4.2. Egészek

Definíció (37) Egész számok A $\mathbb{N}_0^2$ halmazon értelmezzünk egy ekvivalencia relációt:
$(a,b) \sim (c,d)$ ha $a+d=b+c$. Nevezzük egész számoknak az indukált osztályokat. Jele $\mathbb{Z}$.
A műveleteket és a rendezést reprezentáns elemeken végezzük.
Az $(a,b),(c,d)$ elemeket tartalmazó osztályok összege legyen az, melynek eleme

$$(a +_{\mathbb{N}_0} c, b +_{\mathbb{N}_0} d).$$

Az $(a,b),(c,d)$ elemeket tartalmazó osztályok szorzata legyen az, melynek eleme

$$(a \cdot_{\mathbb{N}_0} c + b \cdot_{\mathbb{N}_0} d, a \cdot_{\mathbb{N}_0} d + b \cdot_{\mathbb{N}_0} c).$$

Az (a,b) elemet tartalmazó osztály legyen $\leq$ mint a (c,d) elemet tartalmazó osztály, ha

$$a +_{\mathbb{N}_0} d \leq_{\mathbb{N}_0} b +_{\mathbb{N}_0} c.$$

Megjegyzés (37) A definíció korrekt, azaz $\sim$ valóban ekvivalencia reláció és a műveletek illetve a rendezés nem függ a reprezentáns elemek választásától.

Bizonyítás. $\sim$ reflexív és szimmetrikus a definíció alapján.

$\sim$ tranzitív: $(a,b) \sim (c,d) \sim (e,f)$ esetén $a +_{\mathbb{N}_0} d = b +_{\mathbb{N}_0} c$ és $c +_{\mathbb{N}_0} f = d +_{\mathbb{N}_0} e$. Az első egyenlet mindkét oldalához adjunk f-et, a másodikéihoz b-t, így kapjuk, hogy

$$a +_{\mathbb{N}_0} d +_{\mathbb{N}_0} f = b +_{\mathbb{N}_0} c +_{\mathbb{N}_0} f = b +_{\mathbb{N}_0} d +_{\mathbb{N}_0} e.$$

d-vel egyszerűsítve $a +_{\mathbb{N}_0} f = b +_{\mathbb{N}_0} e$, azaz $(a,b) \sim (e,f)$.

Legyen $(a_1,b_1) \sim (a_2,b_2)$ és $(c_1,d_1) \sim (c_2,d_2)$.
$(a_1 +_{\mathbb{N}_0} c_1, b_1 +_{\mathbb{N}_0} d_1) \sim (a_2 +_{\mathbb{N}_0} c_2, b_2 +_{\mathbb{N}_0} d_2)$, hiszen összeadva az
$a_1 +_{\mathbb{N}_0} b_2 = b_1 +_{\mathbb{N}_0} a_2$ és a $c_1 +_{\mathbb{N}_0} d_2 = d_1 +_{\mathbb{N}_0} c_2$ egyenleteket kapjuk, hogy

$$(a_1 +_{\mathbb{N}_0} c_1) +_{\mathbb{N}_0} (b_2 +_{\mathbb{N}_0} d_2) = (a_1 +_{\mathbb{N}_0} b_2) +_{\mathbb{N}_0} (c_1 +_{\mathbb{N}_0} d_2) = \\ = (b_1 +_{\mathbb{N}_0} a_2) +_{\mathbb{N}_0} (d_1 +_{\mathbb{N}_0} c_2) = (b_1 +_{\mathbb{N}_0} d_1) +_{\mathbb{N}_0} (a_2 +_{\mathbb{N}_0} c_2).$$

