégsem feltétlenül maximum, mert lehet olyan elem, ami nem összehasonlítható vele.))

Tétel (Jólrendezési-tétel)

Minden halmazon megadható jólrendezés.

ZF-ben Kiválasztási-axióma $\iff$ Jólrendezési-tétel $\iff$ Zorn-lemma.

"The axiom of choice is obviously true, the well-ordering principle obviously false, and who can tell about Zorn's lemma?"

(Jerry Bona)

Megjegyzés

ZFC-ben a kontinuum hipotézis független, nem igazolható és nem is cáfolható.

Axióma (Kontinuum hipotézis CH,GCH)

CH: Nincs olyan α számosság, melyre $\aleph_0 < \alpha < \mathfrak{c}$.

GCH: Bármely végtelen $\aleph$ számosság esetén, nincs olyan α számosság, melyre $\aleph < \alpha < 2^\aleph$.

Műveletek halmazokkal

Definíció

Az

$$(a, b) = \{\{a, b\}, \{a\}\}$$

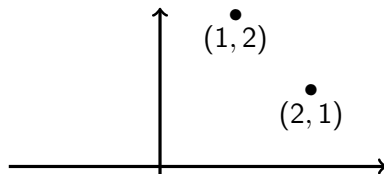
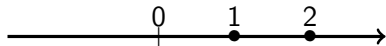
halmazt az a bal oldali és b jobb oldali elemből álló **rendezett párnak** nevezzük.

Megjegyzés

Rendezett párnál számít a sorrend $(1, 2) \neq (2, 1)$,

illetve $a = b$ esetén $(a, a) = \{\{a\}\}$

A valós számokat számegyenesen szemléltetjük.



Valós számokból álló rendezett párokat pedig a koordinátságikon.

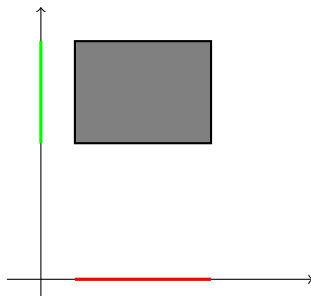
Descartes-szorzat

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A \text{ és } b \in B\} \quad (\text{Descartes-szorzat})$$

Megjegyzés

Ez biztosan halmaz, mert $(a, b) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$.

A korábbi $P \subset \mathbb{R}$ és $Z \subset \mathbb{R}$ halmazok Descartes-szorzatát a koordinátasíkon szemléltetjük.



$A \times A$ helyett használhatjuk az A^2 jelölést is.

Több tényezős szorzat

Definíció

Ha I indexhalmaz, A_i halmaz minden $i \in I$ esetén, akkor szorzatuk

$$\prod_{i \in I} A_i = \{f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \mid \forall i \in I : f(i) \in A_i\}.$$

Ha $A = A_i$ minden $i \in I$ esetén, akkor használjuk a

$$A^I = \prod_{i \in I} A_i = \prod_{i \in I} A$$

jelölést.

Megjegyzés

Ehhez nem kell új axióma, mert ezek a függvények a korábbiak szerint halmazok.

$A_1 \times A_2$ egy eleme $(a_1, a_2) = \{\{a_1\}, \{a_1, a_2\}\}$, ahol $a_1 \in A_1$ és $a_2 \in A_2$.

$\prod_{i \in \{1,2\}} A_i$ egy eleme olyan $a : \{1, 2\} \rightarrow A_1 \cup A_2$, melyre $a(1) \in A_1$ és $a(2) \in A_2$. Vagyis $a = \{(1, a(1)), (2, a(2))\} = \{\{1\}, \{1, a(1)\}\}, \{\{2\}, \{2, a(2)\}\}$.

Reláció

Definíció

Ha $R \subset X \times Y$, akkor azt mondjuk, hogy R egy **reláció** X és Y között.

- ▶ Ha $x \in X$, akkor **R általi képének** nevezzük az $R(x) = \{y \in Y \mid (x, y) \in R\}$ halmazt.
- ▶ Ha $A \subset X$, akkor **R általi képének** nevezzük az $R[A] = \bigcup_{x \in A} R(x)$ halmazt.
- ▶ Az R reláció **értelmezési tartományának** nevezzük a $\text{Dom } R = \{x \in X \mid R(x) \neq \emptyset\}$ halmazt.
- ▶ Az R reláció **értékkészletének** nevezzük a $\text{Ran } R = \{y \in Y \mid \exists x \in X : y \in R(x)\}$ halmazt.
- ▶ Az R reláció A **halmazra vett megszorításának** nevezzük az $R|_A = R \cap (A \times Y)$ halmazt.

Tétel

$$\text{Dom } R|_A = A \cap \text{Dom } R \quad \text{és} \quad \text{Ran } R|_A = R[A], \text{ ha } A \subset X.$$

Definíció

Ha $R \subset X \times Y$ egy reláció X és Y között, akkor az **inverzének** nevezzük az

$$R^{-1} = \{(y, x) \in Y \times X \mid (x, y) \in R\} \subset Y \times X$$

Y és X közötti relációt.

Tétel (Az inverzképzés involutív és monoton.)

Ha $R \subset S \subset X \times Y$ relációk X és Y között, akkor

$$(R^{-1})^{-1} = R \quad \text{és} \quad R^{-1} \subset S^{-1}$$

Megjegyzés

Az $R \subset X \times Y$ relációt meghatározzák X elemeinek képei.

$$R = \bigcup_{x \in X} (\{x\} \times R(x))$$

Definíció

Az $S \subset X \times Y$ és $R \subset Y \times Z$ relációk **kompozíciójának** nevezzük azt az $R \circ S \subset X \times Z$ relációt, melyre minden $x \in X$ esetén

$$(R \circ S)(x) = R[S(x)].$$

Tétel

Ha $T \subset W \times X$, $S \subset X \times Y$ és $R \subset Y \times Z$, akkor

$$(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}, \quad \text{és} \quad R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T.$$

Definíció

Ha $R \subset X^2$, akkor azt mondjuk, hogy R egy **reláció** X -en.

A $\Delta_X = \{(x, x) \in X^2 \mid x \in X\}$ relációt **identikus reláció**nak nevezzük.

Az X^2 relációt **univerzális reláció**nak nevezzük.

Megjegyzés

Ilyenkor

$$R^2 = R \circ R \subset X^2.$$

Továbbá,

$$R^{-1} \subset X^2.$$

Bevezethetjük az

$$R^1 = R \subset X^2$$

és az

$$R^0 = \Delta_X \subset X^2$$

jelölést, mivel $\Delta_X \circ R = R$.

Ekvivalencia

Definíció

Azt mondjuk, hogy $R \subset X^2$ reláció **ekvivalenciareláció**, ha

- ▶ **reflexív**, vagyis $R^0 = \Delta_X \subset R$, azaz $\forall x \in X : (x, x) \in R$,
- ▶ **szimmetrikus**, vagyis $R^{-1} \subset R$, azaz $\forall (x, y) \in R : (y, x) \in R$, és
- ▶ **transzítív**, vagyis $R^2 \subset R$, azaz $\forall (x, y), (y, z) \in R : (x, z) \in R$.

Tétel

Ha $R \subset X^2$ reláció az X -en, akkor

1. R reflexív $\implies R \subset R^2$.
2. R szimmetrikus $\iff R^{-1}$ szimmetrikus $\iff R = R^{-1}$.
3. R ekvivalencia $\iff R^{-1}$ ekvivalencia $\implies R = R^2$.

