

Kalkulus 1

Pataki Gergely

BME

2013. május 15.–2024. december 6.

pataki@math.bme.hu
math.bme.hu/~pataki/crs/kalk1

Logikai jelek

operátorok:

		$\neg$	$\wedge$	$\vee$	$\otimes$	$\implies$	$\iff$
		negáció	és	vagy	kizáró vagy	implikáció	ekvivalencia
a	b	$\neg a$	$a \wedge b$	$a \vee b$	$a \otimes b$	$a \implies b$	$a \iff b$
i	i	h	i	i	h	i	i
i	h	h	h	i	i	h	h
h	i	i	h	i	i	i	h
h	h	i	h	h	h	i	i

igazságtábla

Logikai jelek

operátorok:

		$\neg$	$\wedge$	$\vee$	$\otimes$	$\implies$	$\iff$
		negáció	és	vagy	kizáró vagy	implikáció	ekvivalencia
a	b	$\neg a$	$a \wedge b$	$a \vee b$	$a \otimes b$	$a \implies b$	$a \iff b$
i	i	h	i	i	h	i	i
i	h	h	h	i	i	h	h
h	i	i	h	i	i	i	h
h	h	i	h	h	h	i	i

igazságtábla

Ugyanazt jelentik a következő párok:

1.	$a \implies b$	$(\neg a) \vee b$	
2.	$a \implies b$	$(\neg b) \implies (\neg a)$	kontrapozíció
3.	$a \vee b$	$b \vee a$	$\vee$ kommutatív
4.	$a \wedge b$	$b \wedge a$	$\wedge$ kommutatív
5.	$a \otimes b$	$b \otimes a$	$\otimes$ kommutatív
6.	$a \iff b$	$b \iff a$	$\iff$ kommutatív
7.	a	$a \vee a$	$\vee$ idempotens
8.	a	$a \wedge a$	$\wedge$ idempotens
9.	a	$\neg(\neg a)$	$\neg$ involutív

Logikai jelek

operátorok:

		$\neg$	$\wedge$	$\vee$	$\otimes$	$\implies$	$\iff$
		negáció	és	vagy	kizáró vagy	implikáció	ekvivalencia
a	b	$\neg a$	$a \wedge b$	$a \vee b$	$a \otimes b$	$a \implies b$	$a \iff b$
i	i	h	i	i	h	i	i
i	h	h	h	i	i	h	h
h	i	i	h	i	i	i	h
h	h	i	h	h	h	i	i

igazságtábla

Ugyanazt jelentik a következő párok:

- | | | | |
|-----|---------------------------|----------------------------------|---|
| 10. | $(a \vee b) \vee c$ | $a \vee (b \vee c)$ | $\vee$ asszociatív |
| 11. | $(a \wedge b) \wedge c$ | $a \wedge (b \wedge c)$ | $\wedge$ asszociatív |
| 12. | $(a \otimes b) \otimes c$ | $a \otimes (b \otimes c)$ | $\otimes$ asszociatív |
| 13. | $(a \iff b) \iff c$ | $a \iff (b \iff c)$ | $\iff$ asszociatív |
| 14. | $a \vee (b \wedge c)$ | $(a \vee b) \wedge (a \vee c)$ | $\vee$ disztributív $\wedge$ -ra |
| 15. | $a \wedge (b \vee c)$ | $(a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ | $\wedge$ disztributív $\vee$ -ra |
| 16. | $a \otimes b$ | $\neg(a \iff b)$ | $\otimes$ különbözőek; $\iff$ egyformák |
| 17. | $\neg(a \vee b)$ | $(\neg a) \wedge (\neg b)$ | de Morgan |
| 18. | $\neg(a \wedge b)$ | $(\neg a) \vee (\neg b)$ | de Morgan |

Logikai jelek

kvantorok: univerzális, egzisztenciális: $\forall, \exists$

Ha az a logikai formulának van egy szabad változója, akkor $\forall x : a$ vagy $\forall x : a(x)$ azt jelenti, hogy bármely x változó esetén igaz az a formula. Ugyanígy $\exists x : a$ vagy $\exists x : a(x)$ azt jelenti, hogy létezik olyan x változó ami esetén igaz a .

Logikai jelek

kvantorok: univerzális, egzisztenciális: $\forall, \exists$

Ha az a logikai formulának van egy szabad változója, akkor $\forall x : a$ vagy $\forall x : a(x)$ azt jelenti, hogy bármely x változó esetén igaz az a formula. Ugyanígy $\exists x : a$ vagy $\exists x : a(x)$ azt jelenti, hogy létezik olyan x változó ami esetén igaz a .

Használjuk még a $\exists!$ jelet. $\exists! x : a(x)$ azt jelenti, hogy létezik pontosan egy olyan x ami esetén igaz a .

Logikai jelek

kvantorok: univerzális, egzisztenciális: $\forall, \exists$

Ha az a logikai formulának van egy szabad változója, akkor $\forall x : a$ vagy $\forall x : a(x)$ azt jelenti, hogy bármely x változó esetén igaz az a formula. Ugyanígy $\exists x : a$ vagy $\exists x : a(x)$ azt jelenti, hogy létezik olyan x változó ami esetén igaz a .

Használjuk még a $\exists!$ jelet. $\exists! x : a(x)$ azt jelenti, hogy létezik pontosan egy olyan x ami esetén igaz a .

Ugyanazt jelentik a következő párok:

19.

$\neg \forall x : a$	$\exists x : \neg a$
----------------------	----------------------
20.

$\neg \exists x : a$	$\forall x : \neg a$
----------------------	----------------------

Halmaz axiómák ZFC

$$\{1, 2\} = \{1, 1, 2\} = \{2, 1\} = \{1, 2, 2, 1, 2\}$$

Ha x bármi (pl egy halmaz) és A egy halmaz, akkor $x \in A$ vagy $x \notin A$.

Ha A és B halmaz, akkor

- ▶ $A \subset B$, ha $\forall x \in A : x \in B$, vagyis $x \in A \implies x \in B$.
- ▶ $A = B$, ha $A \subset B \wedge B \subset A$

Néhány tisztázandó kérdés

- ▶ Lehet-e egy halmaz eleme egy másik halmaznak?
- ▶ Lehet-e egy halmaz eleme önmagának?
- ▶ Lehet-e egy halmaznak eleme minden halmaz?
- ▶ Hogy konstruálhatunk halmazokat?

Halmaz axiómák ZFC

$$\{1, 2\} = \{1, 1, 2\} = \{2, 1\} = \{1, 2, 2, 1, 2\}$$

Ha x bármi (pl egy halmaz) és A egy halmaz, akkor $x \in A$ vagy $x \notin A$.

Ha A és B halmaz, akkor

- ▶ $A \subset B$, ha $\forall x \in A : x \in B$, vagyis $x \in A \implies x \in B$.
- ▶ $A = B$, ha $A \subset B \wedge B \subset A$

Néhány tisztázandó kérdés

- ▶ Lehet-e egy halmaz eleme egy másik halmaznak?
- ▶ Lehet-e egy halmaz eleme önmagának?
- ▶ Lehet-e egy halmaznak eleme minden halmaz?
- ▶ Hogy konstruálhatunk halmazokat?

Részhalmazaxióma

Ha a egy formula és A egy halmaz, akkor létezik az A halmaz a tulajdonságú elemeiből álló halmaz.

$$\{x \in A \mid a(x)\}$$

Műveletek halmazokkal

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{x \mid x \in A \text{ vagy } x \in B\} && (\text{unió vagy egyesítés}) \\ A \cap B &= \{x \mid x \in A \text{ és } x \in B\} && (\text{metszet vagy közös rész}) \\ A \setminus B &= \{x \mid x \in A \text{ és } x \notin B\} && (\text{különbség}) \end{aligned}$$

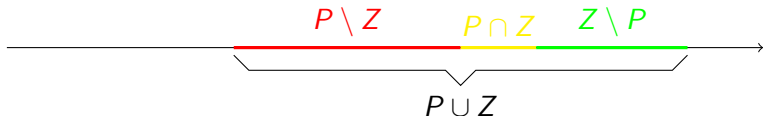
Ábrázoljuk egy számegyenesen a valós számok P részhalmazát pirossal,



és egy másikon a Z részhalmazt zölddel!

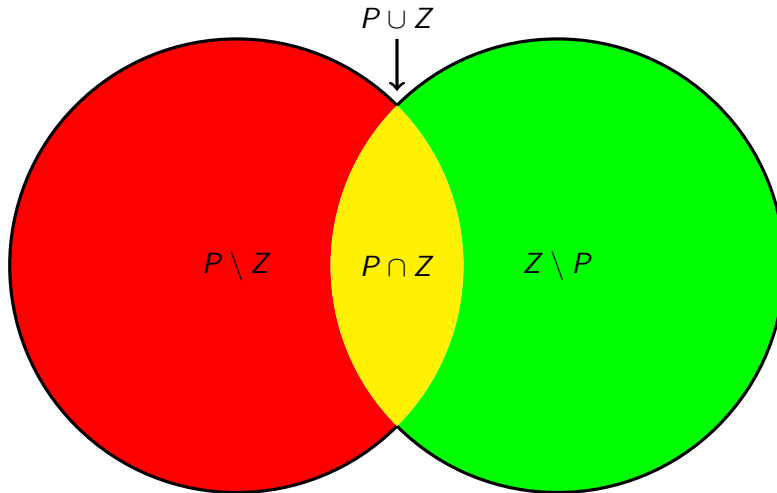


Ha egymásra helyezzük őket, akkor sárga lesz a $P \cap Z$, piros marad a $P \setminus Z$, zöld marad a $Z \setminus P$, és az összes színes rész lesz a $P \cup Z$.



Azt mondjuk, hogy A és B halmaz **diszjunkt**, ha $A \cap B = \emptyset$.

Venn-diagram



1. $A \cap B = B \cap A$; (metszet kommutatív)
2. $A \cup B = B \cup A$; (unió kommutatív)
3. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$; (metszet asszociatív)
4. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$; (unió asszociatív)
5. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$; (metszet disztributív az unióra)
6. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$; (unió disztributív a metszetre)
7. $A = A \cap A = A \cup A$; (metszet és unió idempotens)

Ha adott az X alaphalmaz, és csak ennek részhalmazzaival dolgozunk, akkor beszélhetünk egy A halmaz **komplementeréről**.

$$\bar{A} = X \setminus A$$

Legyen X alaphalmaz és $A, B, C \subset X$. Ekkor

8. $(A \subset B) \iff (\bar{B} \subset \bar{A}) \iff (\bar{A} \cup B = X) \iff (A \cap \bar{B}) = \emptyset$;
9. $A = \bar{\bar{A}}$; (komplementerképzés involutív)
10. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ és $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$; (de Morgan)

Unió axióma

Ha adott egy X alaphalmaz, egy I indexhalmaz úgy, hogy $\forall i \in I : A_i \subset X$, akkor

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in X \mid \exists i \in I : x \in A_i\}.$$

Illetve, ha $\forall A \in \mathcal{A} : A \subset X$, akkor

$$\bigcup \mathcal{A} = \{x \in X \mid \exists A \in \mathcal{A} : x \in A\}.$$

Az unió axióma szerint ha egy halmaz elemei halmazok, akkor az összes elem uniója is halmaz.

Ha $\mathcal{A}$ halmazok halmaza, akkor létezik olyan X halmaz, amire

$$\forall A \in \mathcal{A} : \forall x \in A : x \in X.$$

Könnyű látni, hogy

$$\bigcup \emptyset = \emptyset,$$

viszont

$$\bigcap \emptyset = X$$

csak akkor értelmes, ha van X alaphalmaz.

Hatványhalmaz axióma

Ha X egy halmaz, akkor létezik olyan $\mathcal{H}$ halmaz, amire

$$\forall A \subset X : A \in \mathcal{H}.$$

Így biztosan minden halmaznak van **hatványhalmaza**, aminek elemei pontosan az eredeti halmaz részhalmazai.

Jele

$$\mathcal{P}(X), \quad \text{vagy} \quad 2^X, \quad \text{vagy} \quad \text{Exp}(X).$$

Műveletek halmazokkal

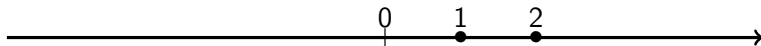
Rendezett párnál számít a sorrend.

$$(1, 2) \neq (2, 1)$$

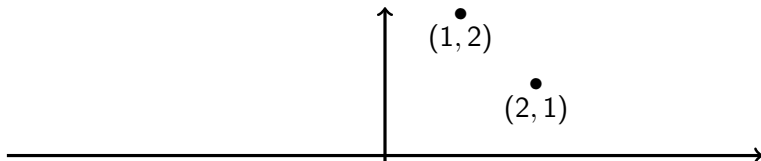
Megjegyzés

$$(a, b) = \{\{a, b\}, \{a\}\}$$

A valós számokat számegyenesen szemléltetjük.



Valós számokból álló rendezett párokat pedig a koordinátasíkon.



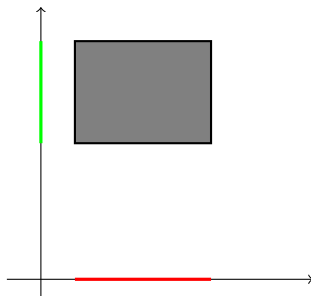
Descartes-szorzat

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A \text{ és } b \in B\} \quad (\text{Descartes-szorzat})$$

Megjegyzés

Ez biztosan halmaz, mert $(a, b) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$.

Az előző *P* és *Z* halmazok Descartes-szorzatát a koordinátságokon szemléltetjük.



$A \times A$ helyett használhatjuk az A^2 jelölést is.

Reláció

Definíció

Ha $R \subset X \times Y$, akkor azt mondjuk, hogy R egy **reláció** X és Y között.

- ▶ Ha $x \in X$, akkor **R általi képének** nevezzük az $R(x) = \{y \in Y \mid (x, y) \in R\}$ halmazt.
- ▶ Ha $A \subset X$, akkor **R általi képének** nevezzük az $R[A] = \bigcup_{x \in A} R(x)$ halmazt.
- ▶ Az R reláció **értelmezési tartományának** nevezzük a $\text{Dom } R = \{x \in X \mid R(x) \neq \emptyset\}$ halmazt.
- ▶ Az R reláció **értékkészletének** nevezzük a $\text{Ran } R = \{y \in Y \mid R^{-1}(y) \neq \emptyset\}$ halmazt.
- ▶ Az R reláció A **halmazra vett megszorításának** nevezzük az $R|_A = R \cap (A \times Y)$ halmazt.

Tétel

$$\text{Dom } R|_A = A \cap \text{Dom } R \quad \text{és} \quad \text{Ran } R|_A = R[A], \text{ ha } A \subset X.$$

Definíció

Ha $R \subset X \times Y$ egy reláció X és Y között, akkor az **inverzének** nevezzük az

$$R^{-1} = \{(y, x) \in Y \times X \mid (x, y) \in R\} \subset Y \times X$$

Y és X közötti relációt.

Tétel (Az inverzképzés involutív és monoton.)

