

1. rész

1. Logikai jelek

1. feladat (1. Logikai jelek)

Igazoljuk, hogy ugyanazt jelentik a következő párok:

(a)	$a \iff b$	$(a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)$
(b)	$\neg(a \iff b)$	$(a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg b)$
(c)	$(a \wedge b \wedge c) \implies d$	$a \implies (b \implies (c \implies d))$
(d)	$(a \wedge b \wedge c) \implies d$	$\neg d \implies (\neg a \vee \neg b \vee \neg c)$
(e)	$\neg(((a \wedge b) \vee c) \implies a) \iff b$	$(a \vee b \vee \neg c) \wedge (a \neg b \vee c) \wedge (\neg a \wedge \neg b)$

2. feladat (1. Logikai jelek)

Az alábbi szöveges feladatoknál formalizáljuk az állításokat logikai műveletek és kvantorok segítségével, majd tagadjuk az állításokat formálisan és szövegesen is!

- (a) Minden medve szereti a mézet.
- (b) Van olyan méz, amit nem minden medve szeret.
- (c) A házban van ablak, ami nyitva van.
- (d) A házban van emelet, ahol minden ablak nyitva van.
- (e) Minden emeleten minden ablak nyitva van.
- (f) A villamos kar bármely szak minden évfolyamán van lány hallgató.
- (g) „Minden asszony életében van egy pillanat,
Mikor olyat akar tenni, amit nem szabad.”
- (h) Van olyan a , hogy minden b -hez egyetlen x tartozik, melyre $a + x = b$.
- (i) Minden tengerész ismer olyan kikötőt, ahol van olyan kocsmá, ahol még nem járt.

3. feladat (1. Logikai jelek)

Egy udvarban kecskék és bolhák vannak. Azt, hogy egy bolha megcsípett egy kecskét, a $\Phi(B, K)$ formulával jelöljük. Írjuk le a következő állítások tagadását formulával és szöveggel is!

- (a) $\forall K : \exists B : \Phi(B, K)$
- (b) $\exists K : \forall B : \Phi(B, K)$
- (c) $\exists B : \forall K : \Phi(B, K)$
- (d) $\forall K : \forall B : \Phi(B, K)$
- (e) $\exists K : \exists B : \Phi(B, K)$
- (f) $\forall B : \exists K : \Phi(B, K)$.

4. feladat (1. Logikai jelek)

Alakítsuk konjunktív és diszjunktív normál formává!

- (a) $A \implies B$; (b) $\neg(A \vee B)$;
(c) $(A \wedge B) \vee C$; (d) $(A \wedge B) \vee (\neg C \implies D)$;
(e) $(A \wedge B) \implies (C \vee D)$; (f) $(A \oplus B) \vee (C \wedge D)$;
(g) $(P \oplus Q) \wedge (R \vee \neg(S \iff T))$; (h) $(P \wedge Q) \iff (\neg R \vee S)$;
(i) $(\neg A \wedge (B \vee C)) \vee (A \implies (C \wedge D))$;

5. feladat (1. Logikai jelek)

Van-e $\equiv$ vagy $\models$ kapcsolat a következő állítások között? Melyik tautológia? Melyik kontradikció?

- (a) $C \vee (A \wedge B)$; (b) $(A \oplus B) \implies (A \vee C)$;
(c) $(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge \neg C) \vee (B \wedge C) \vee (A \oplus C)$;
(d) $(C \vee A) \wedge (C \vee B)$; (e) $A \wedge B \wedge C$; (f) $A \wedge B \wedge \neg A$;

6. feladat (1. Logikai jelek)

Írjuk fel egy a következő igazság táblához tartozó formulát!

(a)

A	B	C	D	?
h	h	h	h	h
h	h	h	i	h
h	h	i	h	i
h	h	i	i	h
h	i	h	h	h
h	i	h	i	h
h	i	i	h	i
h	i	i	i	h

(b)

A	B	C	D	?
h	h	h	h	i
h	h	h	i	i
h	h	i	h	i
h	h	i	i	h
h	i	h	h	i
h	i	h	i	i
h	i	i	h	i
h	i	i	i	h

7. feladat (1. Logikai jelek)

Teljes-e az operátorok következő rendszere?