Megjegyzés

Azt mondjuk, hogy az $R \subset X \times Y$ reláció **totális**, ha $\text{Dom } R = X$, azaz $\forall x \in X : \exists y \in Y : (x, y) \in R$.

Osztályozás

Definíció

Az $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ halmazrendszert az X **osztályozásának** nevezzük, ha $\mathcal{A}$ elemei páronként diszjunktak, $\emptyset \notin \mathcal{A}$ és $\bigcup \mathcal{A} = X$.

Megjegyzés

$\mathcal{A}$ elemei páronként diszjunktak, azt jelenti, hogy

$$\forall A, B \in \mathcal{A} : A \neq B \implies A \cap B = \emptyset.$$

Tétel

Ha R ekvivalenciareláció X -en, akkor $\mathcal{A} = \{R(x) | x \in X\}$ egy osztályozása X -nek.

Ha $\mathcal{A}$ egy osztályozása X -nek, akkor $\forall x \in X : \exists ! A_x \in \mathcal{A} : x \in A_x$. Legyen az R reláció olyan, hogy minden $x \in X$ esetén $R(x) = A_x$. Ekkor R egy ekvivalenciareláció X -en.

Definíció

Azt mondjuk, hogy $R \subset X^2$ reláció **parciális rendezés**, ha

- ▶ reflexív,
- ▶ **antiszimmetrikus**, vagyis $R^{-1} \cap R \subset \Delta_X$, azaz $\forall (x, y), (y, x) \in R : x = y$, és
- ▶ tranzitív.

Ha $\leq$ egy parciális rendezés az X halmazon, akkor az $(X, \leq)$ párt **parciálisan rendezett halmaznak** nevezzük.

Ha egyértelmű, mi a parciális rendezés, akkor az X halmazt is szoktuk parciálisan rendezett halmaznak nevezni. Rövid elnevezés **poset**.

Definíció

Legyen $(X, \leq)$ parciálisan rendezett halmaz, és $A \subset X$. Azt mondjuk, hogy

- ▶ $k \in X$ **felső korlátja** A -nak, ha $\forall a \in A : a \leq k$.
- ▶ $k \in X$ **alsó korlátja** A -nak, ha $\forall a \in A : a \geq k$.
- ▶ $k \in A$ **maximuma** A -nak, ha $\forall a \in A : a \leq k$.
- ▶ $k \in A$ **minimuma** A -nak, ha $\forall a \in A : a \geq k$.

A -t **felülről (alulról) korlátosnak** nevezzük, ha létezik felső (alsó) korlátja.

A -t **korlátosnak** nevezzük, ha alulról és felülről is korlátos.

Az A felső (alsó) korlátjainak minimumát (maximumát) az A halmaz **pontos felső (alsó) korlátjának** nevezzük, ha létezik.

Az A halmaz maximumára és minimumára illetve pontos felső és alsó korlátjára a következő jelöléseket vezetjük be.

$$\max A, \quad \min A, \quad \sup A, \quad \inf A$$

Tétel

A maximum, minimum, pontos felső és alsó korlát egyértelmű, ha létezik.

Rendezés (lineáris rendezés)

Definíció

Azt mondjuk, hogy $R \subset X^2$ reláció **lineáris rendezés** (röviden **rendezés**), ha

- ▶ reflexív,
- ▶ antiszimmetrikus,
- ▶ tranzitív és
- ▶ **dichotóm**, vagyis $X^2 \subset R \cup R^{-1}$, azaz $\forall x, y \in X : (x, y) \in R \vee (y, x) \in R$.

Ha $\leq$ egy rendezés az X halmazon, akkor az $(X, \leq)$ párt **rendezett halmaznak** nevezzük.

Tétel

Ha $R \subset X^2$ reláció az X -en, akkor

$$R \text{ (parc.) rendezés} \iff R^{-1} \text{ (parc.) rendezés} \implies R^2 \text{ (parc.) rendezés.}$$

Definíció

Azt mondjuk, hogy $R \subset X^2$ parciális rendezés **jólrendezés**, ha X minden nem üres A részhalmazának van minimuma. Ha $\leq$ egy jólrendezés az X halmazon, akkor az $(X, \leq)$ párt **jólrendezett halmaznak** nevezzük.

Tétel

Ha $\leq$ jólrendezés X -en, akkor lineáris rendezés is.

Definíció

Az $f \subset X \times Y$ X és Y közötti relációt **függvénynek** nevezzük, ha

$$(x, y), (x, z) \in f \implies y = z.$$

Ha még $\text{Dom}_f = X$, akkor az **X -et Y -ba képező függvény** elnevezést használjuk f -re, és ezt így jelöljük

$$f : X \rightarrow Y.$$

$(x, y) \in f$, $y \in f(x)$ vagy $\{y\} = f(x)$ helyett szokásosan az $y = f(x)$ jelölést használjuk.

Definíció

Legyen X egy tetszőleges halmaz és $(Y, \leq)$ egy parciálisan rendezett halmaz. Azt mondjuk, hogy az $f : X \rightarrow Y$ függvény **alulról korlátos**, **felülről korlátos**, illetve **korlátos**, ha értékkészlete rendre alulról korlátos, felülről korlátos, illetve korlátos. (26)

Az f **szuprémumának** illetve **infimumának** és ha létezik **maximumának** illetve **minimumának** hívjuk rendre az értékkészlet szuprémumát illetve infimumát és maximumát illetve minimumát.

Definíció

Legyen $(X, \leq_X)$ és $(Y, \leq_Y)$ parciálisan rendezett halmaz. Azt mondjuk, hogy az $f : X \rightarrow Y$ függvény **monoton növő**, illetve **monoton csökkenő** ha $x \leq_X y$ esetén $f(x) \leq_Y f(y)$ illetve $f(y) \leq_Y f(x)$.

A fenti f függvényt **monoton**nak nevezzük, ha monoton növő vagy monoton csökkenő.

Legyen továbbá $<_X = \leq_X \setminus \Delta_X$ és $<_Y = \leq_Y \setminus \Delta_Y$. Azt mondjuk, hogy az $f : X \rightarrow Y$ függvény **szigorúan monoton növő**, illetve **szigorúan monoton csökkenő** ha $x <_X y$ esetén $f(x) <_Y f(y)$ illetve $f(y) <_Y f(x)$.

A fenti f függvényt **szigorúan monoton**nak nevezzük, ha szigorúan monoton növő vagy szigorúan monoton csökkenő.

Definíció

Azt mondjuk, hogy az $f : X \rightarrow Y$ függvény

- ▶ **injektív** vagy **invertálható**, ha inverze is függvény.
- ▶ **szürjektív**, ha $\text{Ran}_f = Y$.
- ▶ **bijektív**, ha injektív és szürjektív.

Megjegyzés

$f : X \rightarrow Y$ injektív / szürjektív / bijektív ha minden $y \in Y$ esetén létezik legfeljebb egy / legalább egy / pontosan egy $x \in X$, amire $y = f(x)$.

Ha $f : X \rightarrow Y$ bijekció, akkor inverze $f^{-1} : Y \rightarrow X$ is bijekció.

Tétel

Ha $g : X \rightarrow Y$ és $f : Y \rightarrow Z$ függvények, akkor $f \circ g : X \rightarrow Z$ is függvény. (f **külső** és g **belső** függvényekből álló **összetett függvénynek** nevezzük.)

Ha f és g injekció / szürjekció / bijekció, akkor $f \circ g$ is injekció / szürjekció / bijekció.