$(a_1 \cdot_{\mathbb{N}_0} c_1 +_{\mathbb{N}_0} b_1 \cdot_{\mathbb{N}_0} d_1, a_1 \cdot_{\mathbb{N}_0} d_1 +_{\mathbb{N}_0} b_1 \cdot_{\mathbb{N}_0} c_1) \sim (a_2 \cdot_{\mathbb{N}_0} c_2 +_{\mathbb{N}_0} b_2 \cdot_{\mathbb{N}_0} d_2, a_2 \cdot_{\mathbb{N}_0} d_2 +_{\mathbb{N}_0} b_2 \cdot_{\mathbb{N}_0} c_2)$, hiszen
$a_1 +_{\mathbb{N}_0} b_2 = b_1 +_{\mathbb{N}_0} a_2$ mindkét oldalát szorozva c_1-el és d_1-el kapunk két egyenletet:
$\underbrace{a_1 \cdot_{\mathbb{N}_0} c_1 +_{\mathbb{N}_0} b_2 \cdot_{\mathbb{N}_0} c_1}_{1L} = \underbrace{b_1 \cdot_{\mathbb{N}_0} c_1 +_{\mathbb{N}_0} a_2 \cdot_{\mathbb{N}_0} c_1}_{1R}$ és $\underbrace{a_1 \cdot_{\mathbb{N}_0} d_1 +_{\mathbb{N}_0} b_2 \cdot_{\mathbb{N}_0} d_1}_{2L} = \underbrace{b_1 \cdot_{\mathbb{N}_0} d_1 +_{\mathbb{N}_0} a_2 \cdot_{\mathbb{N}_0} d_1}_{2R}$.
$c_1 +_{\mathbb{N}_0} d_2 = d_1 +_{\mathbb{N}_0} c_2$ mindkét oldalát szorozva a_2-el és b_2-el kapunk két egyenletet:
$\underbrace{a_2 \cdot_{\mathbb{N}_0} c_1 +_{\mathbb{N}_0} a_2 \cdot_{\mathbb{N}_0} d_2}_{3L} = \underbrace{a_2 \cdot_{\mathbb{N}_0} d_1 +_{\mathbb{N}_0} a_2 \cdot_{\mathbb{N}_0} c_2}_{3R}$ és $\underbrace{b_2 \cdot_{\mathbb{N}_0} c_1 +_{\mathbb{N}_0} b_2 \cdot_{\mathbb{N}_0} d_2}_{4L} = \underbrace{b_2 \cdot_{\mathbb{N}_0} d_1 +_{\mathbb{N}_0} b_2 \cdot_{\mathbb{N}_0} c_2}_{4R}$.
Összeadva 1L+3L+2R+4R=1R+3R+2L+4L:

$$a_1 \cdot_{\mathbb{N}_0} c_1 +_{\mathbb{N}_0} b_2 \cdot_{\mathbb{N}_0} c_1 +_{\mathbb{N}_0} a_2 \cdot_{\mathbb{N}_0} c_1 +_{\mathbb{N}_0} a_2 \cdot_{\mathbb{N}_0} d_2 +_{\mathbb{N}_0} b_1 \cdot_{\mathbb{N}_0} d_1 +_{\mathbb{N}_0} a_2 \cdot_{\mathbb{N}_0} d_1 +_{\mathbb{N}_0} b_2 \cdot_{\mathbb{N}_0} d_1 +_{\mathbb{N}_0} b_2 \cdot_{\mathbb{N}_0} c_2 = \\ = b_1 \cdot_{\mathbb{N}_0} c_1 +_{\mathbb{N}_0} a_2 \cdot_{\mathbb{N}_0} c_1 +_{\mathbb{N}_0} a_2 \cdot_{\mathbb{N}_0} d_1 +_{\mathbb{N}_0} a_2 \cdot_{\mathbb{N}_0} c_2 +_{\mathbb{N}_0} a_1 \cdot_{\mathbb{N}_0} d_1 +_{\mathbb{N}_0} b_2 \cdot_{\mathbb{N}_0} d_1 +_{\mathbb{N}_0} b_2 \cdot_{\mathbb{N}_0} c_1 +_{\mathbb{N}_0} b_2 \cdot_{\mathbb{N}_0} d_2$$

Egyszerűsítve $b_2 \cdot_{\mathbb{N}_0} c_1 +_{\mathbb{N}_0} a_2 \cdot_{\mathbb{N}_0} c_1 +_{\mathbb{N}_0} a_2 \cdot_{\mathbb{N}_0} d_1 +_{\mathbb{N}_0} b_2 \cdot_{\mathbb{N}_0} d_1$-el kapjuk a célt.
$a_1 +_{\mathbb{N}_0} d_1 \leq_{\mathbb{N}_0} b_1 +_{\mathbb{N}_0} c_1 \implies a_2 +_{\mathbb{N}_0} d_2 \leq_{\mathbb{N}_0} b_2 +_{\mathbb{N}_0} c_2$
Ha $n \in \mathbb{N}_0$ esetén $a_1 +_{\mathbb{N}_0} d_1 +_{\mathbb{N}_0} n = b_1 +_{\mathbb{N}_0} c_1$, akkor mindkét oldalhoz hozzáadva $b_2 +_{\mathbb{N}_0} c_2$-t kapjuk, hogy $a_1 +_{\mathbb{N}_0} b_2 +_{\mathbb{N}_0} d_1 +_{\mathbb{N}_0} c_2 +_{\mathbb{N}_0} n = b_1 +_{\mathbb{N}_0} b_2 +_{\mathbb{N}_0} c_1 +_{\mathbb{N}_0} c_2$.