- (a) $\wedge, \vee, \neg$; (b) $\wedge, \neg$; (c) $\vee, \neg$;
(d) $\implies, \neg$; (e) $\implies, \vee$; (f) $\iff, \vee$;
(g) $\bar{\wedge}$; (h) $\bar{\vee}$; (i) $\oplus$;
(j) $\vee$; (k) $\wedge$;

8. feladat (1. Logikai jelek)

Legyen (X, d) metrikus tér, x_n sorozat X -ben, $f \subset X^2$ függvény. Mi a neve a következő predikátumoknak?

- (a) $\alpha(x_n) = \forall \varepsilon > 0 : \exists a \in X : \exists N \in \mathbb{N}^+ : n > N \implies d(x_n, a) < \varepsilon$
(b) $\beta(x_n) = \exists a \in X : \forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N}^+ : n > N \implies d(x_n, a) < \varepsilon$
(c) $\gamma(f(x)) = \forall \varepsilon > 0 : \forall a \in \text{Dom}_f : \exists \delta > 0 : x \in B_\delta(a) \cap \text{Dom}_f \implies f(x) \in B_\varepsilon(f(a))$;
(d) $\varphi(f(x)) = \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall a \in \text{Dom}_f : x \in B_\delta(a) \cap \text{Dom}_f \implies f(x) \in B_\varepsilon(f(a))$;

2. Halmazműveletek

1. feladat (2. Halmazműveletek)

Igazoljuk a következőket, ha C , A_i és B_j halmaz minden $i \in I$ és $j \in J$ esetén.

$$(a) \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \cap \left(\bigcup_{j \in J} B_j \right) = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{j \in J} (A_i \cap B_j)$$

$$(b) \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) \cup \left(\bigcap_{j \in J} B_j \right) = \bigcap_{i \in I} \bigcap_{j \in J} (A_i \cup B_j)$$

$$(c) C \setminus \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcap_{i \in I} (C \setminus A_i) \qquad (d) C \setminus \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} (C \setminus A_i)$$

2. feladat (2. Halmazműveletek)

Legyen A_n halmaz minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén.

(a) Mutassuk meg, hogy a $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$ halmaz elemei pontosan azok, amik elemei minden A_n -nek véges kivétellel.

(b) Mutassuk meg, hogy a $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^+} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ halmaz elemei pontosan azok, amik elemei végtelen sok A_n -nek.

3. feladat (2. Halmazműveletek)

Legyen X tetszőleges halmaz, $H = \{0, 1\}$, és $p : X \times X \rightarrow H$ szimmetrikus függvény. (Vagyis minden $a, b \in X$ esetén $p(a, b) = p(b, a)$.) Minden $A \subseteq X$ részhalmaz esetén legyen $A' = \{x \in X \mid \forall a \in A : p(x, a) = 1\}$.

(a) Mutassuk meg, hogy minden $A, B \subseteq X$ esetén, ha $A \subseteq B$, akkor $B' \subseteq A'$.

(b) Mutassuk meg, hogy minden $A \subseteq X$ esetén $A \subseteq A''$.

(c) Mutassuk meg, hogy minden $A \subseteq X$ esetén $A' = A'''$.

(d) Mi történik, ha $H = \mathbb{R}$?

(e) Mi történik, ha $H = \{1\}$?

4. feladat (2. Halmazműveletek)

Bizonyítsuk be az alábbiakat.

(a) Ha A halmaz, akkor $A = \bigcup \mathcal{P}(A)$. Sőt ha még $\mathcal{B}$ halmazok halmaz, akkor $\bigcup \mathcal{B} \subset A \iff \mathcal{B} \subset \mathcal{P}(A) \iff \mathcal{B} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$.

(b) Ha A halmaz, és $\{x, y\} \in A$, akkor $x, y \in \bigcup A$.

(c) Ha A halmaz, és $(x, y) \in A$, akkor $x, y \in \bigcup \bigcup A$.

(d) Ha f függvény, akkor $\text{Ran } f, \text{Dom } f \in \mathcal{P}(\bigcup \bigcup f)$.

(e) Ha $f : A \rightarrow B$ függvény, akkor $f \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)))$.

5. feladat (2. Halmazműveletek)

Legyen

a szingli axióma az, hogy ha A halmaz, akkor $\{A\}$ is az,

a páraxióma az, hogy ha A és B halmaz, akkor $\{A, B\}$ is az,

és a trió axióma pedig az, hogy ha A , B és C halmaz, akkor $\{A, B, C\}$ is az.

A fenti 3 axióma közötti 9 implikáció közül melyik igazságához mely axiómák kellenek a ZF rendszerből?