Tétel

Ha $f \subset X \times Y$ és $g \subset Y \times X$, akkor a következő állítások ekvivalensek:

- 1. $f : X \rightarrow Y$ bijektív függvény, $g : Y \rightarrow X$ bijektív függvény úgy, hogy $f = g^{-1}$;*
- 2. $f \circ g = \Delta_Y$ és $g \circ f = \Delta_X$.*

Axióma (Peano-axiómák)

Legyen $\mathbb{N}_0$ egy halmaz, $0 \in \mathbb{N}_0$ és $s : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ melyekre

- ▶ s injektív,
- ▶ $0 \notin s[\mathbb{N}_0]$,
- ▶ $\forall P \subset \mathbb{N}_0 : (s[P] \cup \{0\} \subset P) \implies \mathbb{N}_0 = P$.

Az utolsó axióma miatt használhatjuk a rekurzív definíciót és a teljes-indukciós bizonyítást.

Definíció (Összeadás, szorzás, rendezés)

Tetszőleges $a, b \in \mathbb{N}_0$ esetén $a + 0 = a$ és ha már definiáltuk az $a + b$ összeget, akkor $a + s(b) = s(a + b)$.

Tetszőleges $a, b \in \mathbb{N}_0$ esetén $a \cdot 0 = 0$ és ha már definiáltuk az $a \cdot b$ szorzatot, akkor $a \cdot s(b) = a \cdot b + a$.

Tetszőleges $a, b \in \mathbb{N}_0$ esetén $a \leq b$ jelentse azt, hogy létezik $n \in \mathbb{N}_0 : a + n = b$.

Tétel

Az összeadás és szorzás asszociatív, kommutatív, neutrális elem létezik, de inverze csak a neutrális elemnek van. Cancelatívák, kivéve a nullával való szorzás. Nullosztómentes, a szorzás disztributív az összeadásra.

$\leq$ jólrendezés, $+$, $\cdot$ monoton, sőt szigorúan monoton, kivéve a nullával való szorzás.

Tétel

A Peano-axiómáknak csak egy modelljük lehet, abban az értelemben, hogy bármely két modell izomorf.

Definíció (Neumann-modell)

Jelölje 0 az üres halmazt, és ha már definiáltuk n -et, akkor legyen $s(n) = n \cup \{n\}$.

Definíció (Egész számok)

A $\mathbb{N}_0^2$ halmazon értelmezzünk egy ekvivalencia relációt:

$(a, b) \sim (c, d)$ ha $a + d = b + c$. Nevezzük egész számoknak az indukált osztályokat. Jele $\mathbb{Z}$.

A műveleteket és a rendezést reprezentáns elemeken végezzük.

Az $(a, b), (c, d)$ elemeket tartalmazó osztályok összege legyen az, melynek eleme

$(a +_{\mathbb{N}_0} c, b +_{\mathbb{N}_0} d)$.

Az $(a, b), (c, d)$ elemeket tartalmazó osztályok szorzata legyen az, melynek eleme

$(a \cdot_{\mathbb{N}_0} c + b \cdot_{\mathbb{N}_0} d, a \cdot_{\mathbb{N}_0} d + b \cdot_{\mathbb{N}_0} c)$.

Az (a, b) elemet tartalmazó osztály legyen $\leq$ mint a (c, d) elemet tartalmazó osztály, ha

$a +_{\mathbb{N}_0} d \leq_{\mathbb{N}_0} b +_{\mathbb{N}_0} c$.

Megjegyzés

A definíció korrekt, azaz $\sim$ valóban ekvivalencia reláció és a műveletek illetve a rendezés nem függ a reprezentáns elemek választásától.

Tétel

$(\mathbb{Z}, +, \cdot, \leq)$ rendezett integritástartomány.

$(\mathbb{N}_0, +, \cdot, \leq)$ izomorf a $(\mathbb{Z}, +, \cdot, \leq)$ egy részhalmazával.

Definíció (Racionális számok)

A $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^+$ halmazon értelmezzünk egy ekvivalencia relációt:

$(a, b) \sim (c, d)$ ha $ad = bc$. Nevezzük racionális számoknak az indukált osztályokat. Jele $\mathbb{Q}$.

A műveleteket és a rendezést reprezentáns elemeken végezzük.

(a, b) és (c, d) elemeket tartalmazó osztályok összege legyen az, melynek eleme

$(a \cdot_{\mathbb{Z}} d +_{\mathbb{Z}} b \cdot_{\mathbb{Z}} c, b \cdot_{\mathbb{Z}} d)$.

(a, b) és (c, d) elemeket tartalmazó osztályok szorzata legyen az, melynek eleme $(a \cdot_{\mathbb{Z}} c, b \cdot_{\mathbb{Z}} d)$.

Az (a, b) elemet tartalmazó osztály legyen $\leq$ mint a (c, d) elemet tartalmazó osztály, ha

$a \cdot_{\mathbb{Z}} d \leq_{\mathbb{Z}} b \cdot_{\mathbb{Z}} c$.

Megjegyzés

A definíció korrekt, azaz $\sim$ valóban ekvivalencia reláció és a műveletek illetve a rendezés nem függ a reprezentáns elemek választásától.

Tétel

$(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ Archimédészien rendezett test.

$(\mathbb{Z}, +, \cdot, \leq)$ izomorf a $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ egy részhalmazával.

Következmény (Hatványra vonatkozó Archimédészi-tulajdonság)

Ha $p, q \in \mathbb{Q}$ úgy, hogy $p >_{\mathbb{Q}} 1_{\mathbb{Q}}$, akkor $\exists n \in \mathbb{Z}^+ : p^n \geq_{\mathbb{Z}} q$.

$(\mathbb{N}_0, +, \cdot, \leq)$ izomorf a $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ egy részhalmazával.

Definíció

Legyen $(X, \leq)$ parciálisan rendezett halmaz.

X **kezdőszeletének** nevezzük az $A \subset X$ részhalmazt, ha $\forall (x, a) \in (X \times A) \cap \leq: x \in A$.

Szokásos még a **leszálló részhalmaz** elnevezés is.

X **végzőszeletének** nevezzük az $A \subset X$ részhalmazt, ha $\forall (a, x) \in (A \times X) \cap \leq: x \in A$.

Szokásos még a **felszálló részhalmaz** elnevezés is.

Ha egy kezdőszeletnek van maximuma, akkor **maximumos kezdőszeletnek** nevezzük, ha nincs, akkor **maximum nélküli kezdőszeletnek**.

Ha egy végzőszeletnek van minimuma, akkor **minimumos végzőszeletnek** nevezzük, ha nincs, akkor **minimum nélküli végzőszeletnek**.

Szükségünk lesz tetszőleges A **kezdőszelet lefejezésére**, ami alatt a

$$\delta(A) = \{a \in A \mid \exists b \in A \setminus \{a\} : a \leq b\}$$
 halmazt értjük.

Hasonlóan értelmezhetnénk az A **végzőszelet lefejezését**:

$$\delta(A) = \{a \in A \mid \exists b \in A \setminus \{a\} : b \leq a\}.$$

Tétel

Ha az X -en adott $\leq$ parciális rendezés inverze $\geq$, akkor $A \subset X$ pontosan akkor (maximumos/maximum nélküli) kezdőszelet $(X, \geq)$ -ben, ha (minimumos/minimum nélküli) végzszelet $(X, \leq)$ -ben.

Kezdőszelet komplementere végzszelet. Végzszelet komplementere kezdőszelet.