Ha $R \subset S \subset X \times Y$ relációk X és Y között, akkor

$$(R^{-1})^{-1} = R \quad \text{és} \quad R^{-1} \subset S^{-1}$$

Megjegyzés

Azt mondjuk, hogy az $R \subset X \times Y$ reláció **totális**, ha $\text{Dom } R = X$, azaz

$$\forall x \in X : \exists y \in Y : (x, y) \in R.$$

Megjegyzés

Az $R \subset X \times Y$ relációt meghatározzák X elemeinek képei.

$$R = \bigcup_{x \in X} (\{x\} \times R(x))$$

Definíció

Az $S \subset X \times Y$ és $R \subset Y \times Z$ relációk **kompozíciójának** nevezzük azt az $R \circ S \subset X \times Z$ relációt, melyre minden $x \in X$ esetén

$$(R \circ S)(x) = R[S(x)].$$

Tétel

Ha $T \subset W \times X$, $S \subset X \times Y$ és $R \subset Y \times Z$, akkor

$$(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}, \quad \text{és} \quad R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T.$$

Definíció

Ha $R \subset X^2$, akkor azt mondjuk, hogy R egy **reláció** X -en.

A $\Delta_X = \{(x, x) \in X^2 \mid x \in X\}$ relációt **identikus reláció**nak nevezzük.

Az X^2 relációt **univerzális reláció**nak nevezzük.

Megjegyzés

Ilyenkor

$$R^2 = R \circ R \subset X^2.$$

Továbbá,

$$R^{-1} \subset X^2.$$

Bevezethetjük az

$$R^1 = R \subset X^2$$

és az

$$R^0 = \Delta_X \subset X^2$$

jelölést, mivel $\Delta_X \circ R = R$.

Definíció

Azt mondjuk, hogy $R \subset X^2$ reláció **ekvivalenciareláció**, ha

- ▶ **reflexív**, vagyis $R^0 = \Delta_X \subset R$, azaz $\forall x \in X : (x, x) \in R$,
- ▶ **szimmetrikus**, vagyis $R^{-1} \subset R$, azaz $\forall (x, y) \in R : (y, x) \in R$, és
- ▶ **transzítív**, vagyis $R^2 \subset R$, azaz $\forall (x, y), (y, z) \in R : (x, z) \in R$.

Tétel

Ha $R \subset X^2$ reláció az X -en, akkor

1. R reflexív $\implies R \subset R^2$.
2. R szimmetrikus $\iff R^{-1}$ szimmetrikus $\iff R = R^{-1}$.
3. R ekvivalencia $\iff R^{-1}$ ekvivalencia $\implies R = R^2$.

Definíció

Az $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ halmazrendszert az X **osztályozásának** nevezzük, ha $\mathcal{A}$ elemei páronként diszjunktak, $\emptyset \notin \mathcal{A}$ és $\bigcup \mathcal{A} = X$.

Megjegyzés

$\mathcal{A}$ elemei párinként diszjunktak, azt jelenti, hogy

$$\forall A, B \in \mathcal{A} : A \neq B \implies A \cap B = \emptyset.$$

Tétel

Ha R ekvivalenciareláció X -en, akkor $\mathcal{A} = \{R(x) | x \in X\}$ egy osztályozása X -nek.

Ha $\mathcal{A}$ egy osztályozása X -nek, akkor $\forall x \in X : \exists ! A_x \in \mathcal{A} : x \in A_x$. Legyen az R reláció olyan, hogy minden $x \in X$ esetén $R(x) = A_x$. Ekkor R egy ekvivalenciareláció X -en.

Definíció

Azt mondjuk, hogy $R \subset X^2$ reláció **parciális rendezés**, ha

- ▶ reflexív,
- ▶ **antiszimmetrikus**, vagyis $R^{-1} \cap R \subset \Delta_X$, azaz $\forall (x, y), (y, x) \in R : x = y$, és
- ▶ tranzitív.

Ha $\leq$ egy parciális rendezés az X halmazon, akkor az $(X, \leq)$ párt **parciálisan rendezett halmaznak** nevezzük.

Ha egyértelmű, mi a parciális rendezés, akkor az X halmazt is szoktuk parciálisan rendezett halmaznak nevezni. Rövid elnevezés **poset**.

Definíció

Legyen $(X, \leq)$ parciálisan rendezett halmaz, és $A \subset X$. Azt mondjuk, hogy

- ▶ $k \in X$ **felső korlátja** A -nak, ha $\forall a \in A : a \leq k$.
- ▶ $k \in X$ **alsó korlátja** A -nak, ha $\forall a \in A : a \geq k$.
- ▶ $k \in A$ **maximuma** A -nak, ha $\forall a \in A : a \leq k$.
- ▶ $k \in A$ **minimuma** A -nak, ha $\forall a \in A : a \geq k$.

A -t **felülről (alulról) korlátosnak** nevezzük, ha létezik felső (alsó) korlátja.

A -t **korlátosnak** nevezzük, ha alulról és felülről is korlátos.

Az A felső (alsó) korlátjainak minimumát (maximumát) az A halmaz **pontos felső (alsó) korlátjának** nevezzük, ha létezik.

Az A halmaz maximumára és minimumára illetve pontos felső és alsó korlátjára a következő jelöléseket vezetjük be.

$$\max A, \quad \min A, \quad \sup A, \quad \inf A$$

Tétel

A maximum, minimum, pontos felső és alsó korlát egyértelmű, ha létezik.

Rendezés (lineáris rendezés)

Definíció

Azt mondjuk, hogy $R \subset X^2$ reláció **lineáris rendezés** (röviden **rendezés**), ha

- ▶ reflexív,
- ▶ antiszimmetrikus,
- ▶ tranzitív és
- ▶ **dichotóm**, vagyis $X^2 \subset R \cup R^{-1}$, azaz $\forall x, y \in X : (x, y) \in R \vee (y, x) \in R$.

Ha $\leq$ egy rendezés az X halmazon, akkor az $(X, \leq)$ párt **rendezett halmaznak** nevezzük.

Tétel

Ha $R \subset X^2$ reláció az X -en, akkor

$$R \text{ (parc.) rendezés} \iff R^{-1} \text{ (parc.) rendezés} \implies R^2 \text{ (parc.) rendezés.}$$

Definíció

Azt mondjuk, hogy $R \subset X^2$ parciális rendezés **jólrendezés**, ha X minden nem üres A részalmazának van minimuma. Ha $\leq$ egy jólrendezés az X halmazon, akkor az $(X, \leq)$ párt **jólrendezett halmaznak** nevezzük.

Tétel

Ha $\leq$ jólrendezés X -en, akkor lineáris rendezés is.

Definíció

Az $f \subset X \times Y$ X és Y közötti relációt **függvénynek** nevezzük, ha

$$(x, y), (x, z) \in f \implies y = z.$$

Ha még $\text{Dom}_f = X$, akkor az **X -et Y -ba képező függvény** elnevezést használjuk f -re, és ezt így jelöljük

$$f : X \rightarrow Y.$$

$(x, y) \in f$ és $y \in f(x)$ helyett szokásosan az $y = f(x)$ jelölést használjuk.

Definíció

Legyen X egy tetszőleges halmaz és $(Y, \leq)$ egy parciálisan rendezett halmaz. Azt mondjuk, hogy az $f : X \rightarrow Y$ függvény **alulról korlátos**, **felülről korlátos**, illetve **korlátos**, ha értékkészlete rendre alulról korlátos, felülről korlátos, illetve korlátos. (18)

Az f **szuprémumának** illetve **infimumának** és ha létezik **maximumának** illetve **minimumának** hívjuk rendre az értékkészlet szuprémumát illetve infimumát és maximumát illetve minimumát.

Definíció

Legyen $(X, \leq_X)$ és $(Y, \leq_Y)$ parciálisan rendezett halmaz. Azt mondjuk, hogy az $f : X \rightarrow Y$ függvény **monoton növő**, illetve **monoton csökkenő** ha $x \leq_X y$ esetén $f(x) \leq_Y f(y)$ illetve $f(y) \leq_Y f(x)$.

A fenti f függvényt **monoton**nak nevezzük, ha monoton növő vagy monoton csökkenő.

Legyen továbbá $<_X = \leq_X \setminus \Delta_X$ és $<_Y = \leq_Y \setminus \Delta_Y$. Azt mondjuk, hogy az $f : X \rightarrow Y$ függvény **szigorúan monoton növő**, illetve **szigorúan monoton csökkenő** ha $x <_X y$ esetén $f(x) <_Y f(y)$ illetve $f(y) <_Y f(x)$.

A fenti f függvényt **szigorúan monoton**nak nevezzük, ha szigorúan monoton növő vagy szigorúan monoton csökkenő.

Definíció

Azt mondjuk, hogy az $f : X \rightarrow Y$ függvény

- ▶ **injektív** vagy **invertálható**, ha inverze is függvény.
- ▶ **szürjektív**, ha $\text{Ran}_f = Y$.
- ▶ **bijektív**, ha injektív és szürjektív.

Megjegyzés

$f : X \rightarrow Y$ injektív / szürjektív / bijektív ha minden $y \in Y$ esetén létezik legfeljebb egy / legalább egy / pontosan egy $x \in X$, amire $y = f(x)$.

Ha $f : X \rightarrow Y$ bijekció, akkor inverze $f^{-1} : Y \rightarrow X$ is bijekció.

Tétel

Ha $g : X \rightarrow Y$ és $f : Y \rightarrow Z$ függvények, akkor $f \circ g : X \rightarrow Z$ is függvény. (f **külső** és g **belső** függvényekből álló **összetett függvény**nek nevezzük.)

Ha f és g injekció / szürjekció / bijekció, akkor $f \circ g$ is injekció / szürjekció / bijekció.

Számosság

Definíció

Azt mondjuk, hogy A és B halmazok **azonos számosságúak**, ha létezik $f : A \rightarrow B$ bijekció. Ezt így jelöljük: $A \sim B$ vagy $|A| = |B|$.

Tétel

Legyenek A , B és C halmazok. Ekkor

1. $A \sim A$ (mintha reflexív lenne)
2. ha $A \sim B$, akkor $B \sim A$ (mintha szimmetrikus lenne)
3. ha $A \sim B$ és $B \sim C$, akkor $A \sim C$ (mintha tranzitív lenne)

Megjegyzés

Ha X egy halmaz, akkor $\sim$ egy reláció, és így ekvivalenciareláció $\mathcal{P}(X)$ -en.

Definíció

Azt mondjuk, hogy az A halmaz **számossága kisebb vagy egyenlő** mint a B halmazé, ha létezik $f : A \rightarrow B$ injekció.

Ezt így jelöljük: $A \preceq B$ vagy $|A| \leq |B|$ vagy $B \succeq A$ vagy $|B| \geq |A|$.

Azt mondjuk, hogy az A halmaz **számossága kisebb** mint a B halmazé, ha $A \preceq B$ teljesül, de $A \sim B$ nem.

Ezt így jelöljük: $A \prec B$ vagy $|A| < |B|$ vagy $B \succ A$ vagy $|B| > |A|$.

Tétel

Ha A és B halmazok úgy, hogy $A \neq \emptyset$, akkor a következő állítások ekvivalensek:

1. $A \preceq B$;
2. $\exists g : B \rightarrow A$ szürjekció;
3. $\exists C \subset B : A \sim C$.

Megkonstruálhatóak a számosságok, de mi nem konstruáljuk meg ezeket.

Tétel (Cantor-tétel)

Ha A egy tetszőleges halmaz, akkor $A \prec \mathcal{P}(A)$.

Következmény

Nincs legnagyobb számosság.

Tétel

Nincs olyan halmaz, aminek minden számosság eleme.

Tétel (Tarski-féle fixponttétel)

Egy X halmaz esetén egy $\varphi : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ monoton függvénynek van fixpontja.
($\varphi : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ monoton azt jelenti, hogy $A \subset B \subset X \implies \varphi(A) \subset \varphi(B)$.
Fixpont $A \subset X$ halmazt jelent, amire $\varphi(A) = A$.)

Axióma (Kiválasztási-axióma)

Legyen I indexhalmaz, A_i halmaz minden $i \in I$ esetén, és $X = \bigcup_{i \in I} A_i$. Ekkor létezik $f : I \rightarrow X$ úgy, hogy $\forall i \in I : f(i) \in A_i$. (kiválasztási függvény)

Lemma (Zorn-lemma)

Legyen X parciálisan rendezett halmaz. Ha minden rendezett részhalmaza felülről korlátos, akkor létezik maximális eleme.

(Maximális elem olyan, aminél nincs nagyobb. (Mégsem feltétlenül maximum, mert lehet olyan elem, ami nem összehasonlítható vele.))

Tétel

Ha α, β, γ számosságok, akkor

- 1. $\alpha \leq \alpha$ (mintha reflexív lenne);*
- 2. $\alpha \leq \beta$ és $\beta \leq \alpha$ esetén $\alpha = \beta$ (mintha antiszimmetrikus lenne);*
- 3. $\alpha \leq \beta$ és $\beta \leq \gamma$ esetén $\alpha \leq \gamma$ (mintha tranzitív lenne);*
- 4. $\alpha \leq \beta$ vagy $\beta \leq \alpha$; (mintha dichotóm lenne).*

Megjegyzés

Számosságok tetszőleges, nem üres családjában van legkisebb.

Következmény

Ha X egy halmaz, akkor $\leq$ egy (lineáris) rendezés, sőt jólrendezés az $\mathcal{A} = \{|A| \mid A \subset X\}$ halmazon.

$(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ teljes rendezett test

Testaxiómák

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ test, azaz

- ▶ **nullelem:** $\exists 0 \in \mathbb{R} : x + 0 = x \quad (x \in \mathbb{R});$
- ▶ **additív inverz** ($y = -x$): $\forall x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} : x + y = 0;$
- ▶ **+ asszociatív:** $(x + y) + z = x + (y + z) \quad (x, y, z \in \mathbb{R});$
- ▶ **+ kommutatív:** $x + y = y + x \quad (x, y \in \mathbb{R});$
- ▶ **egységelem:** $\exists 1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : x1 = x \quad (x \in \mathbb{R});$
- ▶ **multiplikatív inverz** ($y = \frac{1}{x}$): $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0 : \exists y \in \mathbb{R} : xy = 1;$
- ▶ **· asszociatív:** $(xy)z = x(yz) \quad (x, y, z \in \mathbb{R});$
- ▶ **· kommutatív:** $xy = yx \quad (x, y \in \mathbb{R});$
- ▶ **· disztributív +-ra:** $x(y + z) = xy + xz \quad (x, y, z \in \mathbb{R});$

► **Kivonás:** $x - y = x + (-y)$ ($x, y \in \mathbb{R}$);

► **Osztás:** $\frac{x}{y} = x \cdot \frac{1}{y}$ ($x, y \in \mathbb{R}, y \neq 0$);

Tetszőleges $x, y, z \in \mathbb{R}$ esetén igazak a következők.

► $x + z = y + z \implies x = y$

► $x0 = 0$

$(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ rendezett test

$\leq$ egy rendezés $\mathbb{R}$ -en úgy, hogy a műveletek és a rendezés között van kapcsolat:

- ▶ **+** monoton: $x \leq y \implies x + z \leq y + z \quad (x, y, z \in \mathbb{R});$
- ▶ **$\cdot$** pozitív monoton: $x \leq y \implies xz \leq yz \quad (x, y, z \in \mathbb{R}, 0 \leq z);$

Szigorú monotonitás is adódik, nevezetesen

- ▶ $x < y \implies x + z < y + z$,
- ▶ ha $0 < z$, akkor $x < y \implies xz < yz$.

Tetszőleges $x, y, z \in \mathbb{R}$ esetén igazak a következők.