3. Számok, relációk, függvények, infimum és szuprémum

1. feladat (3. Számok, relációk, függvények, infimum és szuprémum)

Mutassuk meg, hogy a relációk kompozíciója asszociatív művelet. Vagyis legyenek A, B, C, D tetszőleges halmazok, valamint $F \subset A \times B$, $G \subset B \times C$, $H \subset C \times D$. Mutassuk meg, hogy

$$H \circ (G \circ F) = (H \circ G) \circ F.$$

2. feladat (3. Számok, relációk, függvények, infimum és szuprémum)

Mutassuk meg, hogy ha R reláció az X -en, és $A, B \subset X$, akkor

$$R[A] \subset B \iff R^{-1}[X \setminus B] \subset X \setminus A.$$

3. feladat (3. Számok, relációk, függvények, infimum és szuprémum)

Legyen A és B tetszőleges halmaz, és legyen $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}(A, B)$ olyan részhalmaza az A halmazból B halmazba képező függvények halmazának, melyre teljesül, hogy minden $h_1, h_2 \in \mathcal{H}$ esetén $h_1 \subset h_2$ vagy $h_2 \subset h_1$.

(a) Mutassuk meg, hogy $f = \bigcup \mathcal{H}$ függvény.

(b) Mutassuk meg, hogy ha minden $h \in \mathcal{H}$ függvény injektív, akkor az $f = \bigcup \mathcal{H}$ függvény is injektív.

4. feladat (3. Számok, relációk, függvények, infimum és szuprémum)

Injektívek illetve szürjektívek-e az alábbi hozzárendelések? Függvények-e egyáltalán?

(a) f hozzárendeli minden emberhez az édesanyját.

(b) g hozzárendeli minden édesanyához a legidősebb gyermekét.

(c) $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto [x]$, ahol $[x]$ jelöli x egészrészét.

(d) i minden másodfokú polinomhoz hozzárendeli a legnagyobb valós gyökét.

(e) $j : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x}{1-|x|}$.

5. feladat (3. Számok, relációk, függvények, infimum és szuprémum)

Legyen $f : X \rightarrow Y$ egy függvény. Mutassuk meg, hogy minden $A \subset X$ esetén $A \subset f^{-1}[f[A]]$, valamint $B \subset Y$ esetén $f[f^{-1}[B]] \subset B$.

6. feladat (3. Számok, relációk, függvények, infimum és szuprémum)

Mutassuk meg, hogy egy $f : X \rightarrow Y$ függvény pontosan akkor szürjektív, ha minden $B \subset Y$ esetén $f[f^{-1}[B]] = B$.

7. feladat (3. Számok, relációk, függvények, infimum és szuprémum)

Mutassuk meg, hogy egy $f : X \rightarrow Y$ függvény pontosan akkor injektív, ha minden $A \subset X$ esetén $A = f^{-1}[f[A]]$.

8. feladat (3. Számok, relációk, függvények, infimum és szuprémum)

- (a) A racionális számok között legyen $\leq$ egy reláció a Cauchy-sorozatok között úgy, hogy $x_n \leq y_n$ ha $x_n - y_n$ nullsorozat vagy $x_n < y_n$ minden n -re legfeljebb véges sok kivétellel. Melyik igaz?
- i. $\leq$ reflexív;
 - ii. $\leq$ irreflexív;
 - iii. $\leq$ szimmetrikus;
 - iv. $\leq$ antiszimmetrikus;
 - v. $\leq$ tranzitív;
 - vi. $\leq$ dichotóm;
 - vii. $\leq$ ekvivalencia;
 - viii. $\leq$ parciális rendezés;
 - ix. $\leq$ lineáris rendezés;
- (b) Mi változik, ha ugyanezt vizsgáljuk az egész számok között?
- (c) Mi változik, ha ugyanezt vizsgáljuk a valós számok között?

9. feladat (3. Számok, relációk, függvények, infimum és szuprémum)

Vezessük le a testaxiómákból, hogy ha $x, y \neq 0$, akkor $xy \neq 0$.

10. feladat (3. Számok, relációk, függvények, infimum és szuprémum)

Legyen $A \subset \mathbb{R}$ nem üres alulról korlátos halmaz. Mutassuk meg, hogy

- (a) $-A$ felülről korlátos halmaz;
- (b) létezik $\inf A$;
- (c) $\inf A = -(\sup(-A))$ teljesül.