Megjegyzés

$X = \mathbb{Q}$ esetén $p \geq q \iff -p \leq -q$, így ha A kezdőszelet, akkor $\overline{-A}$ is az.

Ha A -nak van maximuma, akkor $\overline{-A}$ -nak nincs, viszont attól hogy A -nak nincs maximuma, még nem biztos, hogy $\overline{-A}$ -nak van. De mivel lehet, ezért szükségünk lesz arra is, hogy ha A kezdőszelet, akkor $\delta(\overline{-A})$ maximum nélküli kezdőszelet.

Definíció (Valós számok)

Az $A \subset \mathbb{Q}$ maximum nélküli kezdőszeletet **Dedekind-szelet**nek nevezzük, ha $A \notin \{\emptyset, \mathbb{Q}\}$.

Nevezzük **valós számoknak** a most definiált Dedekind-szeleteket.

A műveleteket és a rendezést a valós számok elemeire vezetjük vissza, amik racionális számok.

$$x +_{\mathbb{R}} y = \{p +_{\mathbb{Q}} q \mid (p, q) \in x \times y\}.$$

$$x \leq_{\mathbb{R}} y \iff x \subset y.$$

$$\text{Legyen } 0_{\mathbb{R}} = \{q \in \mathbb{Q} \mid q <_{\mathbb{Q}} 0_{\mathbb{Q}}\}.$$

Nevezzük **pozitív**nak az $x \in \mathbb{R}$ számot ha $0_{\mathbb{Q}} \in x$, azaz $0_{\mathbb{R}} \subsetneq x$.

Végül nevezzük **negatív**nak az $x \in \mathbb{R}$ számot ha nem pozitív és nem is $0_{\mathbb{R}}$, azaz $x \subsetneq 0_{\mathbb{R}}$.

Megjegyzés

A definíció korrekt, azaz ha $x, y \in \mathbb{R}$, akkor $x +_{\mathbb{R}} y \in \mathbb{R}$, és a pozitív, negatív, $0_{\mathbb{R}}$ egy osztályozás.

Tétel

$(\mathbb{R}, +, \leq)$ *rendezett kommutatív csoport.*

Definíció

Ha $x, y \in \mathbb{R}$ úgy,

hogy egyik sem negatív, akkor $x \cdot_{\mathbb{R}} y = \{p \cdot_{\mathbb{Q}} q \mid p \in x \setminus 0_{\mathbb{R}}, q \in y \setminus 0_{\mathbb{R}}\} \cup 0_{\mathbb{R}}$.

Ha $x, y \in \mathbb{R}$ mindkettő negatív, akkor legyen $x \cdot_{\mathbb{R}} y = \delta(-x) \cdot_{\mathbb{R}} \delta(-y)$.

Ha pedig $x, y \in \mathbb{R}$ úgy, hogy x negatív, de y nem, akkor legyen $x \cdot_{\mathbb{R}} y = \delta(-(\delta(-x) \cdot_{\mathbb{R}} y))$.

Illetve, ha $x, y \in \mathbb{R}$ úgy, hogy y negatív, de x nem, akkor legyen $x \cdot_{\mathbb{R}} y = \delta(-(x \cdot_{\mathbb{R}} \delta(-y)))$.

Megjegyzés

A definíció korrekt, azaz ha $x, y \in \mathbb{R}$, akkor $x \cdot_{\mathbb{R}} y \in \mathbb{R}$.

Tétel

$(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ teljes rendezett test. Sőt, izomorfia erejéig az egyetlen.

Definíció (Komplex számok)

Legyen $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, elemeit nevezzük **komplex számoknak**.

$$(a, b) +_{\mathbb{C}} (c, d) = (a +_{\mathbb{R}} c, b +_{\mathbb{R}} d).$$

$$(a, b) \cdot_{\mathbb{C}} (c, d) = (a \cdot_{\mathbb{R}} c -_{\mathbb{R}} b \cdot_{\mathbb{R}} d, a \cdot_{\mathbb{R}} d +_{\mathbb{R}} b \cdot_{\mathbb{R}} c).$$

Tétel

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *algebrailag teljes test.*

Metrikusan is teljes, abban az értelemben, hogy minden Cauchy-sorozat konvergens.

Nincs olyan reláció, mellyel rendezett test lenne.

Számosság

Definíció

Azt mondjuk, hogy A és B halmazok **azonos számosságúak**, ha létezik $f : A \rightarrow B$ bijekció. Ezt így jelöljük: $A \sim B$ vagy $|A| = |B|$.

Tétel

Legyenek A , B és C halmazok. Ekkor

1. $A \sim A$ (mintha reflexív lenne)
2. ha $A \sim B$, akkor $B \sim A$ (mintha szimmetrikus lenne)
3. ha $A \sim B$ és $B \sim C$, akkor $A \sim C$ (mintha tranzitív lenne)

Megjegyzés

Ha X egy halmaz, akkor $\sim$ egy reláció, és így ekvivalenciareláció $\mathcal{P}(X)$ -en.

Definíció

Azt mondjuk, hogy az A halmaz **számossága kisebb vagy egyenlő** mint a B halmazé, ha létezik $f : A \rightarrow B$ injekció.

Ezt így jelöljük: $A \preceq B$ vagy $|A| \leq |B|$ vagy $B \succeq A$ vagy $|B| \geq |A|$.

Azt mondjuk, hogy az A halmaz **számossága kisebb** mint a B halmazé, ha $A \preceq B$ teljesül, de $A \sim B$ nem.

Ezt így jelöljük: $A \prec B$ vagy $|A| < |B|$ vagy $B \succ A$ vagy $|B| > |A|$.

Tétel

Ha A és B halmazok úgy, hogy $A \neq \emptyset$, akkor a következő állítások ekvivalensek:

1. $A \preceq B$;
2. $\exists g : B \rightarrow A$ szürjekció;
3. $\exists C \subset B : A \sim C$.

Megkonstruálhatóak a számosságok, de mi nem konstruáljuk meg ezeket.

Tétel (Cantor-tétel)

Ha A egy tetszőleges halmaz, akkor $A \prec \mathcal{P}(A)$.

Következmény

Nincs legnagyobb számosság.

Tétel

Nincs olyan halmaz, aminek minden számosság eleme.

Tétel (Tarski-féle fixponttétel)

*Egy X halmaz esetén egy $\varphi : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ monoton függvénynek van fixpontja.
($\varphi : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ monotonitása azt jelenti, hogy ha $A \subset B \subset X$, akkor $\varphi(A) \subset \varphi(B)$.
Fixpont olyan $A \subset X$ halmazt jelent, amire $\varphi(A) = A$.)*

Tétel

Ha α, β, γ számosságok, akkor

- 1. $\alpha \leq \alpha$ (mintha reflexív lenne);*
- 2. $\alpha \leq \beta$ és $\beta \leq \alpha$ esetén $\alpha = \beta$ (mintha antiszimmetrikus lenne);*
- 3. $\alpha \leq \beta$ és $\beta \leq \gamma$ esetén $\alpha \leq \gamma$ (mintha tranzitív lenne);*
- 4. $\alpha \leq \beta$ vagy $\beta \leq \alpha$; (mintha dichotóm lenne).*

Megjegyzés

Számosságok tetszőleges, nem üres családjában van legkisebb.

Következmény

Ha X egy halmaz, akkor $\leq$ egy (lineáris) rendezés, sőt jólrendezés az $\mathcal{A} = \{|A| \mid A \subset X\}$ halmazon.