- ▶ $z \leq 0 \implies 0 \leq -z$
- ▶ $z \leq 0$ esetén $x \leq y \implies yz \leq xz$
- ▶ $0 \leq xx, 0 \leq 1$

A rendezés teljessége

Dedekind-axióma

Az $\mathbb{R}$ bármely nem üres, felülről korlátos részhalmazának van pontos felső korlátja.

Következmény

Az $\mathbb{R}$ bármely nem üres, alulról korlátos részhalmazának van pontos alsó korlátja.

Tétel (Dedekind-teljesség)

$(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ az egyetlen teljes rendezett test (legalábbis izomorfia erejéig).

Vagyis, ha $(\mathbb{S}, +_{\mathbb{S}}, \cdot_{\mathbb{S}}, \leq_{\mathbb{S}})$ is teljes rendezett test, akkor létezik $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}$ bijekció, ami művelet és rendezéstartó.

Ha $x, y \in \mathbb{R}$, akkor

- ▶ $f(x + y) = f(x) +_{\mathbb{S}} f(y)$;
- ▶ $f(x \cdot y) = f(x) \cdot_{\mathbb{S}} f(y)$;
- ▶ ha $x \leq y$, akkor $f(x) \leq_{\mathbb{S}} f(y)$.

Az $\mathbb{R}$ egy bővítése.

Jól használható lesz a következő.

Definíció

Az $\mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ halmazt **bővített valós számok halmazának** hívjuk, és bevezetjük rá a $\overline{\mathbb{R}}$ jelölést, azaz

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}.$$

A ∞ és $-\infty$ szimbólumok tehát nem számokat jelölnek. Erre a halmazra a műveletek csak részben terjeszthetők ki, ahogy ezt később alaposan fogjuk vizsgálni.

A $\leq$ relációt viszont egyszerűen kiterjeszthetjük úgy, hogy ha $x \in \overline{\mathbb{R}}$, akkor

$$-\infty \leq x \leq \infty.$$

Mi azonban csak korlátozottan fogjuk ezt használni, vagyis ha például azt írjuk, hogy $\varepsilon > 0$, akkor ε mindig csak (pozitív) valós számot jelöl.

Tágabb értelemben vett szuprénum és infimum

Definíció

Ha A felülről nem korlátos, akkor azt mondjuk, hogy $\sup A = \infty$.

Ha A alulról nem korlátos, akkor azt mondjuk, hogy $\inf A = -\infty$.

$\emptyset$ korlátos, de nincs legkisebb felső korlátja, se legnagyobb alsó korlátja, mivel minden valós szám felső korlát és alsó korlát is. Ezért azt mondjuk, hogy $\sup \emptyset = -\infty$ és $\inf \emptyset = \infty$.

Megjegyzés

Értelmezésünk szerint tehát az $\mathbb{R}$ bármely részhalmazának van szuprénuma és infimuma, csak ezek nem mindig (valós) számok. Röviden, ha $A \subset \mathbb{R}$, akkor $\exists \sup A, \inf A \in \overline{\mathbb{R}}$. Például $A \subset \mathbb{R}$ esetén $\sup A \in \mathbb{R}$ pontosan akkor, ha $A \neq \emptyset$ és felülről korlátos. Bizonyos jegyzetek csak ekkor értelmezik a szuprénumot, és más esetekben tágabb értelemben vett szuprénumról beszélnek.

Intervallumok

Definíció

Ha $a, b \in \mathbb{R}$, akkor **intervallum**nak nevezzük a következő halmazokat, és bevezetjük a következő jelöléseket.

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \quad \text{más jelölés: } (a, b)$$

$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} \quad \text{más jelölés: } [a, b)$$

$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} \quad \text{más jelölés: } (a, b]$$

Ezek korlátos intervallumok. Az elsőt **zárt**, így **kompakt**, a másodikat **nyílt**, a két utolsót pedig **félig nyílt intervallum**nak nevezzük.

Tétel (Cantor-féle metszet-tulajdonság)

Ha $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ elemei nem üres, kompakt intervallumok úgy, hogy $\subset$ lineáris rendezés $\mathcal{A}$ -n, akkor

$$\bigcap \mathcal{A} \neq \emptyset.$$

Definíció

Ha $a \in \mathbb{R}$, akkor **intervallum**nak nevezzük a következő halmazokat, és bevezetjük a következő jelöléseket.

$$]a, \infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$$

más jelölés: (a, ∞)

$$[a, \infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$$

más jelölés: $[a, \infty)$

$$]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$$

más jelölés: $(-\infty, a)$

$$]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$$

más jelölés: $(-\infty, a]$

$$]-\infty, \infty[= \mathbb{R}$$

más jelölés: $(-\infty, \infty)$

Ezek nem korlátos intervallumok. Az első és a harmadik nyílt, a második és negyedik zárt, az utolsó pedig egyszerre zárt és nyílt is.

Természetes számok halmaza. Jele $\mathbb{N}$.

Definíció

Az $\mathbb{R}$ legszűkebb olyan részhalmazát, amire

- ▶ $1 \in \mathbb{N}$;
- ▶ $n \in \mathbb{N} \implies n + 1 \in \mathbb{N}$;

teljesül **természetes számok halmazának** nevezzük.

Az egyértelműség kedvéért az alábbi jelöléseket fogjuk használni:

- ▶ Nem negatív egészek: $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$;
- ▶ Pozitív egészek: $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$;

Tétel

A definíció korrekt, azaz létezik legszűkebb ilyen halmaz.

Tétel (Archimédész-tulajdonság)

Minden $a, b \in \mathbb{R}$ esetén, ha $a > 0$, akkor létezik $n \in \mathbb{N}^+$ amire

$$b < na.$$

Speciálisan $a = 1$ esetén kapjuk, hogy $\mathbb{N}$ felülről nem korlátos.

A definíció adja a rekurzív definíció lehetőségét.

Tétel (Rekurzív definíció)

Tegyük fel, hogy szeretnénk definiálni egy f függvényt, amire $\text{Dom}_f = \mathbb{N}$.

- ▶ definiáljuk $f(1)$ -et;
- ▶ *rekurzió*: minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén definiált $f(n)$ felhasználásával definiáljuk $f(n+1)$ -et.

Ekkor az $f(n)$ függvény egyértelműen definiált.

Definíció

Definiáljuk a faktoriális úgy, hogy $! : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}^+$ és

- ▶ $0! = 1$
- ▶ $(n+1)! = n! \cdot (n+1)$, ha $n \in \mathbb{N}_0$.

Tétel (Teljes indukció)

Tegyük fel, hogy egy n -től függő állítás

- ▶ *igaz $n = 1$ esetén;*
- ▶ *indukciós lépés: ha igaz valamilyen n esetén, akkor n helyére $n + 1$ -et írva is igaz marad.*

Ekkor az állítás minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén igaz.

Következmény

1. $\min \mathbb{N}^+ = 1$.
2. $\mathbb{N}^+$ jólrendezett halmaz.

Feladat

Mutassuk meg, hogy

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \text{azaz}$$

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Tétel (Bernoulli-egyenlőtlenség)

Ha $n \in \mathbb{N}^+$ és $-1 \leq x$ akkor

$$1 + nx \leq (1 + x)^n.$$

Egyenlőség pontosan akkor, ha $n = 1$, vagy $x = 0$.

Tétel (Abel-féle szummációs formula)

$$\begin{aligned}\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n &= \\ &= [(\alpha_0 - \alpha_1)x_0 + (\alpha_1 - \alpha_2)(x_0 + x_1) + (\alpha_2 - \alpha_3)(x_0 + x_1 + x_2) + \cdots + \\ &\quad + (\alpha_n - \alpha_{n+1})(x_0 + \cdots + x_n)] + \alpha_{n+1}(x_0 + \cdots + x_n),\end{aligned}$$

azaz

$$\sum_{k=0}^n (\alpha_k x_k) = \sum_{k=0}^n \left((\alpha_k - \alpha_{k+1}) \sum_{j=0}^k x_j \right) + \alpha_{n+1} \sum_{k=0}^n x_k$$

Tétel (Mértani és számtani közép közötti egyenlőtlenség)

Ha $n \in \mathbb{N}^+$, és $x_1, \dots, x_n \in [0, \infty[$, akkor

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}.$$

Egyenlőség pontosan akkor, ha $x_1 = \dots = x_n$.

$$\mathbb{Z} = \{k \in \mathbb{R} \mid k \in \mathbb{N}^+ \text{ vagy } k = 0 \text{ vagy } -k \in \mathbb{N}^+\},$$

azaz

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Ez az $\mathbb{R}$ legszűkebb olyan additív részcsoportha, ami tartalmazza az egységelemet, azaz a legszűkebb olyan részhalmaz, aminek eleme 1, nem vezet ki belőle az összeadás, és minden elemnek van additív inverze.

Ez utóbbi tulajdonság különbözteti meg $\mathbb{N}$ -től, és emiatt lehet korlátlanul elvégezni a kivonást.

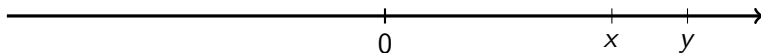
$$\mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists k \in \mathbb{Z} \text{ és } n \in \mathbb{N}^+ : x = \frac{k}{n}\}.$$

Ez az $\mathbb{R}$ legszűkebb részteste, azaz a legszűkebb olyan részhalmaz, ami test. Emiatt itt már az osztást is majdnem korlátlanul el lehet végezni. (0-val osztani semmit sem lehet, bármi mással, bármit eloszthatunk.)

Ez is rendezett test, így $\mathbb{R}$ -et csak a rendezés teljessége különbözteti meg $\mathbb{Q}$ -tól.

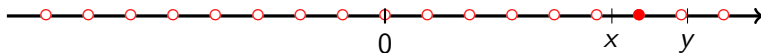
Tétel

$\mathbb{Q}$ sűrű $\mathbb{R}$ -ben a rendezés szerint, azaz bármely $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$ esetén létezik $z \in \mathbb{Q}$ úgy, hogy $x < z < y$.



Tétel

$\mathbb{Q}$ sűrű $\mathbb{R}$ -ben a rendezés szerint, azaz bármely $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$ esetén létezik $z \in \mathbb{Q}$ úgy, hogy $x < z < y$.



Tétel

Ha $n, m \in \mathbb{N}_0$ úgy, hogy $n < m$, akkor

$$\{k \in \mathbb{N}^+ | k \leq n\} \prec \{k \in \mathbb{N}^+ | k \leq m\}.$$

Definíció

Az X halmazt **végesnek** nevezzük, ha $\exists n \in \mathbb{N}_0 : X \sim \tilde{n}$, ahol $\tilde{n} = \{k \in \mathbb{N}^+ | k \leq n\}$. Azt mondjuk, hogy X számossága n , azaz $|X| = n$. Ha X nem véges, akkor azt mondjuk, hogy **végtelen**.

Ha $X \sim \mathbb{N}^+$, akkor azt mondjuk, hogy X **megszámlálhatóan végtelen**. Ilyenkor számosságára az $\aleph_0$ jelölést használjuk. Továbbá, az X halmazt **megszámlálhatónak** nevezzük, ha véges vagy megszámlálhatóan végtelen.

Ha $X \sim \mathcal{P}(\mathbb{N}^+)$, akkor azt mondjuk, hogy X számossága **kontinuum**. Ezt így jelöljük: $|X| = \mathfrak{c}$

Tétel

X halmaz esetén a következő állítások ekvivalensek.

- 1. X véges;*
- 2. bármely Y valódi részhalmazára $Y \prec X$.*
- 3. nincs megszámlálhatóan végtelen részhalmaza;*
- 4. nincs végtelen részhalmaza;*

Tétel

$$\aleph_0 = |\mathbb{N}^+| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}|$$

$$\mathfrak{c} = \mathbb{R} = \mathbb{C}$$

Ha $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, akkor $|I| \in \{0, 1, \mathfrak{c}\}$.

Véges halmaz maximuma és minimuma

Tétel

Ha $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ véges, akkor van maximuma és minimuma is.

Hatványozás

Nem negatív egész kitevő

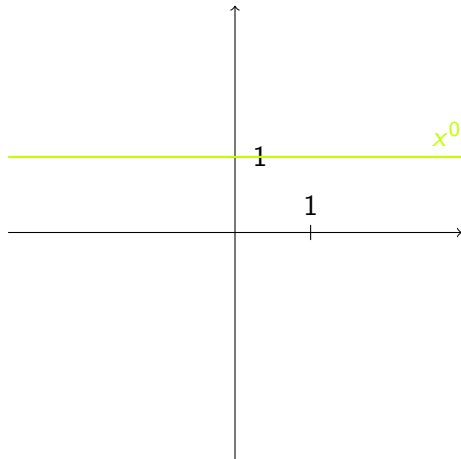
Definíció

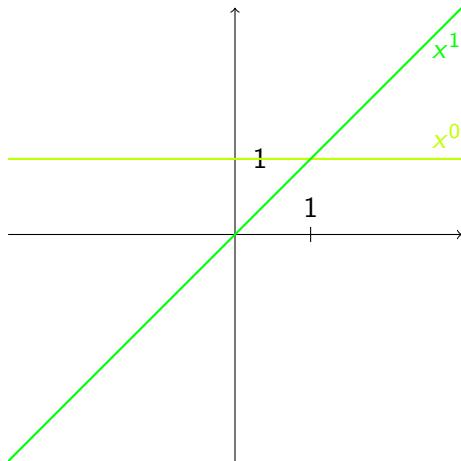
Az alábbi rekurzióval értelmezzük egy tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ olyan **hatványait**, ahol a kitevő nem negatív egész szám.

$$x^0 = 1,$$

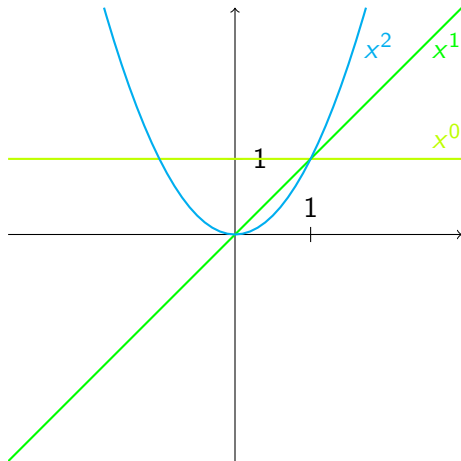
és ha már x^n -t értelmeztük valamely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén, akkor

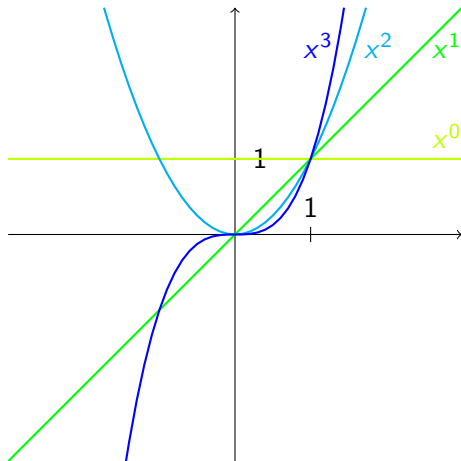
$$x^{n+1} = x \cdot x^n.$$

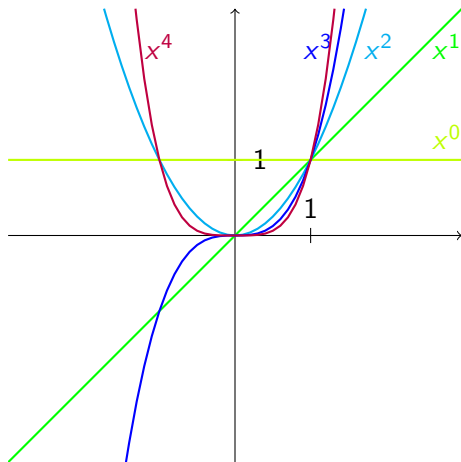




Ábrázolás







Tétel

Ha $n, m \in \mathbb{N}_0$ és $x \in \mathbb{R}$, akkor

$$x^{n+m} = x^n x^m.$$

Következmény

Ha $n, m \in \mathbb{N}_0$ és $x \in \mathbb{R}$, akkor

$$(x^n)^m = x^{nm}.$$

Tétel

Ha $0 < x < y$ és $n \in \mathbb{N}^+$, akkor

$$0 < x^n < y^n,$$

$$1 = x^0 = y^0.$$

Következmény

Ha $0 < x, y$, $n \in \mathbb{N}^+$ és $x^n = y^n$, akkor $x = y$.