Felhasználva a feltételt ebből adódik, hogy $a_2 +_{\mathbb{N}_0} b_1 +_{\mathbb{N}_0} d_2 +_{\mathbb{N}_0} c_1 +_{\mathbb{N}_0} n = b_1 +_{\mathbb{N}_0} b_2 +_{\mathbb{N}_0} c_1 +_{\mathbb{N}_0} c_2$, ahonnan $b_1 +_{\mathbb{N}_0} c_1$-el egyszerűsítve kapjuk,hogy $a_2 +_{\mathbb{N}_0} d_2 +_{\mathbb{N}_0} n = b_2 +_{\mathbb{N}_0} c_2$. □

Tétel (37) $(\mathbb{Z},+,\cdot,\leq)$ *rendezett integritástartomány.*
$(\mathbb{N}_0,+,\cdot,\leq)$ *izomorf a* $(\mathbb{Z},+,\cdot,\leq)$ *egy részhalmazával.*

Bizonyítás. $+_{\mathbb{Z}}$ asszociatív:

$$[(a,b)+(c,d)]+(e,f) = (a+_{\mathbb{N}_0} c, b+_{\mathbb{N}_0} d)+(e,f) = ([a+_{\mathbb{N}_0} c]+_{\mathbb{N}_0} e, [b+_{\mathbb{N}_0} d]+_{\mathbb{N}_0} f) =$$
$$= (a+_{\mathbb{N}_0}[c+_{\mathbb{N}_0} e], b+_{\mathbb{N}_0}[d+_{\mathbb{N}_0} f]) = (a,b)+(c+_{\mathbb{N}_0} e, d+_{\mathbb{N}_0} f) = (a,b)+[(c,d)+(e,f)]$$

$+_{\mathbb{Z}}$ kommutatív: $(a,b)+(c,d) = (a+_{\mathbb{N}_0} c, b+_{\mathbb{N}_0} d) = (c+_{\mathbb{N}_0} a, d+_{\mathbb{N}_0} b) = (c,d)+(a,b)$

Könnyen ellenőrizhető, hogy $(0,0)$ osztálya az additív neutrális elem, nullelem, (a,b) osztályának additív inverze (b,a) osztálya.

$\cdot_{\mathbb{Z}}$ asszociatív:

$$[(a,b)\cdot(c,d)]\cdot(e,f) = (a\cdot_{\mathbb{N}_0} c +_{\mathbb{N}_0} b\cdot_{\mathbb{N}_0} d, a\cdot_{\mathbb{N}_0} d +_{\mathbb{N}_0} b\cdot_{\mathbb{N}_0} c)\cdot(e,f) =$$
$$= (\left[a\cdot_{\mathbb{N}_0} c +_{\mathbb{N}_0} b\cdot_{\mathbb{N}_0} d\right]\cdot_{\mathbb{N}_0} e +_{\mathbb{N}_0} \left[a\cdot_{\mathbb{N}_0} d +_{\mathbb{N}_0} b\cdot_{\mathbb{N}_0} c\right]\cdot_{\mathbb{N}_0} f, \left[a\cdot_{\mathbb{N}_0} c +_{\mathbb{N}_0} b\cdot_{\mathbb{N}_0} d\right]\cdot_{\mathbb{N}_0} f +_{\mathbb{N}_0} \left[a\cdot_{\mathbb{N}_0} d +_{\mathbb{N}_0} b\cdot_{\mathbb{N}_0} c\right]\cdot_{\mathbb{N}_0} e) =$$
$$= (\left[a\cdot_{\mathbb{N}_0} c\right]\cdot_{\mathbb{N}_0} e +_{\mathbb{N}_0} \left[b\cdot_{\mathbb{N}_0} d\right]\cdot_{\mathbb{N}_0} e +_{\mathbb{N}_0} \left[a\cdot_{\mathbb{N}_0} d\right]\cdot_{\mathbb{N}_0} f +_{\mathbb{N}_0} \left[b\cdot_{\mathbb{N}_0} c\right]\cdot_{\mathbb{N}_0} f, \left[a\cdot_{\mathbb{N}_0} c\right]\cdot_{\mathbb{N}_0} f +_{\mathbb{N}_0} \left[b\cdot_{\mathbb{N}_0} d\right]\cdot_{\mathbb{N}_0} f +_{\mathbb{N}_0} \left[a\cdot_{\mathbb{N}_0} d\right]\cdot_{\mathbb{N}_0} e +_{\mathbb{N}_0} \left[b\cdot_{\mathbb{N}_0} c\right]\cdot_{\mathbb{N}_0} e) =$$
$$= (a\cdot_{\mathbb{N}_0}\left[c\cdot_{\mathbb{N}_0} e\right] +_{\mathbb{N}_0} b\cdot_{\mathbb{N}_0}\left[d\cdot_{\mathbb{N}_0} e\right] +_{\mathbb{N}_0} a\cdot_{\mathbb{N}_0}\left[d\cdot_{\mathbb{N}_0} f\right] +_{\mathbb{N}_0} b\cdot_{\mathbb{N}_0}\left[c\cdot_{\mathbb{N}_0} f\right], a\cdot_{\mathbb{N}_0}\left[c\cdot_{\mathbb{N}_0} f\right] +_{\mathbb{N}_0} b\cdot_{\mathbb{N}_0}\left[d\cdot_{\mathbb{N}_0} f\right] +_{\mathbb{N}_0} a\cdot_{\mathbb{N}_0}\left[d\cdot_{\mathbb{N}_0} e\right] +_{\mathbb{N}_0} b\cdot_{\mathbb{N}_0}\left[c\cdot_{\mathbb{N}_0} e\right]) =$$
$$= (a\cdot_{\mathbb{N}_0}\left[c\cdot_{\mathbb{N}_0} e +_{\mathbb{N}_0} d\cdot_{\mathbb{N}_0} f\right] +_{\mathbb{N}_0} b\cdot_{\mathbb{N}_0}\left[d\cdot_{\mathbb{N}_0} e +_{\mathbb{N}_0} c\cdot_{\mathbb{N}_0} f\right], a\cdot_{\mathbb{N}_0}\left[c\cdot_{\mathbb{N}_0} f +_{\mathbb{N}_0} d\cdot_{\mathbb{N}_0} e\right] +_{\mathbb{N}_0} b\cdot\left[d\cdot_{\mathbb{N}_0} f +_{\mathbb{N}_0} c\cdot_{\mathbb{N}_0} e\right]) =$$
$$= (a,b)\cdot(c\cdot_{\mathbb{N}_0} e +_{\mathbb{N}_0} d\cdot_{\mathbb{N}_0} f, d\cdot_{\mathbb{N}_0} e +_{\mathbb{N}_0} c\cdot_{\mathbb{N}_0} f) = (a,b)\cdot[(c,d)\cdot(e,f)]$$

$\cdot_{\mathbb{Z}}$ kommutatív:

$$(a,b)\cdot(c,d) = (a\cdot_{\mathbb{N}_0} c +_{\mathbb{N}_0} b\cdot_{\mathbb{N}_0} d, a\cdot_{\mathbb{N}_0} d +_{\mathbb{N}_0} b\cdot_{\mathbb{N}_0} c) = (c\cdot_{\mathbb{N}_0} a +_{\mathbb{N}_0} d\cdot_{\mathbb{N}_0} b, d\cdot_{\mathbb{N}_0} a +_{\mathbb{N}_0} c\cdot_{\mathbb{N}_0} b) = (c,d)\cdot(b,a)$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy $(1,0)$ osztálya a multiplikatív neutrális elem, egységelem.

Nullosztómentes: $(a,b)\cdot(c,d) = (e,e) \implies a\cdot_{\mathbb{N}_0} c +_{\mathbb{N}_0} b\cdot_{\mathbb{N}_0} d = a\cdot_{\mathbb{N}_0} d +_{\mathbb{N}_0} b\cdot_{\mathbb{N}_0} c$

1. eset $a \le b$, azaz $\exists n \in \mathbb{N}_0 : a+n = b$. Ekkor $(a,b) \sim (0,n)$ és elég belátni, hogy

$$0\cdot_{\mathbb{N}_0} c +_{\mathbb{N}_0} n\cdot_{\mathbb{N}_0} d = 0\cdot_{\mathbb{N}_0} d +_{\mathbb{N}_0} n\cdot_{\mathbb{N}_0} c,$$

azaz $n\cdot_{\mathbb{N}_0} d = n\cdot_{\mathbb{N}_0} c$. Ha $n = 0$, akkor $a = b$ így $(a,b) \sim (0,0)$, míg ha $n \neq 0$, akkor $c = d$ és így $(c,d) \sim (0,0)$.