Definíció

α és β számosságok összege alatt olyan A és B diszjunkt halmazok uniójának számosságát értjük, melyekre $|A| = \alpha$ és $|B| = \beta$.

Megjegyzés

Több számosság (akár halmaznyi számosság) összegét hasonlóan definiálhatjuk.

Tétel

A számosságok közötti összeadás mintha binér művelet lenne, és rendelkezik a binér műveleteknél megszokott alábbi tulajdonságokkal:

- ▶ $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ mintha asszociatív lenne;
- ▶ $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ mintha kommutatív lenne;
- ▶ $|\emptyset| = 0$ mintha neutrális elem (nullelem) lenne;
- ▶ additív inverze csak a 0-nak van.

Tétel

Ha α és β véges számosság, akkor $\alpha + \beta$ a számoknál megszokott összeadás.

Ha α és β számosságok közül az egyik végtelen, akkor $\alpha + \beta = \max\{\alpha, \beta\}$.

Megjegyzés

A természetes számoknál látott kiterjesztés sem működne. $\alpha, \gamma, \aleph_0 \leq \beta$ esetén $(\alpha, \beta) \sim (\gamma, \beta)$ nem jelentené azt, hogy $\alpha = \gamma$.

Definíció

α és β számosságok szorzata alatt olyan A és B szorzatának számosságát értjük, melyekre $|A| = \alpha$ és $|B| = \beta$.

Megjegyzés

Több számosság (akár halmaznyi számosság) szorzatát hasonlóan definiálhatjuk.

Tétel

A számosságok közötti szorzás mintha binér művelet lenne, és rendelkezik a binér műveleteknél megszokott alábbi tulajdonságokkal:

- ▶ $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$ mintha asszociatív lenne;
- ▶ $\alpha\beta = \beta\alpha$ mintha kommutatív lenne;
- ▶ $|\{\emptyset\}| = 1$ mintha neutrális elem (egységelem) lenne;
- ▶ multiplikatív inverze csak az 1-nek van.

Tétel

Ha α és β véges számosság, akkor $\alpha\beta$ a számoknál megszokott szorzás.

Most is igaz, hogy szorzat pontosan akkor 0, ha valamelyik tényezője 0. Sőt többtényezős szorzatra is.

Ha α és β számosságok közül az egyik végtelen, és egyik sem 0, akkor $\alpha\beta = \max\{\alpha, \beta\}$.

Megjegyzés

Az egész számoknál látott kiterjesztés sem működne. $\alpha, \gamma, \aleph_0 \leq \beta$ esetén $(\alpha, \beta) \sim (\gamma, \beta)$ nem jelentené azt, hogy $\alpha = \gamma$.

Hatványozás

Definíció

α és β számosságok α^β hatványa alatt $f : B \rightarrow A$ függvények számosságát értjük, melyekre $|A| = \alpha$ és $|B| = \beta$.

Tétel

A számosságok közötti hatványozás mintha binér művelet lenne, és teljesülnek rá a hatványozás azonosságai:

- ▶ $\gamma^{\alpha+\beta} = \gamma^\alpha \gamma^\beta$;
- ▶ $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\gamma}$;
- ▶ $\alpha^\gamma \beta^\gamma = (\alpha\beta)^\gamma$.

Ha α és β véges számosság, akkor α^β a számoknál megszokott hatványozás.

Most is igaz minden α számosságra, hogy $\alpha^0 = 1^\alpha = 1$. Ha $\alpha > 0$, akkor $0^\alpha = 0$.

Definíció

Ha $D \subset \mathbb{R}$, akkor $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ függvények sorozatát **függvénysorozatnak** nevezzük. Ezt $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ módon jelöljük, vagy röviden így: f_n .

Ha minden $x \in A$ esetén $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \rightarrow F(x)$, akkor azt mondjuk, hogy az f_n függvénysorozat **(pontonként) konvergál** az F függvényhez A -n.

Az f_n függvénysorozat **konvergenciahalmazának** nevezzük, a

$$KH = \{x \mid \text{létezik } \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \in \mathbb{R}\}$$

halmazt. Továbbá, a függvénysorozat **határfüggvényének** nevezzük azt az $F : KH \rightarrow \mathbb{R}$, függvényt melyre minden $x \in KH$ esetén

$$F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Definíció

Ha $D \subset \mathbb{C}$, akkor $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$ függvények sorozatát **függvénysorozatnak** nevezzük. Ezt $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ módon jelöljük, vagy röviden így: f_n .

Ha minden $x \in A$ esetén $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \rightarrow F(x)$, akkor azt mondjuk, hogy az f_n függvénysorozat **(pontonként) konvergál** az F függvényhez A -n.

Az f_n függvénysorozat **konvergenciahalmazának** nevezzük, a

$$KH = \{x \mid \text{létezik } \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \in \mathbb{C}\}$$

halmazt. Továbbá, a függvénysorozat **határfüggvényének** nevezzük azt az $F : KH \rightarrow \mathbb{C}$, függvényt melyre minden $x \in KH$ esetén

$$F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

$$f_n(x) = (1 + x/n)^n$$

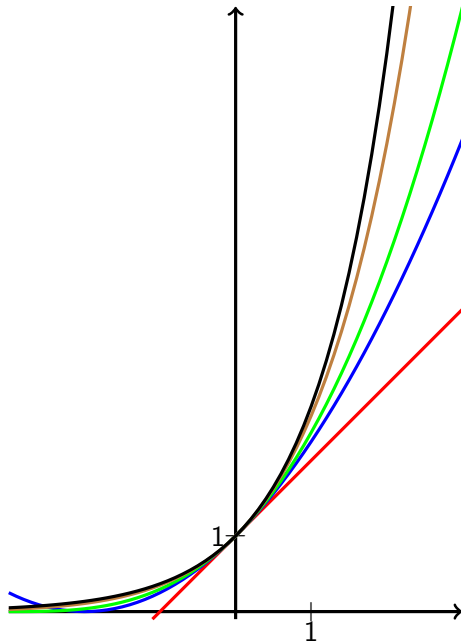
$$f_1(x) = 1 + x$$

$$f_2(x) = (1 + x/2)^2$$

$$f_3(x) = (1 + x/3)^3$$

$$f_{10}(x) = (1 + x/10)^{10}$$

$$F(x) = e^x$$



$$f_n(x) = x^n, \quad \text{Dom}_{f_n} = [0, 1]$$

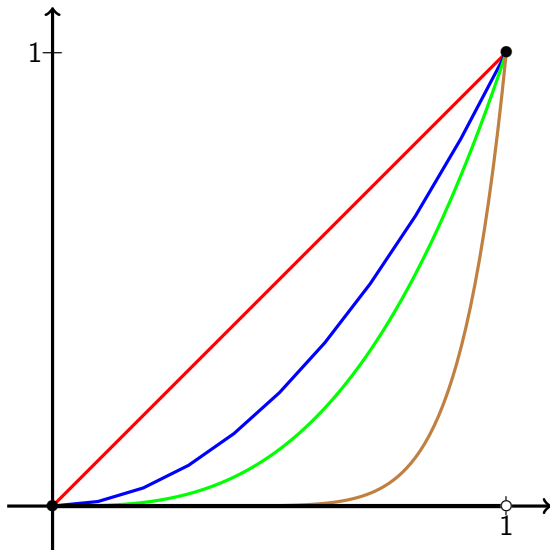
$$f_1(x) = x$$

$$f_2(x) = x^2$$

$$f_3(x) = x^3$$

$$f_{10}(x) = x^{10}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \in [0, 1[\\ 1, & \text{ha } x = 1 \end{cases}$$