Tétel

Ha $n \in \mathbb{N}^+$, és $a, b \in \mathbb{R}$, akkor

$$a^n - b^n = (a - b) \left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1} \right).$$

Útmutatás.

Egyszerű számolás.



Következmény

Ha $n \in \mathbb{N}^+$, és $0 \leq b \leq a$, akkor

$$(a - b)nb^{n-1} \leq a^n - b^n \leq (a - b)na^{n-1}.$$

Egyenlőség pontosan akkor, ha $n = 1$ vagy $a = b$.

Útmutatás.

$b^{n-1} \leq a^k b^{n-1-k} \leq a^{n-1}$ adja az állítást.



Hatványozás

Egész kitevő

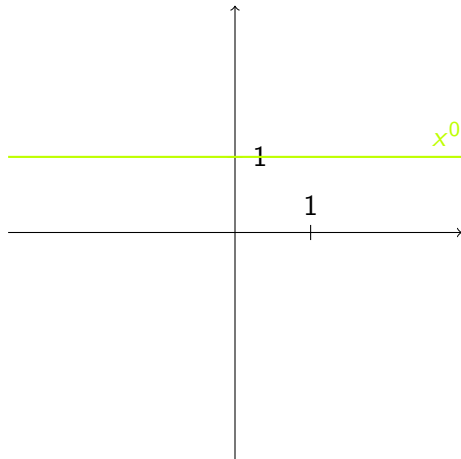
Definíció

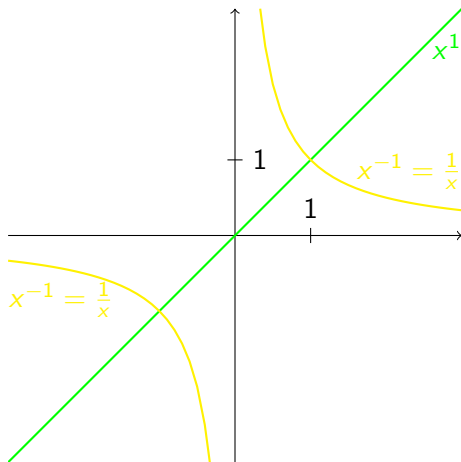
Az alábbi módon értelmezzük a negatív egész kitevőjű **hatványokat**. Ha $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$ és $x \neq 0$, akkor

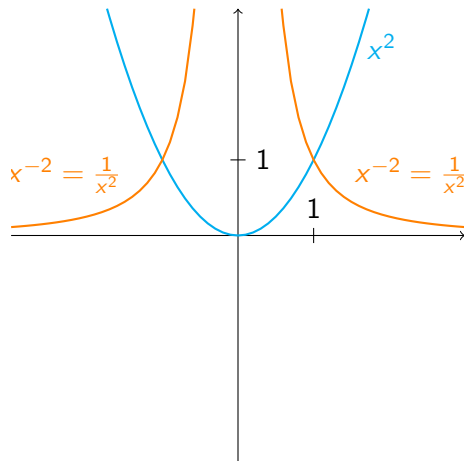
$$x^n = \frac{1}{x^{-n}}.$$

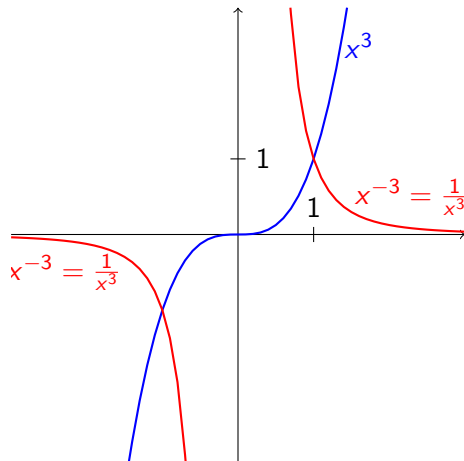
Megjegyzés

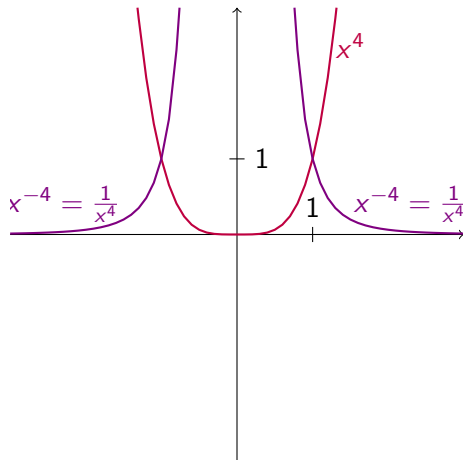
A 0 negatív kitevőjű hatványait nem értelmezzük.

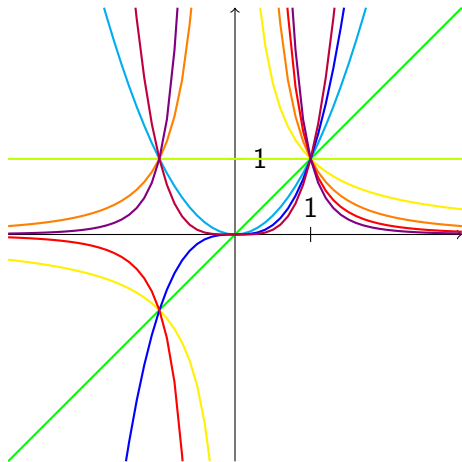












Tétel

Ha $n, m \in \mathbb{Z}$ és $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, akkor

$$x^{n+m} = x^n x^m.$$

Következmény

Ha $n, m \in \mathbb{Z}$ és $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, akkor

$$(x^n)^m = x^{nm}.$$

Tétel

Ha $0 < x < y$ és $n \in \mathbb{N}^+$, akkor

$$0 < y^{-n} < x^{-n}.$$

Tétel

Ha $x \geq 0$ és $n \in \mathbb{N}^+$, akkor létezik pontosan egy olyan $y \geq 0$, amire

$$y^n = x.$$

Definíció

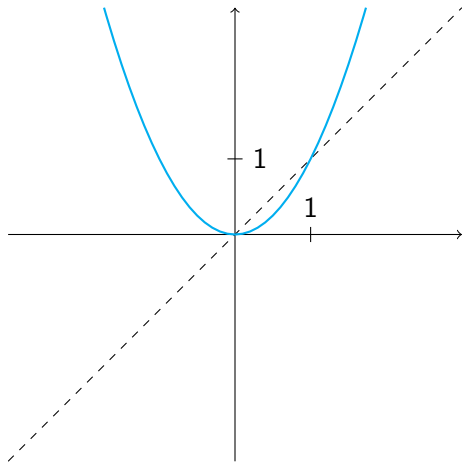
Ha $x \geq 0$, és $n \in \mathbb{N}^+$, akkor az egyetlen olyan $y \geq 0$ számot, melyre $y^n = x$ az x szám *n -edik gyökének* hívjuk, és alkalmazzuk az

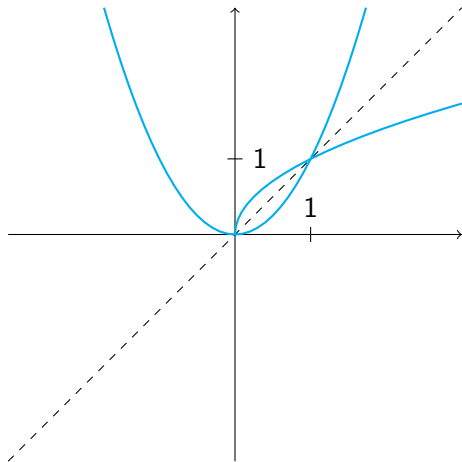
$$\sqrt[n]{x}$$

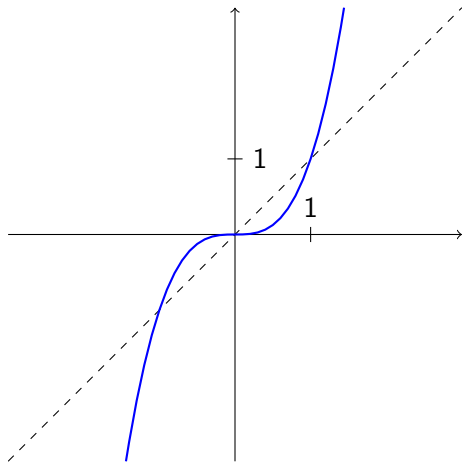
jelölést.

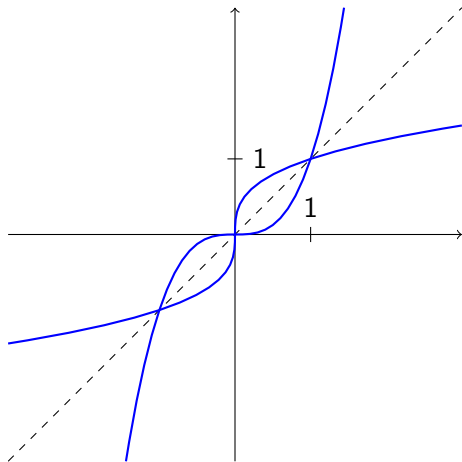
Ha n páratlan, akkor negatív x -nek is értelmezzük n -edik gyökét, a következőképpen.

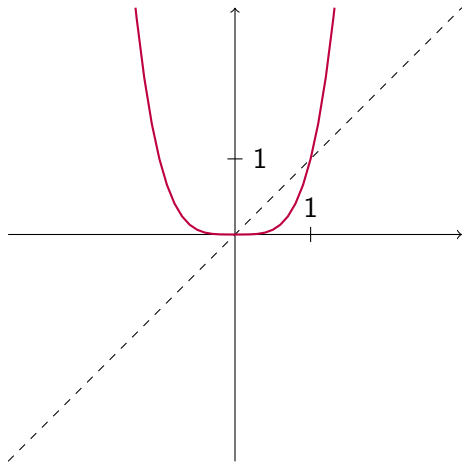
$$\sqrt[n]{x} = -\sqrt[n]{-x}$$

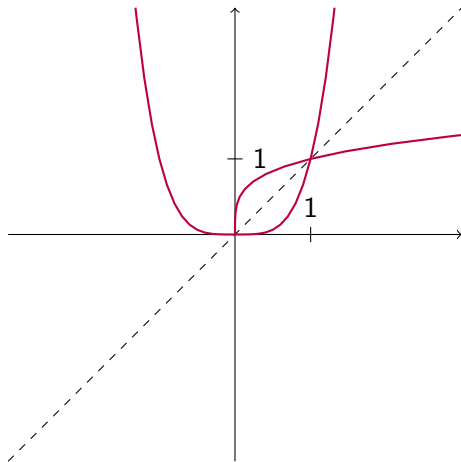












Tétel

Ha $n \in \mathbb{N}^+$, $k \in \mathbb{Z}$ és $x > 0$, akkor

$$\sqrt[n]{x^k} = (\sqrt[n]{x})^k.$$

Következmény

Ha $n, m \in \mathbb{N}^+$ és $x > 0$, akkor

$$\sqrt[nm]{x} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{x}}.$$

Tétel

Ha $0 \leq x < y$ és $n \in \mathbb{N}^+$, akkor

$$\sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y}.$$

Ha n páratlan, akkor $0 \leq x$ elhagyható.

Racionális

Definíció

Legyen $x > 0$ és $q \in \mathbb{Q}$! Ekkor azt mondjuk, hogy

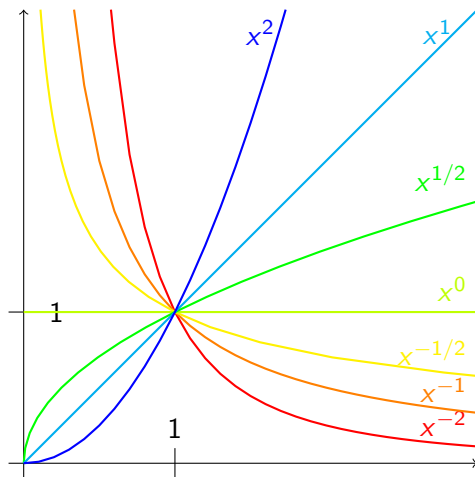
$$x^q = \sqrt[n]{x^k},$$

ahol $k \in \mathbb{Z}$ és $n \in \mathbb{N}^+$ úgy, hogy $q = \frac{k}{n}$.

Ilyen k és n létezik a $\mathbb{Q}$ definíciója miatt. Ugyan ezeket q nem határozza meg egyértelműen, de megmutatható, hogy x^q nem függ ezek választásától.

Tétel

Ha $x > 0$, $k, l \in \mathbb{Z}$ és $n, m \in \mathbb{N}^+$ úgy, hogy $\frac{k}{n} = \frac{l}{m}$, akkor $\sqrt[n]{x^k} = \sqrt[m]{x^l}$.



Könnyen ellenőrizhető a következő.

Tétel ((297))

A nem negatív egész kitevőjű hatványozásnak ez az egyetlen olyan kiterjesztése racionális kitevőkre, hogy minden $x > 0$ és $q, r \in \mathbb{Q}$ esetén igaz maradjon az

$$x^{q+r} = x^q x^r$$

azonosság.

Következmény ((297))

Ha $x > 0$ és $q, r \in \mathbb{Q}$, akkor

$$(x^q)^r = x^{qr}.$$

Szükségünk lesz a következőkre.
A hatványozás monotonitása.

Tétel ((319))

Ha $0 < x < y$ és $q \in \mathbb{Q}$, akkor

$$q > 0 \text{ esetén } 0 < x^q < y^q,$$

$$q = 0 \text{ esetén } 1 = x^q = y^q,$$

$$q < 0 \text{ esetén } x^q > y^q > 0.$$

Definíció

Ha $x \geq 1$ és $p \in \mathbb{R}$, akkor

$$x^p = \sup\{x^q \in \mathbb{R} \mid q \in \mathbb{Q} : q \leq p\}.$$

Ha $0 < x < 1$ és $p \in \mathbb{R}$, akkor

$$x^p = \left(\frac{1}{x}\right)^{-p}.$$

Most is igaz a hatványozás monotonitása.

Tétel ((319))

Ha $0 < x < y$ és $p \in \mathbb{R}$, akkor

$$p > 0 \text{ esetén } 0 < x^p < y^p,$$

$$p = 0 \text{ esetén } 1 = x^p = y^p,$$

$$p < 0 \text{ esetén } x^p > y^p > 0.$$

Rendezés teljessége

Tétel

Egy rendezett test pontosan akkor teljes (azaz pontosan akkor teljesül a Dedekind-axióma), ha teljesül a Cantor-féle metszet-tulajdonság és az Archimédész-tulajdonság.