11. feladat (3. Számok, relációk, függvények, infimum és szuprémum)

Legyen $A, B \subset \mathbb{R}$ nem üres felülről korlátos halmaz. Igazoljuk, hogy $A \cup B$ is felülről korlátos, valamint $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$ teljesül.

12. feladat (3. Számok, relációk, függvények, infimum és szuprémum)

Legyen $A, B \subset \mathbb{R}$ nem üres felülről korlátos halmaz. Igazoljuk, hogy $A + B$ is felülről korlátos, valamint $\sup A + \sup B = \sup(A + B)$ teljesül.

13. feladat (3. Számok, relációk, függvények, infimum és szuprémum)

Legyen $A, B \subset [0, \infty[$ nem üres felülről korlátos halmaz. Igazoljuk, hogy AB is felülről korlátos, valamint $(\sup A)(\sup B) = \sup(AB)$ teljesül.

4. Halmazok számossága

1. feladat (4. Halmazok számossága)

- (a) Adjunk meg $f : [0, 1] \rightarrow]0, 1]$ bijekciót!
- (b) Adjunk meg $f :]0, 1] \rightarrow]0, 1[$ bijekciót!
- (c) Adjunk meg $f : [0, 1] \rightarrow]0, 1[$ bijekciót!
- (d) Adjunk meg $f : [2, 5] \rightarrow]10, 20[$ bijekciót!
- (e) Adjunk meg $f : \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ bijekciót!

2. feladat (4. Halmazok számossága)

A végtelen sok pontot tartalmazó H halmaz elemei egyetlen síkon helyezkednek el úgy, hogy bármely kettő távolsága legalább 1. Mekkora H számossága?

3. feladat (4. Halmazok számossága)

A H halmaz elemeit az x és y betűkből álló véges és végtelen hosszúságú „szavak” alkotják. Mekkora H számossága? Mekkora H számossága, ha elhagyjuk mindazon szavakat, amelyek végtelen sok y -t tartalmaznak?

4. feladat (4. Halmazok számossága)

A H halmaz azokból az $a_1 = 1, a_2, a_3, \dots$ végtelen valós számsorozatokból áll, amelyekben két egymás után következő elem hányadosa 2 vagy $1/2$. Mekkora H számossága?

5. feladat (4. Halmazok számossága)

Lefedhető-e megszámlálhatóan sok egyenessel az $x^2 + y^2 = 1$ körvonalnak azon pontjai, melyekre $x > 0$ és $y > 0$?

6. feladat (4. Halmazok számossága)

Igazoljuk, hogy az alábbi halmazok kontinuum számosságúak.

(a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$;

(b) $\bigcup_{x \in \mathbb{R}} A_x$, ahol minden $x \in \mathbb{R}$ esetén A_x kontinuum számosságú.

7. feladat (4. Halmazok számossága)

Igazoljuk, hogy az alábbi halmazok megszámlálhatóan végtelen számosságúak.

(a) $2\mathbb{N}$ (páros számok halmaza);

(b) $2\mathbb{N} + 1$ (páratlan számok halmaza);

(c) $\{2^k \mid k \in \mathbb{N}\}$;

(d) $\{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ prím}\}$.

8. feladat (4. Halmazok számossága)

Igazoljuk, hogy az egész együtthatós polinomok gyökeinek a halmaza (*algebrai egészek halmaza*) megszámlálható. Azaz

$$\left| \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{N}^+ \exists a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{Z} : \exists a_n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} : \sum_{k=0}^n a_k x^k = 0 \right\} \right| = |\mathbb{N}|.$$

Használjuk fel, hogy egy n -edfokú egyenletnek legfeljebb n különböző gyöke lehet.

9. feladat (4. Halmazok számossága)

A H halmazt azok a $[0, 1]$ intervallumbeli valós számok alkotják, amelyek végtelen tizedestört alakjában minden második tizedesjegy 0. Mekkora H számossága?

10. feladat (4. Halmazok számossága)

Létezik-e minden t pozitív valós számhoz olyan térbeli háromszög, melynek területe t , csúcsainak koordinátái pedig racionális számok?

11. feladat (4. Halmazok számossága)

Adjuk meg az α számosságtól függően a következő számosságokat!

(a) $\aleph_0 + \alpha$;

(b) $\mathfrak{c} + \alpha$;

(c) $\aleph_0 \alpha$;

(d) $\mathfrak{c} \alpha$;

Hol tudjuk konstrukcióval igazolni (konkrét függvénnyel) az eredményt?