$$f_n(x) = \begin{cases} n \sin(nx), & \text{ha } x \leq \frac{\pi}{n} \\ 0, & \text{ha } \frac{\pi}{n} < x \end{cases}$$

$$\text{Dom}_{f_n} = [0, \pi]$$

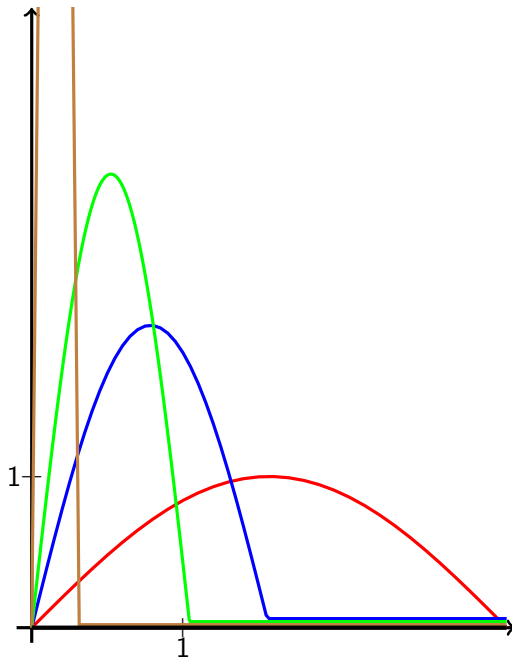
$$f_1(x) = \sin x$$

$$f_2(x) = 2 \sin 2x$$

$$f_3(x) = 3 \sin 3x$$

$$f_{10}(x) = 10 \sin 10x$$

$$F(x) = 0$$



$f_n \rightarrow F$ A -n (pontonként), azt jelenti, hogy

$$\forall x \in A : \forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{R} : N < n \in \mathbb{N}^+ \implies |f_n(x) - F(x)| < \varepsilon.$$

Definíció

Azt mondjuk, hogy az f_n függvénysorozat **egyenletesen konvergál** az $F(x)$ függvényhez A -n, ha

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{R} : \forall x \in A : N < n \in \mathbb{N}^+ \implies |f_n(x) - F(x)| < \varepsilon.$$

Tétel (Határfüggvény folytonossága)

Ha f_n folytonos A -n minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén, és $f_n \rightarrow F$ egyenletesen A -n, akkor F folytonos A -n.

Megjegyzés

A tétel feltételei mellett, tehát a két határérték felcserélhető.

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right)$$

Tétel (Határfüggvény integrálja)

Ha f_n Riemann-integrálható $[a, b]$ -n minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén, és $f_n \rightarrow F$ egyenletesen $[a, b]$ -n, akkor F Riemann-integrálható $[a, b]$ -n, és

$$\int_a^b F = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n.$$

Megjegyzés

A tétel feltételei mellett, tehát a határérték és az integrál felcserélhető.

$$\int_a^b \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_a^b f_n(x) dx \right)$$

Tétel (Határfüggvény deriváltja)

Ha f_n folytonosan deriválható $[a, b]$ -n minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén, és $\lim f'_n = G$ egyenletesen $[a, b]$ -n, és $f_n(a)$ konvergens, akkor f_n egyenletesen konvergens $[a, b]$ -n, F határfüggvénye deriválható, és

$$F' = G.$$

Megjegyzés

A tétel feltételei mellett, tehát a határérték és a deriválás felcserélhető.

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right)' = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n$$

Az $f_n(a)$ konvergenciája helyett elég feltenni, hogy $f_n(x)$ konvergens valamely rögzített $x \in [a, b]$ esetén.

Tétel (Határfüggvény primitív függvénye)

Ha f_n folytonos $[a, b]$ -n, és F_n a f_n a-ban eltűnő primitív függvénye minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén, és f_n egyenletesen konvergens $[a, b]$ -n, akkor F_n egyenletesen konvergens $[a, b]$ -n, és $\lim F_n$ a $\lim f_n$ a-ban eltűnő primitív függvénye.

Megjegyzés

A tétel feltételei mellett, tehát a határérték és az integrál felcserélhető. Vigyázni kell az additív konstansra.

Definíció

Ha $D \subset \mathbb{R}$, és $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ függvények sorozata, akkor

$$s_k = \sum_{n=1}^k f_n$$

függvénysorozatot az f_n függvényekből álló **függvénysornak** nevezzük, és $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, vagy röviden $\sum f_n$ módon jelöljük.

Ha minden $x \in A$ esetén $\sum f_n(x) = F(x)$, akkor azt mondjuk, hogy az f_n függvény sor **(pontonként) konvergál** az F függvényhez A -n.

Az f_n függvény sor **konvergenciahalmazának** nevezzük, a

$$KH = \left\{ x \mid \text{létezik } \sum f_n(x) \in \mathbb{R} \right\}$$

halmazt. Továbbá, a függvény sor **összegfüggvényének** nevezzük azt az $F : KH \rightarrow \mathbb{R}$, függvényt melyre minden $x \in KH$ esetén

$$F(x) = \sum f_n(x).$$

Definíció

Ha $D \subset \mathbb{C}$, és $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$ függvények sorozata, akkor

$$s_k = \sum_{n=1}^k f_n$$

függvénysorozatot az f_n függvényekből álló **függvénysornak** nevezzük, és $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, vagy röviden $\sum f_n$ módon jelöljük.

Ha minden $x \in A$ esetén $\sum f_n(x) = F(x)$, akkor azt mondjuk, hogy az f_n függvénysor **(pontonként) konvergál** az F függvényhez A -n.

Az f_n függvénysor **konvergenciahalmazának** nevezzük, a

$$KH = \left\{ x \mid \text{létezik } \sum f_n(x) \in \mathbb{C} \right\}$$

halmazt. Továbbá, a függvénysor **összegfüggvényének** nevezzük azt az $F : KH \rightarrow \mathbb{C}$, függvényt melyre minden $x \in KH$ esetén

$$F(x) = \sum f_n(x).$$

$$f_n(x) = x^n$$

$$s_1(x) = f_1(x) = x$$

$$s_2(x) = f_1(x) + f_2(x) =$$

$$s_1(x) + f_2(x) = x + x^2$$

$$s_3(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) =$$

$$s_2(x) + f_3(x) = x + x^2 + x^3$$

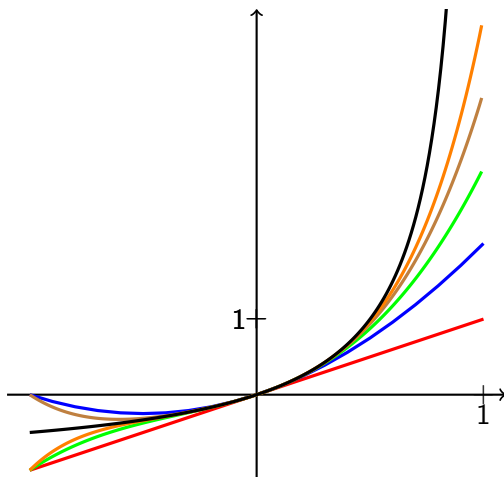
$$s_4(x) = \sum_{k=1}^4 f_k(x) =$$

$$s_3(x) + f_4(x) = \sum_{k=1}^4 x^k$$

$$s_5(x) = \sum_{k=1}^5 f_k(x) =$$

$$s_4(x) + f_5(x) = \sum_{k=1}^5 x^k$$

$$S(x) = \frac{x}{1-x}$$



Definíció

Azt mondjuk, hogy a $\sum f_n$ függvény-sor **egyenletesen konvergál** az $F(x)$ összegfüggvényhez A -n, ha

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{R} : \forall x \in A : N < k \in \mathbb{N}^+ \implies \left| \sum_{n=1}^k f_n(x) - F(x) \right| < \varepsilon.$$

A $\sum f_n$ függvény-sor **abszolút konvergens** A -n, ha a $\sum f_n(x)$ numerikus sor abszolút konvergens, azaz $\sum |f_n(x)|$ konvergens minden $x \in A$ esetén.