Tétel (Binomiális tétel)

$$x, y \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_0 : (x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

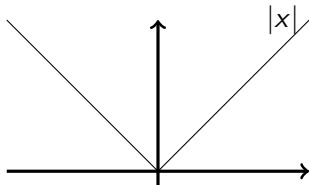
Abszolút érték

Definíció

Az x valós szám **abszolút értékén**

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{ha } x \geq 0, \\ -x, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

nem negatív számot értjük.



Tétel

$$|x| = \max\{x, -x\}$$

Megjegyzés

Ha $x \in \mathbb{R}$, akkor $x \leq |x|$ és $-x \leq |x|$, továbbá $|xy| = |x| \cdot |y|$.

Tétel (Háromszög-egyenlőtlenség)

Tetszőleges x és y valós számok esetén

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Következmény

Ha $n \in \mathbb{N}^+$, akkor

$$|x_1 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + \cdots + |x_n|$$

Továbbá,

$$|x| - |y| \leq |x - y|, \quad \text{sőt} \quad ||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

Tétel (Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség)

Ha $n \in \mathbb{N}^+$, $x_1, y_1, \dots, x_n, y_n \in \mathbb{R}$, akkor

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i^2.$$

Egyenlőség pontosan akkor, ha $\exists t \in \mathbb{R} : (x_1, \dots, x_n) = t(y_1, \dots, y_n)$, vagy $(y_1, \dots, y_n) = t(x_1, \dots, x_n)$

Tétel (Minkovszki-egyenlőtlenség)

Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $x_1, y_1, \dots, x_n, y_n \in \mathbb{R}$. Ekkor

$$\left(\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^{1/2}$$

Egyenlőség pontosan akkor, ha $\exists t \in \mathbb{R} : (x_1, \dots, x_n) = t(y_1, \dots, y_n)$, vagy $(y_1, \dots, y_n) = t(x_1, \dots, x_n)$

Tétel

Ha $x \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N}^+$ úgy, hogy $-x \leq n$, akkor

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Következmény

Ha $x \in \mathbb{R}$ és $n, k \in \mathbb{N}^+$ úgy, hogy $-x \leq n < k$, akkor

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{x}{k}\right)^k.$$

Tétel

Legyen $r, s \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ úgy, hogy $r < s$. Ha $x > 0$, akkor

$$\frac{x^r - 1}{r} \leq \frac{x^s - 1}{s}.$$

Egyenlőség pontosan akkor, ha $x = 1$.

Tétel (Általánosított Bernoulli-egyenlőtlenség (392))

Ha $\alpha \in \mathbb{Q}$ és $x > -1$, akkor

1. $\alpha > 1$ esetén $(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x$ (egyenlőség pontosan akkor ha $x = 0$).
2. $\alpha = 0$ vagy $\alpha = 1$ esetén $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x$.
3. $0 < \alpha < 1$ esetén $(1+x)^\alpha \leq 1 + \alpha x$ (egyenlőség pontosan akkor ha $x = 0$).
4. $\alpha < 0$ esetén $(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x$ (egyenlőség pontosan akkor ha $x = 0$).

Következmény (Klasszikus Bernoulli-egyenlőtlenség)

Ha $n \in \mathbb{N}^+$ és $x \geq -1$, akkor

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Egyenlőség pontosan akkor, ha $n = 1$, vagy $x = 0$.

Definíció

Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $x_1, \dots, x_n > 0$ és $p \in \overline{\mathbb{Q}}$. Az $x_1, \dots, x_n$ számok p -edik **hatványközépértékének** nevezzük az

$$M_p(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \sqrt[p]{x_1 \cdots x_n}, & \text{ha } p = 0, \\ \max\{x_1, \dots, x_n\}, & \text{ha } p = \infty \\ \min\{x_1, \dots, x_n\}, & \text{ha } p = -\infty \\ \left(\frac{x_1^p + \cdots + x_n^p}{n} \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{máskor} \end{cases}$$

számot.

Használjuk a rövidebb M_p jelölést.

Tétel

Ha $n \in \mathbb{N}^+$, $x_1, \dots, x_n > 0$, $p, q \in \overline{\mathbb{Q}}$ úgy, hogy $p < q$, akkor

$$M_p(x_1, \dots, x_n) \leq M_q(x_1, \dots, x_n).$$

Egyenlőség pontosan akkor, ha $x_1 = \cdots = x_n$.

Definíció

Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $x_1, \dots, x_n > 0$, $p \in \overline{\mathbb{Q}}$ és $w_1, \dots, w_n > 0$ úgy, hogy $w_1 + \dots + w_n = 1$. Az $x_1, \dots, x_n$ számok p -edik **súlyozott hatványközepértékének** nevezzük az

$$M_{p,w_1,\dots,w_n}(x_1,\dots,x_n) = \begin{cases} x_1^{w_1} \cdots x_n^{w_n}, & \text{ha } p = 0, \\ \max\{x_1, \dots, x_n\}, & \text{ha } p = \infty \\ \min\{x_1, \dots, x_n\}, & \text{ha } p = -\infty \\ (w_1 x_1^p + \dots + w_n x_n^p)^{\frac{1}{p}}, & \text{máskor} \end{cases}$$

számot.

Tétel ((393))

Ha $n \in \mathbb{N}^+$, $x_1, \dots, x_n > 0$, $w_1, \dots, w_n > 0$, $p, q \in \overline{\mathbb{Q}}$ úgy, hogy $w_1, \dots, w_n \in \mathbb{Q}$, $w_1 + \dots + w_n = 1$ és $p < q$, akkor

$$M_{p,w_1,\dots,w_n}(x_1,\dots,x_n) \leq M_{q,w_1,\dots,w_n}(x_1,\dots,x_n).$$

Egyenlőség pontosan akkor, ha $x_1 = \dots = x_n$.

Tétel (Hölder-egyenlőtlenség (394))

Ha $n \in \mathbb{N}^+$, $x_1, y_1, \dots, x_n, y_n \geq 0$, $\alpha \in]0, 1[\cap \mathbb{Q}$, akkor

$$\sum_{i=1}^n x_i^\alpha y_i^{1-\alpha} \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^\alpha \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^{1-\alpha}.$$

Egyenlőség pontosan akkor, ha $\exists t \in \mathbb{R} : (x_1, \dots, x_n) = t(y_1, \dots, y_n)$, vagy $(y_1, \dots, y_n) = t(x_1, \dots, x_n)$.

Másodfokú egyenlet

$$a \neq 0 : \quad ax^2 + bx + c = 0 \quad / : a$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left(\underbrace{x + \frac{b}{2a}}_y \right)^2 - \underbrace{\frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}}_{-\frac{D}{4a^2}} = 0 \quad / + \frac{D}{4a^2}$$

$$y^2 = \frac{D}{4a^2} \quad / \sqrt{}$$

$$x_1 = y_1 - \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{D}{4a^2}} - \frac{b}{2a} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Harmadfokú egyenlet

$$a \neq 0 : \quad ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad / : a$$

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0$$

$$\left(\underbrace{x + \frac{b}{3a}}_y\right)^3 + \left(\underbrace{\frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2}}_p\right) \left(\underbrace{x + \frac{b}{3a}}_y\right) + \underbrace{\frac{d}{a} + \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2}}_q = 0$$

$y^3 + py + q = 0$ egy megoldása a Cardano képlet szerint

$$x_1 + \frac{b}{3a} = y_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Feladat

$$x^3 - 6x + 4 = 0$$

Komplex számok halmaza. Jele $\mathbb{C}$.

Definíció

Legyen $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ és $z_1 = (x_1, y_1)$ és $z_2 = (x_2, y_2)$ jelölésekkel legyen

$$+_{{\mathbb{C}}} : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C} \text{ úgy, hogy } (z_1, z_2) \mapsto z_1 +_{{\mathbb{C}}} z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2);$$

$$\cdot_{{\mathbb{C}}} : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C} \text{ úgy, hogy } (z_1, z_2) \mapsto z_1 \cdot_{{\mathbb{C}}} z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1);$$

$+_{{\mathbb{C}}}$ és $\cdot_{{\mathbb{C}}}$ helyett a rövid $+$ és $\cdot$ jelöléseket használjuk.

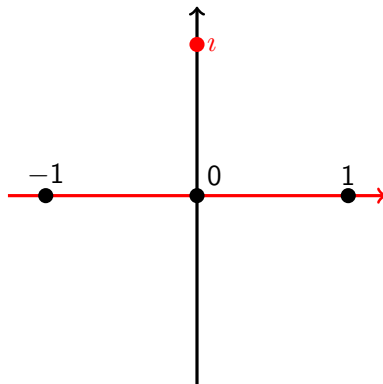
Ekkor $\mathbb{C}$ halmazt a komplex számok halmazának, a $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ hármast a komplex számok testének nevezzük.

A $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ halmazt **bővített komplex számok halmazának** hívjuk, és bevezetjük rá a $\overline{\mathbb{C}}$ jelölést

$\mathbb{R}$ -et azonosítjuk $\mathbb{R} \times \{0\}$ -val, így $\mathbb{R} \sim \mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{C}$. ($x \in \mathbb{R}$ esetén a megfeleltetés $x \sim (x, 0) \in \mathbb{C}$.)

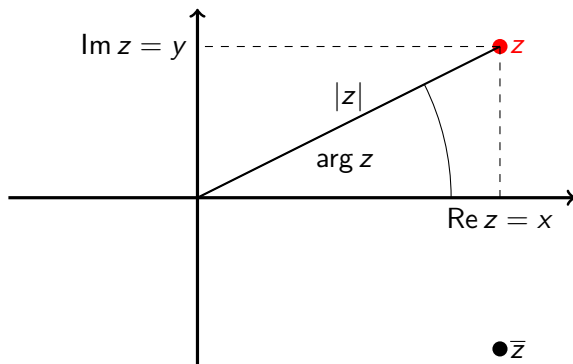
Ekkor $(1, 0) = 1$ a valós egység, és $i = (0, 1)$ a **képzetes egység**. Vegyük észre, hogy

$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1.$$



A $z = (x, y)$ komplex szám esetén:

- ▶ **valós rész:** $\operatorname{Re} z = x \in \mathbb{R}$;
- ▶ **képzetes rész:** $\operatorname{Im} z = y \in \mathbb{R}$;
- ▶ **abszolút érték:** $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$;
- ▶ **argumentum:** $\arg z = \begin{cases} \arccos((\operatorname{Re} z)/|z|), & \text{ha } 0 \leq \operatorname{Im} z; \\ -\arccos((\operatorname{Re} z)/|z|), & \text{ha } \operatorname{Im} z < 0; \end{cases}$
- ▶ **konjugált:** $\bar{z} = (x, -y)$;



A z komplex szám **algebrai alakja**

$$z = 1 \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z.$$

Ha $z = (x, y)$, akkor algebrai alakban

$$z = x + iy.$$

Ebben az alakban a műveletek egyszerűbben megjegyezhetők. Ha $z_1 = x_1 + iy_1$ és $z_2 = x_2 + iy_2$, akkor

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2);$$

és

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + x_1 iy_2 + iy_1 x_2 + \overbrace{iy_1 iy_2}^{i^2 y_1 y_2} = \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2); \end{aligned}$$

Egyszerű számolással $z = x + iy$ esetén

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + iyx - xiy - i^2 y^2 = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

Tétel

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ test. (33)

Bizonyítás vázlat.

- ▶ **nullelem:** $0 = (0, 0) = 0 + i0$;
- ▶ **$z = x + iy$ additív inverze:** $-z = -x + i(-y)$;
- ▶ **egységelem:** $1 = (1, 0) = 1 + i0$;
- ▶ **$z = x + iy \neq 0$ multiplikatív inverze:**

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2};$$

Az összeadás és szorzás asszociativitása, kommutativitása, és a szorzás összeadásra vonatkozó disztributivitása egyszerű számolás. □

Feladat

Legyen $z_1 = \sqrt{3} + i$ és $z_2 = 1 - i$!

- ▶ $\operatorname{Re} z_1 = ?$
- ▶ $\operatorname{Im} z_2 = ?$
- ▶ $\sqrt{3}z_1 = ?$
- ▶ $\overline{z_1} = ?$
- ▶ $z_1 + 2\overline{z_2} = ?$
- ▶ $z_1 - z_2 = ?$
- ▶ $|z_1| = ?$
- ▶ $\arg z_2 = ?$
- ▶ $z_1 z_2 = ?$
- ▶ $\frac{z_1}{z_2} = ?$

Könnyen beláthatóak a következők.

Tétel (alpműveletek kapcsolata a konjugálttal és az abszolútértékkel)

Ha $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ és osztásnál a nevező nem nulla, akkor



$$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}, \quad \overline{(z_1 z_2)} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}, \quad \overline{z_1/z_2} = \overline{z_1}/\overline{z_2}.$$



$$|z_1| = |\overline{z_1}|, \quad |z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad |z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|.$$

▶ *háromszög-egyenlőtlenség*

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|,$$

illetve ha $n \in \mathbb{N}^+$, akkor

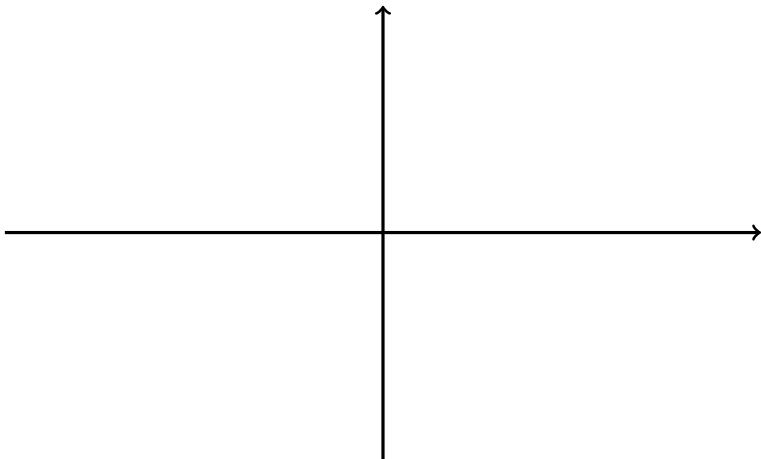
$$|z_1 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + \cdots + |z_n|.$$

Továbbá,

$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|, \quad \text{sőt} \quad ||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|.$$

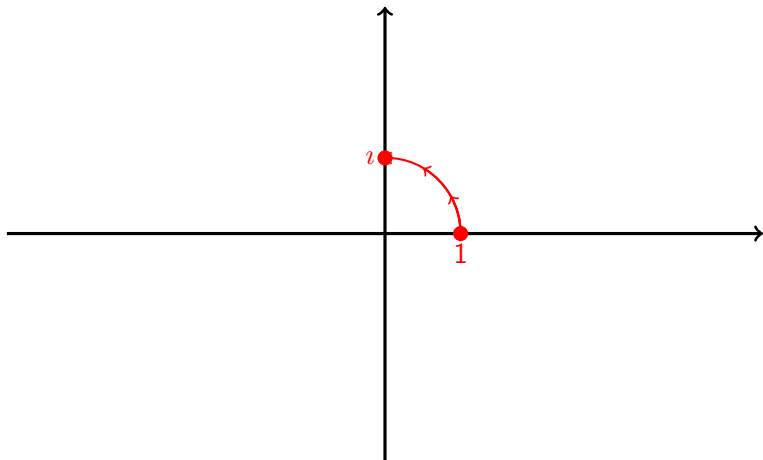
Trigonometriai alak

Ha $z = x + yi$, akkor $i \cdot z = xi + yi^2 = -y + xi$, azaz $z \perp i \cdot z$, sőt $\arg(i \cdot z) = \arg z + 90^\circ$, és $|i \cdot z| = |z|$.