2. eset $b \le a$ hasonlóan.

$\cdot_{\mathbb{Z}}$ disztributív $+_{\mathbb{Z}}$-re:

$$[(a,b)+(c,d)]\cdot(e,f) = (a+_{\mathbb{N}_0} c, b+_{\mathbb{N}_0} d)\cdot(e,f) =$$
$$= ([a+_{\mathbb{N}_0} c]\cdot_{\mathbb{N}_0} e + [b+_{\mathbb{N}_0} d]\cdot_{\mathbb{N}_0} f, [a+_{\mathbb{N}_0} c]\cdot_{\mathbb{N}_0} f +_{\mathbb{N}_0} [b+_{\mathbb{N}_0} d]\cdot_{\mathbb{N}_0} e) =$$
$$= (a\cdot_{\mathbb{N}_0} e + b\cdot_{\mathbb{N}_0} f, a\cdot_{\mathbb{N}_0} f +_{\mathbb{N}_0} b\cdot_{\mathbb{N}_0} e) + (c\cdot_{\mathbb{N}_0} e +_{\mathbb{N}_0} d\cdot_{\mathbb{N}_0} f, c\cdot_{\mathbb{N}_0} f +_{\mathbb{N}_0} d\cdot_{\mathbb{N}_0} e) = (a,b)\cdot(e,f)+(c,d)\cdot(e,f).$$

$\le_{\mathbb{Z}}$ reflexív: $(a,b) \le (a,b)$ hiszen $a+_{\mathbb{N}_0} b \le_{\mathbb{N}_0} b+_{\mathbb{N}_0} a$

$\le_{\mathbb{Z}}$ antiszimmetrikus: ha $(a,b) \le (c,d)$ és $(c,d) \le (a,b)$, akkor $a+_{\mathbb{N}_0} d \le_{\mathbb{N}_0} b+_{\mathbb{N}_0} c$ és $c+_{\mathbb{N}_0} b \le_{\mathbb{N}_0} d+_{\mathbb{N}_0} a$, de ekkor $a+_{\mathbb{N}_0} d = b+_{\mathbb{N}_0} c$ azaz $(a,b) \sim (c,d)$

$\le_{\mathbb{Z}}$ tranzitív: ha $(a,b) \le (c,d)$ és $(c,d) \le (e,f)$, akkor $a+_{\mathbb{N}_0} d \le_{\mathbb{N}_0} b+_{\mathbb{N}_0} c$ és $c+_{\mathbb{N}_0} f \le_{\mathbb{N}_0} d+_{\mathbb{N}_0} e$. Az első egyenlőtlenség mindkét oldalához adjunk f-et, a másodikéihoz b-t. Ekkor kapjuk, hogy $a+_{\mathbb{N}_0} d+_{\mathbb{N}_0} f \le_{\mathbb{N}_0} b+_{\mathbb{N}_0} c+_{\mathbb{N}_0} f \le_{\mathbb{N}_0} b+_{\mathbb{N}_0} d+_{\mathbb{N}_0} e$. d-vel egyszerűsítve $a+_{\mathbb{N}_0} f \le_{\mathbb{N}_0} b+_{\mathbb{N}_0} e$, azaz $(a,b) \le (e,f)$.

$\le_{\mathbb{Z}}$ dichotóm: Tegyük fel, hogy $(a,b) \not\le (c,d)$, azaz $a+_{\mathbb{N}_0} d \not\le_{\mathbb{N}_0} b+_{\mathbb{N}_0} c$. Ekkor $c+_{\mathbb{N}_0} b \le_{\mathbb{N}_0} d+_{\mathbb{N}_0} a$, azaz $(c,d) \le (a,b)$.

$+_{\mathbb{Z}}$ monoton, sőt szigorúan: $(a,b) \le (c,d)$ esetén $a+_{\mathbb{N}_0} d \le_{\mathbb{N}_0} b+_{\mathbb{N}_0} c$. Ekkor

$$(a+_{\mathbb{N}_0} e)+_{\mathbb{N}_0}(d+_{\mathbb{N}_0} f) \le_{\mathbb{N}_0} (b+_{\mathbb{N}_0} f)+_{\mathbb{N}_0}(c+_{\mathbb{N}_0} e),$$

azaz $(a,b)+(e,f) = (a+_{\mathbb{N}_0} e, b+_{\mathbb{N}_0} f) \le (c+_{\mathbb{N}_0} e, d+_{\mathbb{N}_0} f) = (c,d)+(e,f)$. $\le$ helyett $<$ is írható.