5. Függvénysorozatok

1. feladat (5. Függvénysorozatok)

Mutassuk meg, hogy az $f_n(x) = x^n$ függvénysorozat a $[0, 1]$ intervallumon pontonként konvergens, de nem egyenletesen konvergens!

Milyen $b \in \mathbb{R}^+$ esetén lesz f_n egyenletesen konvergens a $[0, b]$ intervallumon?

2. feladat (5. Függvénysorozatok)

Határozzuk meg az alábbi függvénysorozatok konvergenciatartományát és határfüggvényét!

$$(a) f_n(x) = \log^n x; \quad (b) f_n(x) = n \sin \frac{x}{n}; \quad (c) f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^{2n}}; \quad (d) f_n(x) = \frac{2nx^4}{n^2x^4+n+3};$$

3. feladat (5. Függvénysorozatok)

Határozzuk meg az alábbi függvénysorozat határfüggvényét, valamint döntsük el, hogy egyenletesen konvergál-e a $\text{Dom } f$ halmazon!

$$\begin{aligned} (a) f_n(x) &= \frac{1}{x^n}; & (b) f_n(x) &= \frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}; & (c) f_n(x) &= \frac{2x^{2n}}{1+x^{4n}}; \\ (d) f_n(x) &= \frac{e^{nx}-1}{e^{nx}+1}; & (e) f_n(x) &= n \log \left(1 + \frac{x}{n}\right); & (f) f_n(x) &= \frac{1}{(x+n)^2}; \\ (g) f_n(x) &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^x}; & (h) f_n(x) &= n \sin \frac{x}{n}; & (i) f_n(x) &= \frac{2}{\pi} \arctg nx; \\ (j) f_n(x) &= x^n - x^{n+1}; & (k) f_n(x) &= \sin^n x; & (l) f_n(x) &= xe^{-nx}; \end{aligned}$$

4. feladat (5. Függvénysorozatok)

Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi függvénysorozatok egyenletesen konvergensek-e az adott intervallumon, ahol $a \in \mathbb{R}^+$ paraméter!

$$(a) f_n(x) = e^{-nx}, I_1 = [0, \infty[, I_2 = [a, \infty[; \quad (b) f_n(x) = xe^{-nx}, I_1 = [0, \infty[, I_2 = [0, a];$$

5. feladat (5. Függvénysorozatok)

Egyenletesen konvergensek-e az alábbi függvénysorozatok a konvergenciatartományukon? Adjuk meg azt a legnagyobb tartományt, ahol egyenletesen konvergensek!

$$\begin{aligned} (a) f_n(x) &= \frac{2nx}{1+n^2x^2}; & (b) f_n(x) &= \frac{nx}{n+x}; & (c) f_n(x) &= \frac{x^n}{1+x^{2n}}; \\ (d) f_n(x) &= x^n e^{-nx}; & (e) f_n(x) &= nxe^{-nx}; & (f) f_n(x) &= \frac{\ln n^x}{n^x}, x > 0; \\ (g) f_n(x) &= n(\sqrt[n]{x} - 1), x > 0; \end{aligned}$$

6. feladat (5. Függvénysorozatok)

Mutassuk meg, hogy az $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x^2 & \text{ha } 0 \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ n^2 \left(\frac{2}{n} - x\right) & \text{ha } \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n}, \\ 0 & \text{ha } \frac{2}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

függvénysorozat nem egyenletesen konvergens!

7. feladat (5. Függvénysorozatok)

Bizonyítsuk be, hogy ha az $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ monoton növekedő függvényekből álló sorozat pontonként konvergensek I -n, akkor a határfüggvény is monoton növekedő.

8. feladat (5. Függvénysorozatok)

Legyen $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény, és

$$f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = g(x)x^n, \quad (n \in \mathbb{N}^+).$$

Mutassuk meg, hogy az f_n függvénysorozat pontosan akkor egyenletesen konvergens, ha $g(1) = 0$.

9. feladat (5. Függvénysorozatok)

Határozzuk meg a következő határértéket!