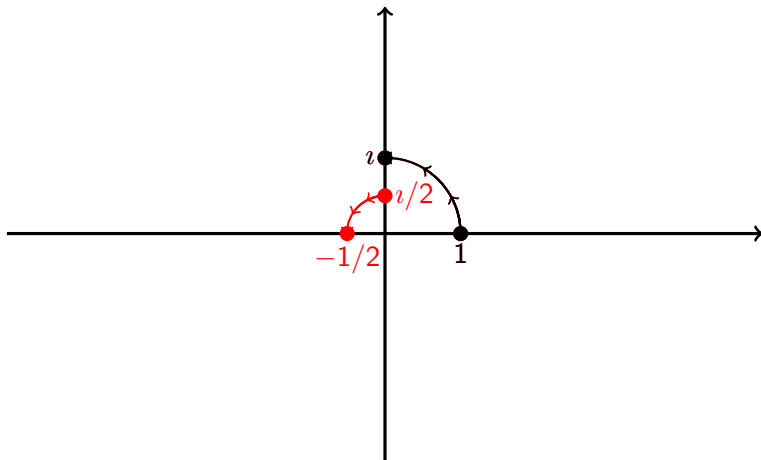
Trigonometriai alak

Ha $z = x + yi$, akkor $i \cdot z = xi + yi^2 = -y + xi$, azaz $z \perp i \cdot z$, sőt $\arg(i \cdot z) = \arg z + 90^\circ$, és $|i \cdot z| = |z|$.



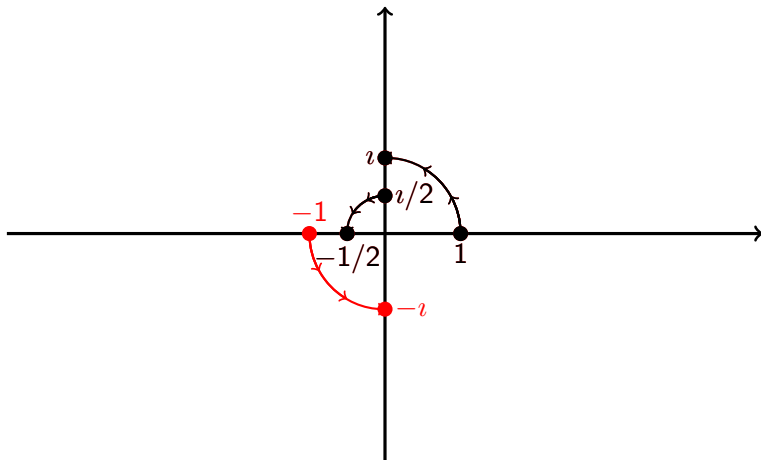
Trigonometriai alak

Ha $z = x + yi$, akkor $i \cdot z = xi + yi^2 = -y + xi$, azaz $z \perp i \cdot z$, sőt $\arg(i \cdot z) = \arg z + 90^\circ$, és $|i \cdot z| = |z|$.



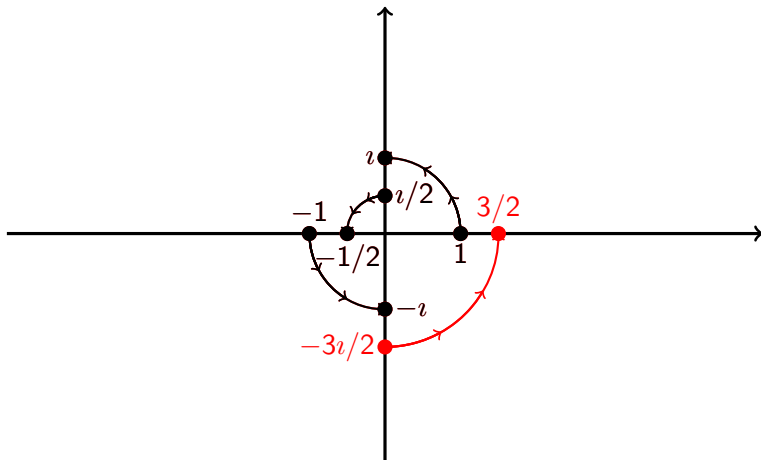
Trigonometriai alak

Ha $z = x + yi$, akkor $i \cdot z = xi + yi^2 = -y + xi$, azaz $z \perp i \cdot z$, sőt $\arg(i \cdot z) = \arg z + 90^\circ$, és $|i \cdot z| = |z|$.



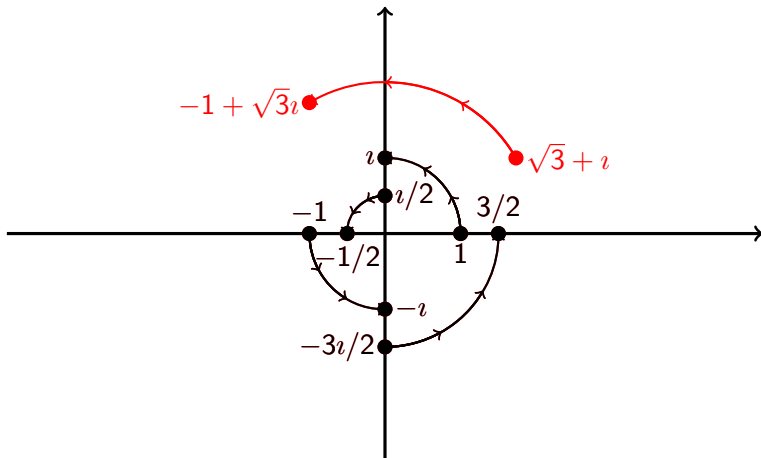
Trigonometriai alak

Ha $z = x + yi$, akkor $i \cdot z = xi + yi^2 = -y + xi$, azaz $z \perp i \cdot z$, sőt $\arg(i \cdot z) = \arg z + 90^\circ$, és $|i \cdot z| = |z|$.



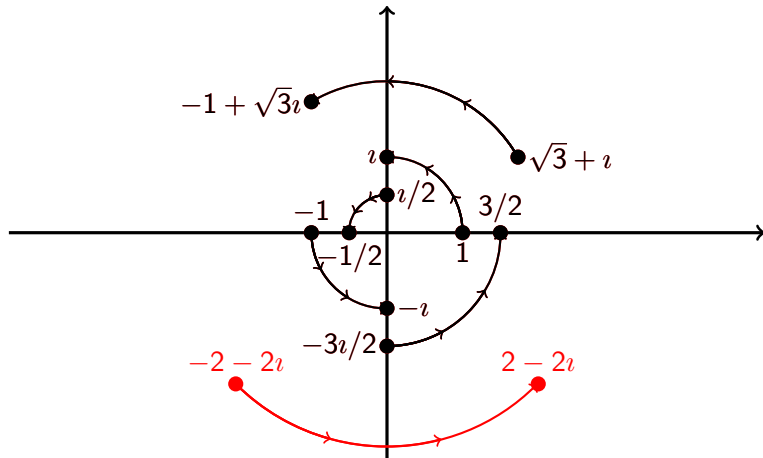
Trigonometriai alak

Ha $z = x + yi$, akkor $i \cdot z = xi + yi^2 = -y + xi$, azaz $z \perp i \cdot z$, sőt $\arg(i \cdot z) = \arg z + 90^\circ$, és $|i \cdot z| = |z|$.

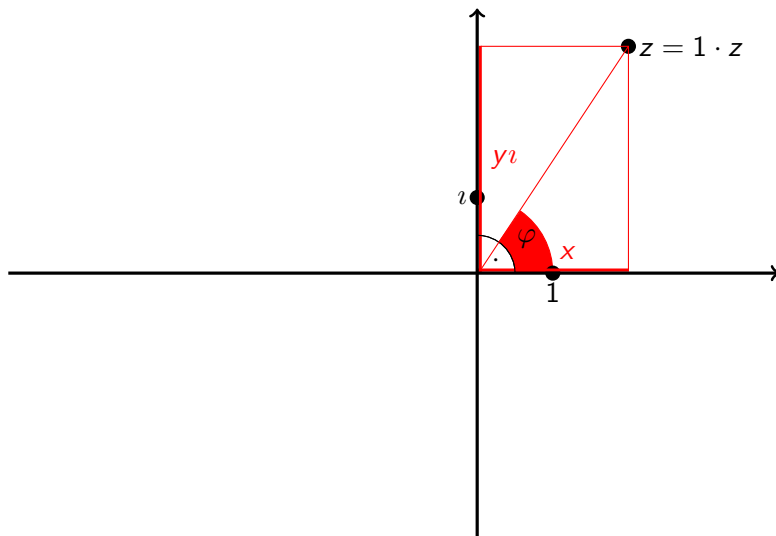


Trigonometriai alak

Ha $z = x + yi$, akkor $i \cdot z = xi + yi^2 = -y + xi$, azaz $z \perp i \cdot z$, sőt $\arg(i \cdot z) = \arg z + 90^\circ$, és $|i \cdot z| = |z|$.

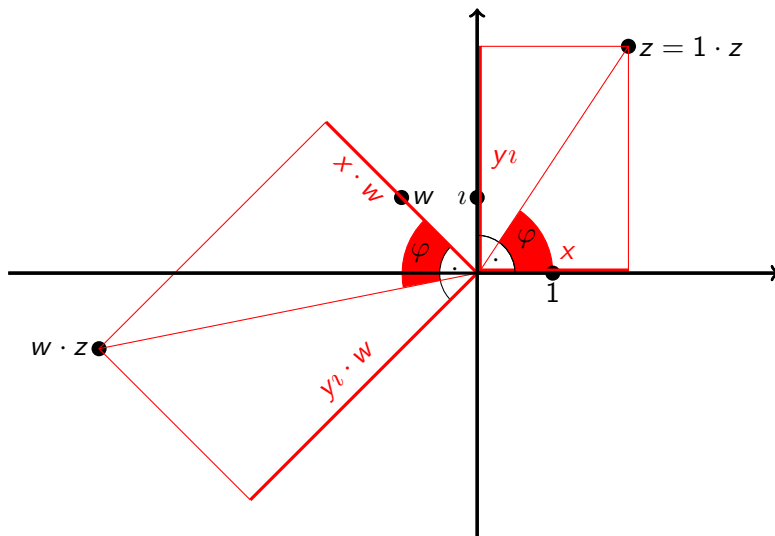


Legyenek w és $z = x + yi$ tetszőleges komplex számok, és legyen $\varphi = \arg z$!



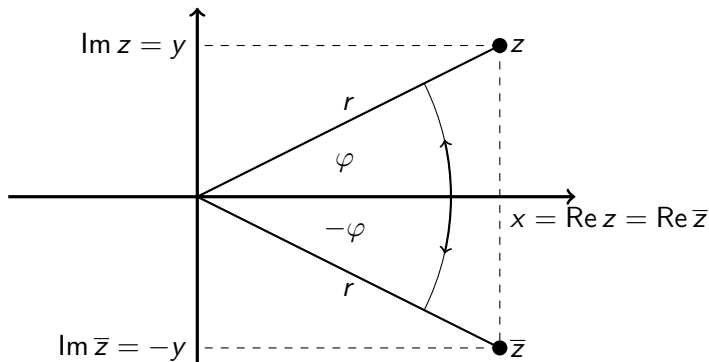
$$|w \cdot z| = |w| \cdot |z| \quad \text{és} \quad \arg(w \cdot z) = \arg w + \arg z.$$

Legyenek w és $z = x + yi$ tetszőleges komplex számok, és legyen $\varphi = \arg z$!



$$|w \cdot z| = |w| \cdot |z| \quad \text{és} \quad \arg(w \cdot z) = \arg w + \arg z.$$

A $z = x + yi$ komplex szám esetén legyen $r = |z|$ és $\varphi = \arg z$!



Leolvasható a z komplex szám **trigonometriai alakja**.

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$\bar{z} = r(\cos -\varphi + i \sin -\varphi)$$

Az előzőek szerint

$$\begin{aligned} r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) &= \\ &= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \end{aligned}$$

Innen, ha $r \neq 0$ ($\iff z \neq 0$), akkor

$$\begin{aligned} r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \cdot \frac{1}{r}(\cos -\varphi + i \sin -\varphi) &= \\ &= \frac{r}{r}(\cos(\varphi - \varphi) + i \sin(\varphi - \varphi)) = 1, \end{aligned}$$

azaz

$$\frac{1}{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \frac{1}{r}(\cos -\varphi + i \sin -\varphi),$$

és így

$$\frac{r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

Trigonometriai alakban könnyen elvégezhető a hatványozás.

$$[r(\cos \varphi + \imath \sin \varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + \imath \sin n\varphi) \quad (n \in \mathbb{N}^+)$$

Valójában, ha $r \neq 0$, akkor ez $n \in \mathbb{Z}$ esetén is igaz.

$n \in \mathbb{N}^+$ esetén értelmezzük a komplex n -edik gyökvonást. Ha $z \neq 0$, akkor n különböző olyan $w \in \mathbb{C}$ van, amire $w^n = z$. Ezeket hívjuk a z n -edik komplex gyökeinek.

$$\sqrt[n]{r(\cos \varphi + \imath \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + k360^\circ}{n} + \imath \sin \frac{\varphi + k360^\circ}{n} \right) \\ (k = 0, \dots, n-1)$$

Összefoglalva.