Megjegyzés

$\sum f_n = F$ pontonként (egyenletesen) pontosan akkor, ha az $s_k = \sum_{n=1}^k f_n(x)$ függvényt-sorozatra

$s_k \rightarrow F$ pontonként (egyenletesen).

Az egyenletes konvergenciából következik a pontonkénti. (Fordítva nem.)

Az abszolút konvergenciából következik a konvergencia. (Fordítva nem.)

Tétel (Cauchy-kritérium függvényysorokra)

A $\sum f_n$ függvényysor pontosan akkor egyenletesen konvergens A-n, ha itt eleget tesz a Cauchy-kritériumnak, azaz

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{R} : \forall x \in A : n > k > N : |f_{k+1}(x) + \cdots + f_n(x)| < \varepsilon.$$

Tétel (Weierstrass-kritérium)

Ha a $\sum b_n$ numerikus sor konvergens, és $|f_n(x)| \leq b_n$ minden $n \in \mathbb{N}^+$ és $x \in A$ esetén, akkor $\sum f_n$ abszolút és egyenletesen konvergens A -n.

Tétel (Összegfüggvény folytonossága)

Ha f_n folytonos A -n minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén, és $\sum f_n = F$ egyenletesen A -n, akkor F folytonos A -n.

Megjegyzés

A tétel feltételei mellett, tehát a határérték és a szumma felcserélhető.

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\sum f_n(x) \right) = \sum \left(\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right)$$

Tétel (Összegfüggvény integrálja)

Ha f_n Riemann-integrálható $[a, b]$ -n minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén, és $\sum f_n = F$ egyenletesen $[a, b]$ -n, akkor F Riemann-integrálható $[a, b]$ -n, és

$$\int_a^b F = \sum \left(\int_a^b f_n \right).$$

Megjegyzés

A tétel feltételei mellett, tehát a szumma és az integrál felcserélhető.

$$\int_a^b \left(\sum f_n(x) \right) dx = \sum \left(\int_a^b f_n(x) dx \right)$$

Tétel (Összegfüggvény deriváltja)

Ha f_n folytonosan deriválható $[a, b]$ -n minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén, és $\sum f'_n = G$ egyenletesen $[a, b]$ -n, és $\sum f_n(a)$ konvergens, akkor $\sum f_n$ is egyenletesen konvergens $[a, b]$ -n, F összegfüggvénye deriválható $[a, b]$ -n, és

$$F' = G.$$

Megjegyzés

A tétel feltételei mellett, tehát a szumma és a deriválás is felcserélhető.

$$\sum f'_n = \left(\sum f_n \right)'$$

Az $\sum f_n(a)$ konvergenciája helyett elég feltenni, hogy $\sum f_n(x)$ konvergens valamely rögzített $x \in [a, b]$ esetén.

Tétel (Összegfüggvény primitív függvénye)

Ha f_n folytonos $[a, b]$ -n, és F_n a f_n a-ban eltűnő primitív függvénye minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén, és $\sum f_n$ egyenletesen konvergens $[a, b]$ -n, akkor $\sum F_n$ egyenletesen konvergens $[a, b]$ -n, és $\sum F_n$ a $\sum f_n$ a-ban eltűnő primitív függvénye.

Megjegyzés

A tétel feltételei mellett, tehát a szumma és az integrál felcserélhető. Vigyázni kell az additív konstansra.

Feladat

Vizsgáljuk az $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{2^n}$ függvénysort!

Definíció

A

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n$$

függvénysort a **középpontú hatványsornak** nevezzük, míg a c_n sorozatot **együtthatósorozatnak**.
A hatványsor **konvergenciasugarának** nevezzük az

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|c_n|}}$$

nem negatív bővített valós számot.

Megjegyzés

Mivel $\sqrt[n]{|c_n|} \geq 0$, ezért $\limsup \sqrt[n]{|c_n|} \in [0, \infty]$, és a konvergenciasugár $R = 0$, ha $\limsup \sqrt[n]{|c_n|} = \infty$, illetve $R = \infty$, ha $\limsup \sqrt[n]{|c_n|} = 0$.

Ha létezik $\lim \sqrt[n]{|c_n|}$, akkor ezzel is számolhatunk, sőt, ha létezik $\lim \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|$, akkor ezzel is,

vagyis ekkor $R = \lim \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$.

Tétel (Cauchy-Hadamard)

Legyen R a $\sum c_n(x - a)^n$ hatványsor konvergencia sugara.

Ha egy rögzített x esetén $|x - a| < R$, akkor $\sum c_n(x - a)^n$ abszolút konvergens, ha pedig $|x - a| > R$, akkor $\sum c_n(x - a)^n$ divergens.

Következmény

Ha a $\sum c_n(x - a)^n$ hatványsor konvergencia sugara $R = 0$, akkor minden $x \neq a$ esetén $|x - a| > 0 = R$, így a sor divergens. $x = a$ esetén pedig biztosan konvergens. Ekkor $KH = \{a\}$.

Ha $R = \infty$, akkor minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $|x - a| < R$, így a sor abszolút konvergens. Ekkor $KH = \mathbb{R}$.

Ha $0 < R < \infty$, akkor $]a - R, a + R[\subset KH \subset [a - R, a + R]$. Az intervallum végpontjait külön kell vizsgálnunk.

Feladat

Határozzuk meg a következő hatványsorok konvergenciahalmazát!

1. $\sum x^n;$

2. $\sum n^8 x^n;$

3. $\sum \frac{x^n}{n};$

4. $\sum \frac{(-1)^n}{n} x^n;$

5. $\sum \frac{x^n}{n^2};$

6. $\sum \frac{1}{3^n} (x - 2)^n;$

7. $\sum 4^n (x - 2)^{3n};$

8. $\sum \frac{x^n}{n!};$

Tétel (Hatványsor egyenletes konvergenciája)

Legyen a

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - a)^n$$

hatványsor konvergencia sugara R , és legyen $r < R$. Ekkor a hatványsor egyenletesen konvergens az $[a - r, a + r]$ intervallumon.

Megjegyzés

A fenti hatványsor az $[a - r, a + r]$ intervallumon abszolút konvergens.

Tétel (Hatványsor összegfüggvényének folytonossága)

Hatványsor összegfüggvénye folytonos.

Megjegyzés

A végpontokra vonatkozó rész Ábel-tétele.

Tétel (Hatványsor tagonkénti Riemann-integrálhatósága)

Egy hatványsor, a konvergenciahalmazának tetszőleges kompakt részintervallumán tagonként integrálható.