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_2^5 nxe^{-nx} dx$$

$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \frac{\arctg n^5 x^2}{x + \sqrt{n}} dx;$$

$$(d) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{e^{nx}} dx;$$

6. Függvénysorok**1. feladat (6. Függvénysorok)**

Határozzuk meg az alábbi függvénysorok konvergenciatartományát.

$$(a) \sum \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^n;$$

$$(b) \sum \frac{x^2}{(1+x^2)^{2n}};$$

$$(c) \sum \frac{\ln x}{(x+n)(x+n+1)};$$

$$(d) \sum \frac{\cos nx}{n^4 + x^2};$$

$$(e) \sum \frac{1}{1+x^{2n}};$$

$$(f) \sum \frac{(-1)^n}{n^x};$$

2. feladat (6. Függvénysorok)

Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi függvénysorok egyenletesen konvergensek-e a konvergenciatartományon!

$$(a) \sum x^3 e^{-nx};$$

$$(b) \sum \left(\frac{x}{n} \right)^n;$$

$$(c) \sum \frac{1}{n} e^{-nx};$$

$$(d) \sum \frac{nx}{e^{nx}};$$

$$(e) \sum \arctg \left(\frac{2x}{x^2 + n^2} \right);$$

$$(f) \sum \sin \left(\frac{x}{n} + n\pi \right);$$

3. feladat (6. Függvénysorok)

Döntsük el, hogy egyenletesen konvergensek-e az alábbi függvénysorok a megadott T tartományon!

$$(a) \sum \frac{x + (-1)^n n}{x^2 + n^2}, T = [-a, a]$$

$$(b) \sum \frac{(-1)^n x^2}{(1+x^2)^n}, T = \mathbb{R}$$

$$(c) \sum (-1)^n \frac{(1-x)x^n}{(1-x^{2n})}, T = (0, 1)$$

$$(d) \sum \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}, T = [0, 2\pi]$$

$$(e) \sum \frac{\cos^2(nx)}{n^2}, T = \mathbb{R}$$

4. feladat (6. Függvénysorok)

Határozzuk meg az alábbi függvénysorok konvergenciatartományát és összegfüggvényét!

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x)^n} & \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} & \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^n \\ \text{(d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^{n+1}}{(x-1)^n} & \text{(e)} \sum_{n=1}^{\infty} \sin^{2n} x & \text{(f)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln x}{(x+n)(x+n+1)} \\ \text{(g)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{e^{nx}} & \text{(h)} \sum_{n=1}^{\infty} (\sin x)^{2n} \cos x & \text{(i)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^2}{(1+x^2)^n} \end{array}$$

5. feladat (6. Függvénysorok)

Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $[a, b]$ intervallumon

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b \frac{x^n}{e^{nx}} dx = \int_a^b \frac{x}{e^x - x} dx.$$

6. feladat (6. Függvénysorok)

Igazoljuk az alábbi azonosságokat!

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(x^2 e^{-nx} + \frac{1}{2^n} \right) = 1 & \text{(b)} \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{1+n^2 x^2} = \frac{\pi^2}{6} \\ \text{(c)} \lim_{x \rightarrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} (1-x)^2 x^n = 0 & \end{array}$$

7. feladat (6. Függvénysorok)

Bizonyítsuk be, hogy az

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

függvény folytonos és akárhányszor deriválható $(1, \infty)$ -n.

8. feladat (6. Függvénysorok)

Igazoljuk a függvénysorok deriváltjára kapott kifejezéseket!

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \left(\sum \arctg \frac{x}{n^2} \right)' = \sum \frac{n^2}{n^4 + x^2}; & \text{(b)} \left(\sum \frac{1}{n^3} e^{-nx^2} \right)' = -2x \sum \frac{1}{n^2} e^{-nx^2}; \end{array}$$

9. feladat (6. Függvénysorok)

Legyen $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg(nx)}{2^{n-1}}$ és $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg\left(\frac{1-x}{n}\right)}{n+1}$! Határozzuk meg az $f'(0)$ és a $g'(1)$ értékét!

7. Hatványsorok

1. feladat (7. Hatványsorok)

Mely valós x paraméterek esetén konvergensek az alábbi sorok?