Tétel (alapl műveletek, hatványozás, gyökvonás és konjugálás kapcsolata az argumentummal)

Ha $z_1, z_2, z \in \mathbb{C}$ és $n \in \mathbb{N}^+$, akkor

▶

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2,$$

és ha $z_2 \neq 0$, akkor

$$\arg(z_1 / z_2) = \arg z_1 - \arg z_2.$$

▶

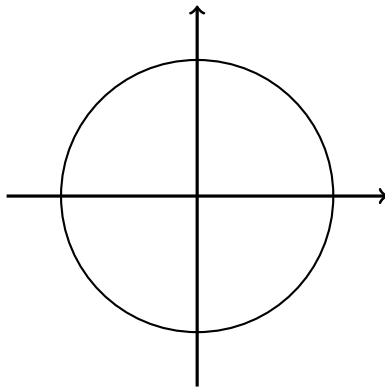
$$\arg z^n = n \arg z, \quad \arg \sqrt[n]{z} = \frac{\arg z + k360^\circ}{n}.$$

▶

$$\arg \bar{z} = -\arg z$$

Mint minden 0-tól különböző komplex számnak, az 1-nek is n különböző n -edik gyöke van. Ezeket hívjuk n -edik komplex egységgyököknek.

$$\sqrt[n]{1} = z_k = \cos \frac{k360^\circ}{n} + i \sin \frac{k360^\circ}{n} \quad (k = 0, \dots, n-1)$$



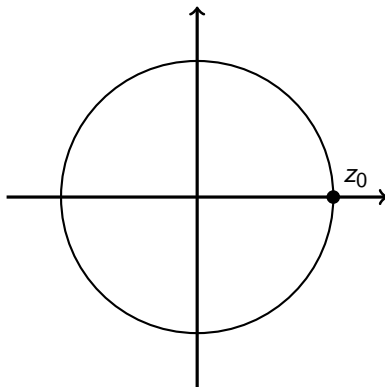
Mint minden 0-tól különböző komplex számnak, az 1-nek is n különböző n -edik gyöke van. Ezeket hívjuk n -edik komplex egységgyököknek.

$$\sqrt[n]{1} = z_k = \cos \frac{k360^\circ}{n} + i \sin \frac{k360^\circ}{n} \quad (k = 0, \dots, n-1)$$

$n = 1$:

$$\sqrt[1]{1} = \cos 0 \cdot 360^\circ + i \sin 0 \cdot 360^\circ$$

$$z_0 = 1$$



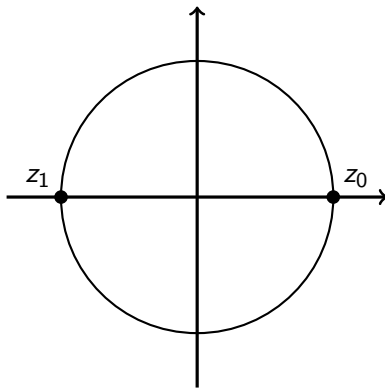
Mint minden 0-tól különböző komplex számnak, az 1-nek is n különböző n -edik gyöke van. Ezeket hívjuk n -edik komplex egységgyököknek.

$$\sqrt[n]{1} = z_k = \cos \frac{k360^\circ}{n} + i \sin \frac{k360^\circ}{n} \quad (k = 0, \dots, n-1)$$

$n = 2$:

$$\sqrt{1} = \cos k180^\circ + i \sin k180^\circ$$

$$z_{0,1} = \pm 1$$



Mint minden 0-tól különböző komplex számnak, az 1-nek is n különböző n -edik gyöke van. Ezeket hívjuk n -edik komplex egységgyököknek.

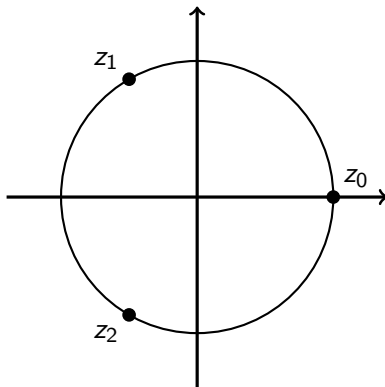
$$\sqrt[n]{1} = z_k = \cos \frac{k360^\circ}{n} + i \sin \frac{k360^\circ}{n} \quad (k = 0, \dots, n-1)$$

$n = 3$:

$$\sqrt[3]{1} = \cos k120^\circ + i \sin k120^\circ$$

$$z_0 = 1,$$

$$z_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$



Mint minden 0-tól különböző komplex számnak, az 1-nek is n különböző n -edik gyöke van. Ezeket hívjuk n -edik komplex egységgyököknek.

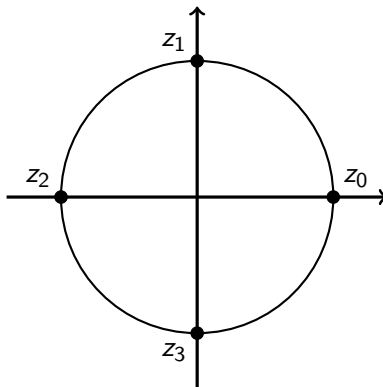
$$\sqrt[n]{1} = z_k = \cos \frac{k360^\circ}{n} + i \sin \frac{k360^\circ}{n} \quad (k = 0, \dots, n-1)$$

$n = 4$:

$$\sqrt[4]{1} = \cos k90^\circ + i \sin k90^\circ$$

$$z_{0,2} = \pm 1,$$

$$z_{1,3} = \pm i$$



Mint minden 0-tól különböző komplex számnak, az 1-nek is n különböző n -edik gyöke van. Ezeket hívjuk n -edik komplex egységgyököknek.

$$\sqrt[n]{1} = z_k = \cos \frac{k360^\circ}{n} + i \sin \frac{k360^\circ}{n} \quad (k = 0, \dots, n-1)$$

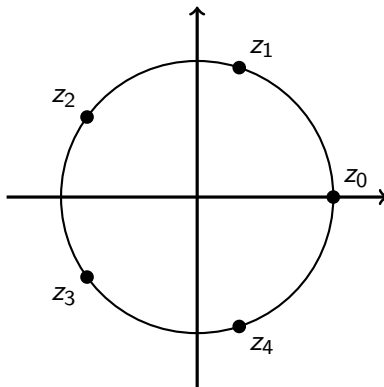
$n = 5$:

$$\sqrt[5]{1} = \cos k72^\circ + i \sin k72^\circ$$

$$z_0 = 1,$$

$$z_{1,4} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \pm \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}i,$$

$$z_{2,3} = -\frac{1+\sqrt{5}}{4} \pm \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}i$$



Mint minden 0-tól különböző komplex számnak, az 1-nek is n különböző n -edik gyöke van. Ezeket hívjuk n -edik komplex egységgyököknek.

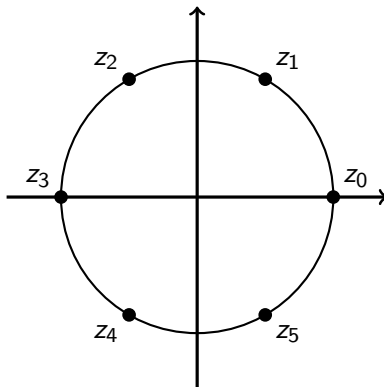
$$\sqrt[n]{1} = z_k = \cos \frac{k360^\circ}{n} + i \sin \frac{k360^\circ}{n} \quad (k = 0, \dots, n-1)$$

$n = 6$:

$$\sqrt[6]{1} = \cos k60^\circ + i \sin k60^\circ$$

$$z_{0,3} = \pm 1,$$

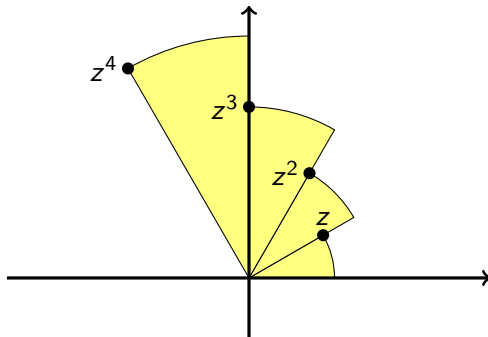
$$z_{1,2,4,5} = \pm \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$



Feladat

Legyen $z = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}i}{2}$!

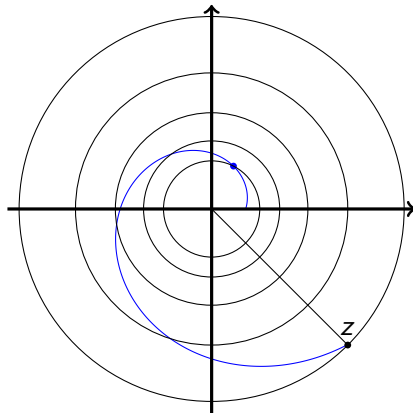
$z^4 = ?$



Feladat

Legyen $z = 4 - 4i$!

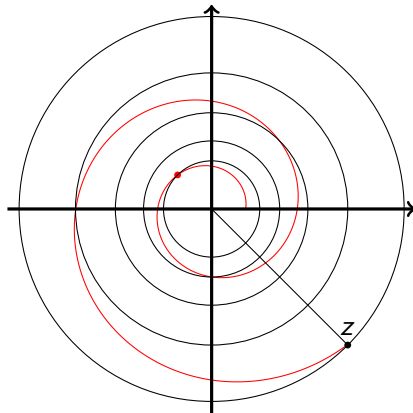
$$\sqrt[5]{z} = ?$$



Feladat

Legyen $z = 4 - 4i$!

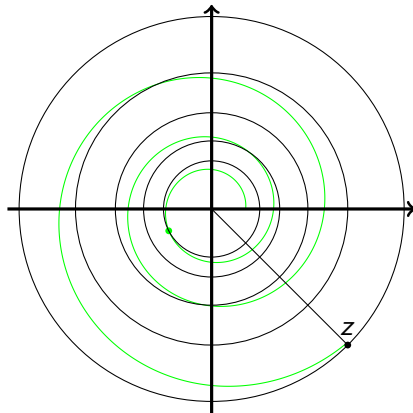
$$\sqrt[5]{z} = ?$$



Feladat

Legyen $z = 4 - 4i$!

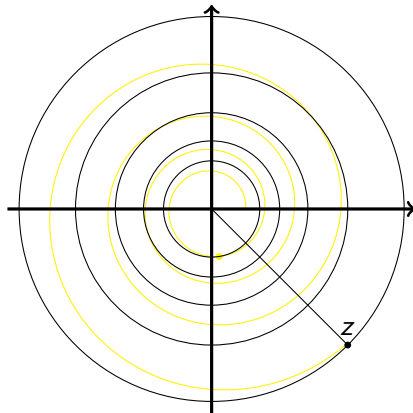
$$\sqrt[5]{z} = ?$$



Feladat

Legyen $z = 4 - 4i$!

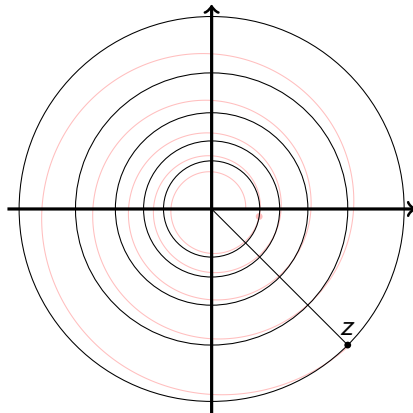
$$\sqrt[5]{z} = ?$$



Feladat

Legyen $z = 4 - 4i$!

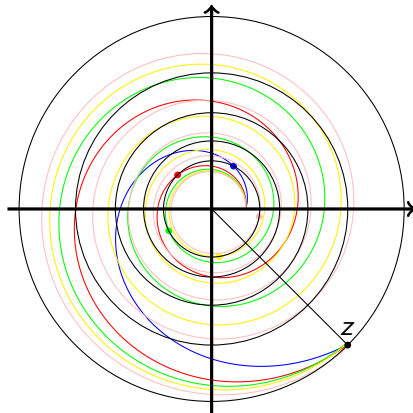
$$\sqrt[5]{z} = ?$$



Feladat

Legyen $z = 4 - 4i$!

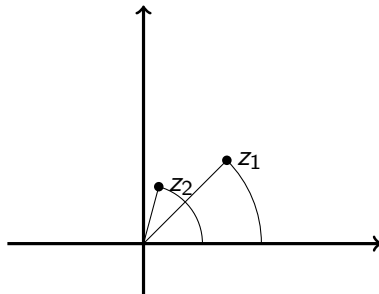
$$\sqrt[5]{z} = ?$$



Feladat

Legyen $z_1 = 2\sqrt{3}(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$ és
 $z_2 = \sqrt{3}(\cos 75^\circ + i \sin 75^\circ)$!

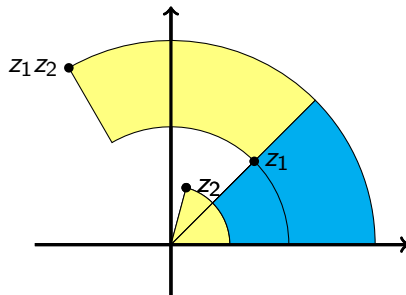
Adjuk meg $z_1 z_2$ és $\frac{z_1}{z_2}$ algebrai alakját!



Feladat

Legyen $z_1 = 2\sqrt{3}(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$ és
 $z_2 = \sqrt{3}(\cos 75^\circ + i \sin 75^\circ)$!

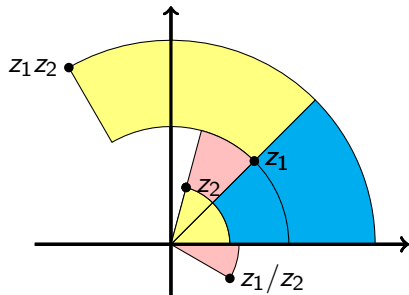
Adjuk meg $z_1 z_2$ és $\frac{z_1}{z_2}$ algebrai alakját!



Feladat

Legyen $z_1 = 2\sqrt{3}(\cos 45^\circ + \imath \sin 45^\circ)$ és
 $z_2 = \sqrt{3}(\cos 75^\circ + \imath \sin 75^\circ)$!

Adjuk meg $z_1 z_2$ és $\frac{z_1}{z_2}$ algebrai alakját!



Polinom, azaz racionális egész függvény

Definíció

Ha $k \in \mathbb{N}^+$, és $a_0, a_1, \dots, a_k \in \mathbb{C}$ úgy, hogy $a_k \neq 0$, akkor a

$$p(z) = a_k z^k + \dots + a_1 z + a_0$$

függvényt k -adfokú (komplex együtthatós) polinomnak nevezzük, míg $a_0, a_1, \dots, a_k$ -t a polinom együtthatóinak, a_k -t a főegyütthatónak hívjuk.

A konstans függvényeket 0-adfokú polinomnak nevezzük.

Polinomnak vagy racionális egész függvénynek nevezünk egy függvényt, ha k -adfokú polinom valamely $k \in \mathbb{N}_0$ esetén.

A $p(z)$ polinom gyökének nevezzük a zérushelyeit, azaz azon $z \in \mathbb{C}$ számokat, melyekre $p(z) = 0$.

A $p(z)$ k -adfokú polinom foksámát $\deg p(z)$ -vel jelöljük, azaz

$$\deg p(z) = k.$$

Ha az együtthatók valós számok, akkor a polinomot valós együtthatós polinomnak is nevezzük.

Tétel

Ha $p(z)$ és $o(z)$ tetszőleges polinomok úgy, hogy $\deg o(z) \geq 1$, akkor egyértelműen létezik olyan $h(z)$ és $m(z)$ polinom, melyekre

$$p(z) = o(z) \cdot h(z) + m(z) \quad \text{és} \quad \deg m(z) < \deg o(z).$$

Útmutatás.

Polinomosztással megkonstruáljuk a $h(z)$ és $m(z)$ polinomokat.



Feladat

- ▶ $(4z^5 + 3z^4 - z^3 + iz) : (2z^3 - i) = ?$
- ▶ $(4z^5 + 3z^4 - z^3 + 8z^2 + 6z - 2) : (2z^3 + 4) = ?$

Definíció

Ha $m(z) = 0$, akkor azt mondjuk, hogy $p(z)$ **osztható** $o(z)$ -vel, vagy $o(z)$ **osztója** $p(z)$ -nek.
Ha még $1 \leq \deg o(z) < \deg p(z)$, akkor azt is mondjuk, hogy $o(z)$ **valódi osztója** $p(z)$ -nek.

Definíció

Egy legalább elsőfokú polinomot **irreducibilis polinom**nak nevezünk, ha nincs valódi osztója.

Tétel

Minden legalább elsőfokú polinom egyértelműen felbomlik irreducibilis polinomok szorzatára.

Megjegyzés

Az egyértelműség konstans szorzótól és sorrendtől eltekintve értendő. Például

$$4z^2 - 4 = 4(z - 1)(z + 1) = (2z - 2)(2z + 2) = (4z + 4)(z - 1).$$

A tétel bármely számtest ($\mathbb{R}$ vagy $\mathbb{C}$) felett igaz. Valós esetben például

$$x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1),$$

de a komplex számtest felett

$$z^4 - 1 = (z - 1)(z + 1)(z - i)(z + i).$$

Tétel (Algebra alaptétele)

Egy $p(z)$ legalább elsőfokú, komplex együtthatós polinomnak mindig van komplex gyöke.