$\cdot_{\mathbb{Z}}$ pozitív monoton, sőt szigorúan: $(a,b) \le (c,d)$, azaz $a+_{\mathbb{N}_0} d \le_{\mathbb{N}_0} b+_{\mathbb{N}_0} c$ és $(0,0) < (e,f)$, azaz $f <_{\mathbb{N}_0} e$ esetén $\exists n \in \mathbb{N}_0 : n \neq 0 \wedge f+_{\mathbb{N}_0} n = e$, azaz $(e,f) \sim (n,0)$. Ekkor

$$a\cdot_{\mathbb{N}_0} n +_{\mathbb{N}_0} b\cdot_{\mathbb{N}_0} 0 +_{\mathbb{N}_0} c\cdot_{\mathbb{N}_0} 0 +_{\mathbb{N}_0} d\cdot_{\mathbb{N}_0} n = (a+_{\mathbb{N}_0} d)\cdot_{\mathbb{N}_0} n \le_{\mathbb{N}_0}$$
$$\le_{\mathbb{N}_0} (b+_{\mathbb{N}_0} c)\cdot_{\mathbb{N}_0} n = a\cdot_{\mathbb{N}_0} 0 +_{\mathbb{N}_0} b\cdot_{\mathbb{N}_0} n +_{\mathbb{N}_0} c\cdot_{\mathbb{N}_0} n +_{\mathbb{N}_0} d\cdot_{\mathbb{N}_0} 0.$$

Kaptuk, hogy
$(a,b)\cdot(n,0) = (a\cdot_{\mathbb{N}_0} n + b\cdot_{\mathbb{N}_0} 0, a\cdot_{\mathbb{N}_0} 0 +_{\mathbb{N}_0} b\cdot_{\mathbb{N}_0} n) \leq (c\cdot_{\mathbb{N}_0} n + d\cdot_{\mathbb{N}_0} 0, c\cdot_{\mathbb{N}_0} 0 +_{\mathbb{N}_0} d\cdot_{\mathbb{N}_0} n) = (c,d)\cdot(n,0)$
$\leq$ helyett $<$ is írható.
$f : \mathbb{N}_0 \to \mathrm{Ran}_f \subset \mathbb{Z}$, $f(n) = \{(a+n,a) | a \in \mathbb{N}_0\}$ izomorfizmus a definíciók alapján.
$f(n) = f(k) \implies (n, 0_{\mathbb{N}_0}) \in f(k)$, azaz $\exists a \in \mathbb{N}_0 : (a +_{\mathbb{N}_0} k, a) = (n, 0_{\mathbb{N}_0})$, de ekkor $a = 0_{\mathbb{N}_0}$ és így $n = k$. Kaptuk, hogy f injektív, és így bijektív.
$(n, 0_{\mathbb{N}_0}) + (k, 0_{\mathbb{N}_0}) = (n +_{\mathbb{N}_0} k, 0_{\mathbb{N}_0})$, miatt $f(n) +_{\mathbb{Z}} f(k) = f(n +_{\mathbb{N}_0} k)$.
$(n, 0_{\mathbb{N}_0}) \cdot (k, 0_{\mathbb{N}_0}) = (n \cdot_{\mathbb{N}_0} k +_{\mathbb{N}_0} 0_{\mathbb{N}_0} \cdot_{\mathbb{N}_0} 0_{\mathbb{N}_0}, n \cdot_{\mathbb{N}_0} 0_{\mathbb{N}_0} + k \cdot_{\mathbb{N}_0} 0_{\mathbb{N}_0})$, miatt $f(n) \cdot_{\mathbb{Z}} f(k) = f(n \cdot_{\mathbb{N}_0} k)$.
$n \leq_{\mathbb{N}_0} k \iff n +_{\mathbb{N}_0} 0_{\mathbb{N}_0} \leq_{\mathbb{N}_0} k +_{\mathbb{N}_0} 0_{\mathbb{N}_0} \iff (n, 0_{\mathbb{N}_0}) \leq (k, 0_{\mathbb{N}_0}) \iff f(n) \leq_{\mathbb{Z}} f(k)$ □