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \sum nx^n; & \text{(b)} \sum \frac{n+2}{n+1} x^n; & \text{(c)} \sum 3^{n+1} x^n; \\ \text{(d)} \sum \frac{x^{2n}}{(2n)!}; & \text{(e)} \sum \frac{(-1)^n (2n+1)}{(2n)!} (x+7)^n; & \text{(f)} \sum \frac{n+1}{9^n} (x-2)^{2n}; \end{array}$$

2. feladat (7. Hatványsorok)

Határozzuk meg az alábbi hatványsorok konvergenciasugarát!

$$(a) \sum \frac{(n!)^3}{(3n)!} x^n; \quad (b) \sum \frac{(n+2)^{n^2}}{(n+6)^{n^2+1}} x^n; \quad (c) \sum \frac{(n+1)^n}{n!} x^n;$$

3. feladat (7. Hatványsorok)

Igazoljuk, hogy

$$(a) \text{ a } \sum \frac{(-1)^n}{n9^n} x^n \text{ hatványsor egyenletesen konvergens a } [-8, 9] \text{ halmazon};$$
$$(b) \text{ a } \sum \frac{(-1)^n}{n9^n} x^{2n} \text{ hatványsor egyenletesen konvergens a } [-3, 3] \text{ halmazon}.$$

4. feladat (7. Hatványsorok)

Tekintsük a $\sum (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ hatványsort!

$$(a) \text{ Mutassuk meg, hogy a hatványsor egyenletesen konvergens a } [0, 1] \text{ halmazon}.$$
$$(b) \text{ Igazoljuk, hogy } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}!$$

5. feladat (7. Hatványsorok)

Adjuk meg az alábbi hatványsorok konvergenciatartományát és összegfüggvényét!

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}; \quad (b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)x^n}{3^{n+1}}; \quad (c) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{5^{n+2}} x^n;$$
$$(d) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^{n+1}}{n+1}; \quad (e) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)x^n;$$

6. feladat (7. Hatványsorok)

Mutassuk meg, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ sor négyzete, azaz önmagával vett Cauchy-szorzata és derivált sora azonos.

8. Taylor-sorok

1. feladat (8. Taylor-sorok)

Határozzuk meg az alábbi függvények adott x_0 körüli Taylor-sorát és konvergenciatartományát! Előállítja-e a függvényt a Taylor-sor a konvergenciatartományon?

$$(a) f(x) = 6x^3 - 2x^2 + 3, \quad x_0 = 1, \quad (b) f(x) = e^{-2x+1}, \quad x_0 = 3,$$
$$(c) f(x) = \sin^2 x, \quad x_0 = 0, \quad (d) f(x) = \frac{x}{(1-x)(1-x^2)}, \quad x_0 = 0,$$
$$(e) f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad x_0 = 0, \quad (f) f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1-x}, \quad x_0 = 0$$
$$(g) f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x_0 = 0 \quad (h) f(x) = \ln \cos x, \quad x_0 = 0$$

2. feladat (8. Taylor-sorok)

Számoljuk ki az alábbi integrálokat 10^{-5} pontossággal!

(a) $\int_0^1 \cos x^2 \, dx;$

(b) $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} \, dx;$

(c) $\int_0^1 \frac{\operatorname{sh} x}{x} \, dx;$

(d) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}};$

3. feladat (8. Taylor-sorok)

A binomiális sorfejtés segítségével írjuk fel az arctg , $\arcsin$, arsh és a $\sqrt[3]{1+x^2}$ függvény 0 körüli 9-ed rendű Taylor-polinomját.

4. feladat (8. Taylor-sorok)

Határozzuk meg $k = 100$ illetve $k = 101$ esetén $\operatorname{arsh}^{(k)}(0)$ és $\operatorname{arctg}^{(k)}(0)$ értékét.

5. feladat (8. Taylor-sorok)

Állítsuk elő hatványsor alakban a $] -1, 1[$ intervallumon az arctg , $\arcsin$, arsh és az $\ln(1+x)$ függvényt!

6. feladat (8. Taylor-sorok)

A Taylor-sorfejtés segítségével igazoljuk, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén konvergensek az alábbi sorok.

(a) $\sum \left(1 - \cos \frac{x}{k}\right);$

(b) $\sum \left(\frac{x}{k} - \sin \frac{x}{k}\right);$

7. feladat (8. Taylor-sorok)

Határozzuk meg numerukisan az $e^{0.2}$, $\sqrt[4]{17}$ és $\cos(0.5)$ kifejezés értékét három tizedesjegy pontossággal!

8. feladat (8. Taylor-sorok)

Az integrandust az ötödfokú Taylor-polinomjával közelítve adjunk becslést az

(a) $\int_0^{0.5} \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} \, dx;$

(b) $\int_0^{0.2} \frac{e^{-x} - 1}{x} \, dx;$

integrálokra, valamint becsüljük meg a hibát!