Részletesen

Megjegyzés

Legyen a

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n$$

hatványsor konvergenciahalmaza KH , összegfüggvénye $f : KH \rightarrow \mathbb{R}$, és legyen $[\alpha, \beta] \subset KH$. Ekkor f Riemann-integrálható $[\alpha, \beta]$ -n, és

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \, dx = \left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x - a)^{n+1}}{n + 1} \right]_{\alpha}^{\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(\frac{(\beta - a)^{n+1}}{n + 1} - \frac{(\alpha - a)^{n+1}}{n + 1} \right).$$

Útmutatás.

Ha $[\alpha, \beta] \subset \text{int } KH$, akkor az egyenletes konvergencia adja az állítást.



Tétel (Hatványsor tagonkénti határozatlan integrálja)

Legyen a

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n$$

hatványsor konvergenciahalmaza KH , összegfüggvénye $f : KH \rightarrow \mathbb{R}$. Ekkor f -nek létezik primitív függvénye KH -n, nevezetesen

$$\int f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x - a)^{n+1}}{n + 1} + C.$$

Megjegyzés

A két hatványsor $(\sum c_n (x - a)^n$ és $\sum c_n \frac{(x - a)^{n+1}}{n + 1})$ konvergencia sugara megegyezik, és az utóbbi konvergenciahalmaza tartalmazza az előbbiét, vagyis ha valamelyik végpontban $\sum c_n (x - a)^n$ konvergens, akkor $\sum c_n \frac{(x - a)^{n+1}}{n + 1}$ is az.

Tétel (Hatványsor tagonkénti deriválása)

Legyen a

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

hatványsor konvergenciahalmaza KH , összegfüggvénye $f : KH \rightarrow \mathbb{R}$. Ekkor f deriválható KH belsejében (int KH), nevezetesen

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n(x-a)^{n-1}.$$

Megjegyzés

A két hatványsor ($\sum c_n(x-a)^n$ és $\sum c_n n(x-a)^{n-1}$) konvergencia sugara megegyezik, és az előbbi konvergenciahalmaza tartalmazza az utóbbit, vagyis ha valamelyik végpontban $\sum c_n(x-a)^n$ divergens, akkor $\sum c_n n(x-a)^{n-1}$ is az.

Feladat

1. $\sum_{n=1}^{\infty} x^n = ?$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = ?$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2;$

4. $\sum_{n=2}^{\infty} nx^{n-2} = ?$

A

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n$$

hatványsor f összegfüggvénye tetszőlegesen sokszor deriválható a konvergenciahalmaza belsejében (int KH), nevezetesen

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n \frac{n!}{(n-k)!} (x-a)^{n-k}.$$

Következmény

Ha a

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n$$

hatványsor konvergencia sugara pozitív (esetleg ∞), akkor f összegfüggvénye tetszőlegesen sokszor deriválható a -ban, és

$$f^{(n)}(a) = c_n n!$$

Definíció

Ha f tetszőlegesen sokszor deriválható a -ban, akkor a körüli **Taylor-sor**ának nevezzük a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n$$

hatványsort.

Megjegyzés

Az első elemeket kiírva a fenti Taylor-sor

$$f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{6}(x - a)^3 + \frac{f^{iv}(a)}{24}(x - a)^4 + \dots$$

$a = 0$ esetben a **MacLaurin-sor** elnevezést is használjuk. Ekkor a sor

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + \frac{f^{iv}(0)}{24}x^4 + \dots$$

Feladat

Írjuk fel a következő függvények MacLaurin-sorát!

1. $f(x) = x^2 + x + 1;$

2. $f(x) = \operatorname{sh} x;$

3. $f(x) = \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor;$

4. $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{ha } x \neq 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases};$

Tétel

Ha f tetszőlegesen sokszor deriválható az $]a - R, a + R[$ intervallumon, és a deriváltak itt egyenletesen korlátosak, azaz

$$\exists K \in \mathbb{R} : \forall x \in]a - R, a + R[: \forall n \in \mathbb{N}_0 : |f^{(n)}(x)| \leq K,$$

akkor $a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n$ Taylor-sor konvergens az $]a - R, a + R[$ intervallumon, és

összegfüggvénye megegyezik az f függvénnyel, azaz $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n$, ha $|x - a| < R$.

Tétel

1. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad (x \in]-1, 1[);$
2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \quad (x \in \mathbb{R});$
3. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos x \quad (x \in \mathbb{R});$
4. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin x \quad (x \in \mathbb{R});$
5. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \operatorname{ch} x \quad (x \in \mathbb{R});$
6. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \operatorname{sh} x \quad (x \in \mathbb{R});$

Feladat

Fejtsük sorba az f függvényt a körül, és határozzuk meg hol állítja elő a Taylor-sor a függvényt!

1. $f(x) = \frac{1}{1-x}, \quad a = 3;$

2. $f(x) = \left(\frac{1}{1-x}\right)^2, \quad a = 0;$

3. $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}, \quad a = -2, \quad f^c(-2) = ?;$

4. $f(x) = \operatorname{arctg} x, \quad a = 0;$

5. $f(x) = e^{x^2}, \quad a = 0;$

6. $f(x) = e^{3x}, \quad a = 1;$

Adjuk meg a $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{k!} x^{2k}$ hatványsor konvergenciahalmazát és összegfüggvényét!

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{k!} = ?$$

Definíció

Ha $\alpha \in \mathbb{R}$ és $k \in \mathbb{N}_0$, akkor az alábbi módon értelmezzük az (általánosított) binomiális együtthatót.

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}.$$

Megjegyzés

$$\binom{\alpha}{0} = 1.$$

Ha $\alpha \in \mathbb{N}_0$, és $k \leq \alpha$, akkor $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha!}{k!(\alpha-k)!}$.

Ha $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}_0$ tetszőleges, akkor a $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$ hatványsor konvergencia sugara $R = 1$, és összegfüggvénye $(1+x)^\alpha$.

Megjegyzés

Ha $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$, akkor a binomiális tételt kapjuk, azaz $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n x^k$, hiszen $k > \alpha = n$

esetén $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} = 0$. Ekkor a konvergenciasugár $R = \infty$, így a konvergenciahalmaz $KH = \mathbb{R}$.

Ha $\alpha = -1$, akkor $\binom{\alpha}{k} = \binom{-1}{k} = \frac{(-1) \cdot (-2) \dots (-k)}{k!} = (-1)^k$, így ekkor a mértani sor összegképletét kapjuk.

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k = \frac{1}{1 - (-x)} = (1+x)^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k x^k$$

Ekkor a konvergencia halmaz $KH =]-1, 1[$.

Tétel

Ha $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}_0$ tetszőleges, akkor a $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$ hatványsor konvergencia halmaza

$$KH = \begin{cases}]-1, 1[, & \text{ha } \alpha \leq -1 \\]-1, 1], & \text{ha } -1 < \alpha < 0 \\ [-1, 1], & \text{ha } 0 < \alpha \end{cases}$$

Feladat

Fejtsük sorba az f függvényt a körül, és határozzuk meg a Taylor-sor konvergencia sugarát!

1. $f(x) = \sqrt{1+x}$, $a = 0$;

2. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2+x^2}}$, $a = 0$;

3. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{16-x^3}}$, $a = 0$;

4. $f(x) = \sqrt[3]{8+x^2}$, $a = 0$;

5. $f(x) = \arcsin x$, $a = 0$;

6. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{9-x}}$, $a = 1$, $f^c(1) = ?$;

7. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}$, $a = 0$, $f^{ic}(0) = ?$, $f^c(0) = ?$, $\int_0^{0.1} f \approx ?$;

FOLYT. KÖV.

Pataki Gergely