Következmény

A komplex számtest felett pontosan az elsőfokú polinomok irreducibilisek.

Definíció

Ha a $p(z)$ polinomnak z_1 gyöke, akkor a $(z - z_1)$ polinomot **gyöktényezőnek** nevezzük. Azt mondjuk, hogy a z_1 gyök **multiplicitása** az a $k \in \mathbb{N}^+$, melyre $(z - z_1)^k$ osztója a polinomnak, de $(z - z_1)^{k+1}$ már nem az.

Következmény

Egy $p(z)$ k -adfokú (nem azonosan nulla) polinomnak pontosan k darab komplex gyöke van, multiplicitással számolva, azaz létezik $z_1, z_2, \dots, z_k \in \mathbb{C}$ úgy, hogy

$$p(z) = a_k(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_k),$$

ahol a_k a polinom főegyütthatója.

Feladat

Határozzuk meg a $p(z)$ polinom gyökeit, ahol

$$p(z) = z^2 - (2 + 4i)z - 3 + 2i.$$

Következmény (Algebra alaptétele valós változat)

A valós számtest felett pontosan az elsőfokú és a negatív diszkriminánsú másodfokú polinomok az irreducibilisek.

Definíció

Egy $x : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt **valós számsorozatnak** (röviden **sorozatnak**) nevezünk. Egy tetszőleges $n \in \mathbb{N}^+$ esetén az $x(n)$ jelölés helyett az x_n jelölést használjuk, és azt mondjuk, hogy x_n a sorozat n -edik eleme.

Ha egyszerre több sorozatról beszélünk, akkor csak az egyiket jelölhetjük x -el, a többit y , z betűkkel. Szokásos még az a , b , satöbbi betűk használata is.

Láttuk, hogy x_n az x sorozat n -edik elemét jelöli, de ha ez nem okoz félreértést, az egész sorozatot is jelölheti. Formálisan precíz, de van akinek zavaró lehet, ha a sorozatra csak az x jelölést használjuk. Végül nem félreérthető, és senkinek sem zavaró, de körülményes jelölés (x_n) , vagy $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

Néha a sorozat értelmezési tartománya $\mathbb{N}_0$, máskor $\{2, 3, 4, \dots\}$. Ezt nem mindig jelezzük külön.

Sorozat szemléltetése

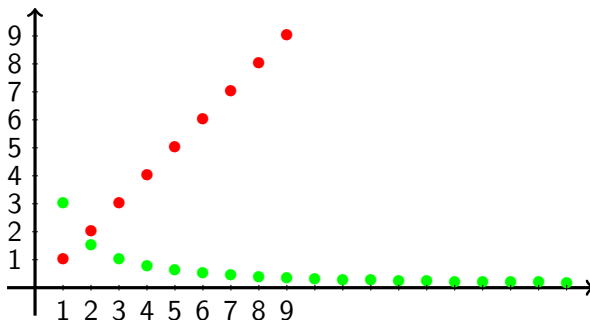
Egy sorozat első néhány eleme sosem határozza meg a sorozatot, de jól szemléltetheti azt.

Példa

Ha $x_n = n$ és $y_n = \frac{3}{n}$, akkor ezt a következő módokon szemléltethetjük.

x : 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...;

y : 3, 1.5, 1, 0.75, 0.6, 0.5, ...;



Sorozat korlátossága

Definíció (emlékeztető (18), (22), (39))

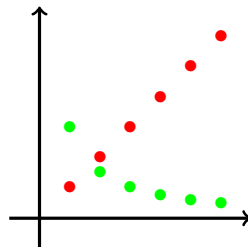
Azt mondjuk, hogy az x_n sorozat **alulról korlátos**, **felülről korlátos**, illetve **korlátos**, ha értékkészlete rendre alulról korlátos, felülről korlátos, illetve korlátos. (18)

Az x_n **szuprémumának** illetve **infimumának** és ha létezik **maximumának** illetve **minimumának** hívjuk rendre az értékkészlet szuprémumát illetve infimumát és maximumát illetve minimumát.

Tétel

Az x_n sorozat pontosan akkor korlátos, ha

$$\exists K \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}^+ : |x_n| \leq K.$$



Sorozat monotonitása

Definíció (emlékeztető (23))

Azt mondjuk, hogy az x_n sorozat

monoton növő, ha $x_n \leq x_{n+1}$;

szigorúan monoton növő, ha $x_n < x_{n+1}$;

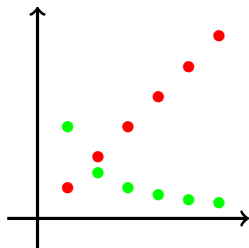
monoton csökkenő, ha $x_n \geq x_{n+1}$;

szigorúan monoton csökkenő, ha $x_n > x_{n+1}$;

minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén.

Megjegyzés

Ez ekvivalens a korábbi definícióval (23).



Sorozat határértéke 1.

Definíció

Azt mondjuk, hogy az x_n sorozat **konvergens** és **határértéke** $a \in \mathbb{R}$, ha

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : N < n \in \mathbb{N}^+ \implies |x_n - a| < \varepsilon.$$

Ezt úgy is mondhatjuk, hogy x_n **tart** vagy **konvergál** a -hoz, és így jelöljük:

$$\lim x_n = a \quad \text{vagy} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad \text{vagy} \quad x_n \rightarrow a.$$

Az N számot az ε pozitív számhoz tartozó **küszöb**nek nevezzük.

Megjegyzés

Az N küszöb függhet ε -tól. Ezt néha jelöljük is: $N(\varepsilon)$. Megkövetelhetjük, hogy N természetes szám legyen. Ilyenkor **küszöbindex**nek is nevezzük.

Tétel

$\lim x_n = a$ *pontosan akkor, ha*

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N}^+ : N < n \in \mathbb{N}^+ \implies |x_n - a| < \varepsilon.$$

Sorozat határértéke 1.

Kiegészítés

Megjegyzés

Az $|x_n - a| < \varepsilon$ egyenlőtlenség, az $|\cdot|$ jel miatt valójában két egyenlőtlenséget jelent, nevezetesen

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon.$$

Másképpen, elég nagy indexre

$$x_n \in]a - \varepsilon, a + \varepsilon[.$$

Jól látható (a definícióból is), hogy ε minél kisebb, az egyenlőtlenség annál erősebb, vagyis igazából a kicsi ε esetén érdekes az állítás.

Az előző példában szereplő $y_n = \frac{3}{n}$ határértéke 0. Ugyanis ha $\varepsilon > 0$, akkor $N = \frac{3}{\varepsilon} \in \mathbb{R}$ jó lesz küszöbnek. Ha $\frac{3}{\varepsilon} = N < n \in \mathbb{N}^+$, akkor

$$|y_n - 0| = \left| \frac{3}{n} - 0 \right| = \frac{3}{n} < \varepsilon.$$

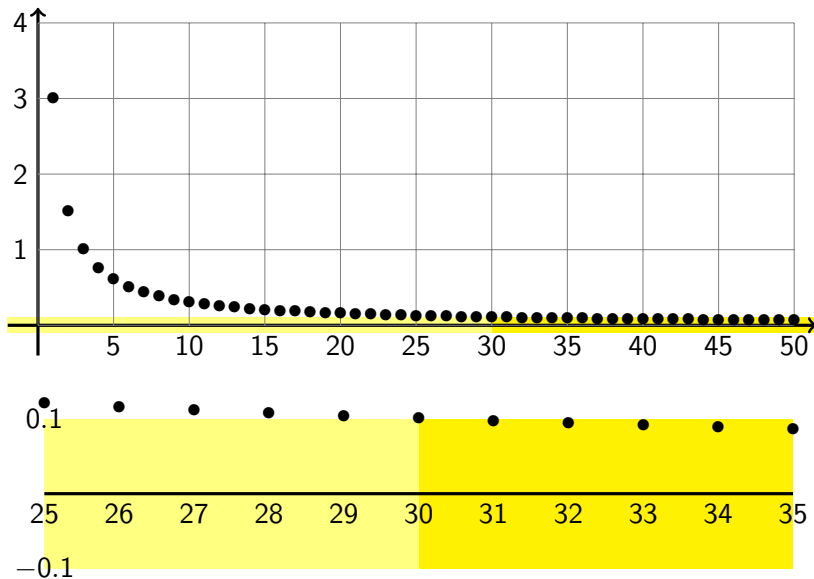
Fontos, hogy minden pozitív ε esetén kell találnunk küszöböt. Sosem elég egy-két nagyon kicsihez. Szemléltetésként azonban elmondható például, hogy $\varepsilon = 0.1$ választáshoz az $N = \frac{3}{0.1} = 30$ megfelelő küszöb, vagyis $n > 30$ index esetén

$$0 - 0.1 = -0.1 < y_n < 0.1 = 0 + 0.1.$$

Ha $\varepsilon = 0.0000001$, akkor $N = 30000000$ egy jó küszöb, vagyis hárommilliónál nagyobb index esetén

$$0 - 0.0000001 = -0.0000001 < y_n < 0.0000001 = 0 + 0.0000001.$$

$$y_n = \frac{3}{n} \rightarrow 0, \quad N(\varepsilon) = \frac{3}{\varepsilon}, \quad N(0.1) = 30.$$



Sorozat határértéke 2.

Definíció

Ha az x_n sorozat nem konvergens, akkor **divergensnek** nevezzük.

Azt mondjuk, hogy az x_n sorozat **határértéke** ∞ , ha

$$\forall K \in \mathbb{R} : \exists N \in \mathbb{R} : N < n \in \mathbb{N}^+ \implies x_n > K.$$

Illetve, azt mondjuk, hogy az x_n sorozat **határértéke** $-\infty$, ha

$$\forall K \in \mathbb{R} : \exists N \in \mathbb{R} : N < n \in \mathbb{N}^+ \implies x_n < K.$$

Ezeket rendre úgy is mondhatjuk, hogy x_n **tart** vagy **divergál** ∞ -hez illetve $-\infty$ -hez, és így jelöljük:

$$\lim x_n = \infty \quad \text{vagy} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty \quad \text{vagy} \quad x_n \rightarrow \infty,$$

illetve

$$\lim x_n = -\infty \quad \text{vagy} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty \quad \text{vagy} \quad x_n \rightarrow -\infty.$$

Az N számot a K számhoz tartozó **küszöbnek** nevezzük.

Sorozat határértéke 2.

Kiegészítés

Az N küszöb most is függhet K -tól. Ezt is szokás jelölni, ilyenkor $N(K)$ -t írunk.
 $x_n > K$ másképpen azt jelenti, hogy $x_n \in]K, \infty[$. $x_n < K$ pedig azt, hogy $x_n \in]-\infty, K[$.
Ebből, és a definícióból is látszik, hogy ∞ -hez tartó sorozat esetén minél nagyobb K , annál nehezebb küszöböt találni. $-\infty$ -hez tartó sorozat esetén pedig minél kisebb K -hoz, de ez most negatív, nagy abszolútértékűt jelent.

Tétel

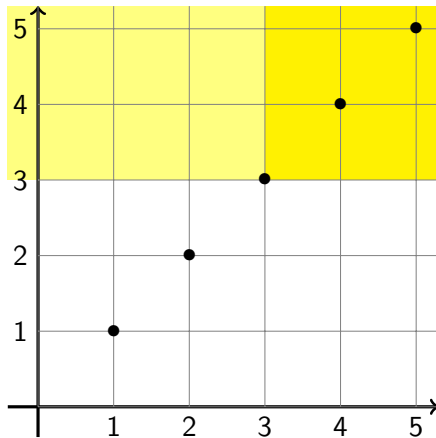
$\lim x_n = \infty$ pontosan akkor, ha

$$\forall K \in \mathbb{R} : \exists N \in \mathbb{N}^+ : N < n \in \mathbb{N}^+ \implies x_n > K.$$

$\lim x_n = -\infty$ pontosan akkor, ha

$$\forall K \in \mathbb{R} : \exists N \in \mathbb{N}^+ : N < n \in \mathbb{N}^+ \implies x_n < K.$$

Az előző példában szereplő $x_n = n$ sorozat határértéke ∞ . Ugyanis $N = K$ mindig jó lesz küszöbnek.



Feladat

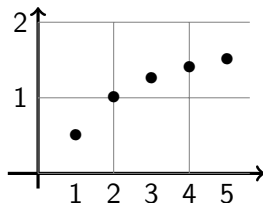
Vizsgáljuk az

$$x_n = \frac{2n-1}{n+1}$$

sorozatot!

A sorozat első elemei:

0.5, 1, 1.25, 1.4, 1.5, ...



Sejtésünk:

- ▶ szigorúan monoton növekvő;
- ▶ $\min x_n = \inf x_n = 0.5$ és $\sup x_n = 2$, azaz alulról korlátos, és a pontos alsó korlátot felveszi, továbbá felülről is korlátos, de a pontos felső korlátot nem veszi fel;
- ▶ $\lim x_n = 2$, azaz konvergens.

Feladat

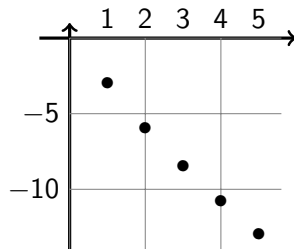
Vizsgáljuk az

$$x_n = \frac{-2n^2 - 6n + 2}{n + 1}$$

sorozatot!

A sorozat első elemei:

$$-3, -6, -8.5, -10.8, -13, \dots$$



Sejtésünk:

- ▶ szigorúan monoton csökkenő;
- ▶ $\max x_n = \sup x_n = -3$ és $\inf x_n = -\infty$, azaz alulról nem korlátos, továbbá felülről korlátos és fel is veszi a pontos felső korlátot;
- ▶ $\lim x_n = -\infty$, tehát divergens.

Feladat

Mutassuk meg, hogy

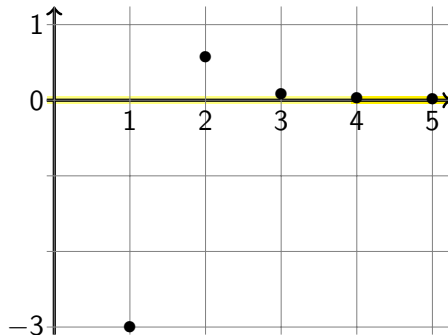
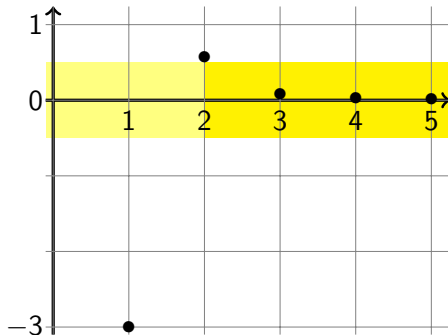
$$\frac{2n^2 + 1}{2n^5 - 3n^4} \rightarrow 0!$$

Feladat

Mutassuk meg, hogy

$$\frac{2n^2 + 1}{2n^5 - 3n^4} \rightarrow 0!$$

$$N(\varepsilon) = \max \left\{ 2, \sqrt[3]{3/\varepsilon} \right\}, \quad \text{így} \quad N(0.5) = 2, \quad \text{és} \quad N(0.05) = \sqrt[3]{60}$$



Feladat

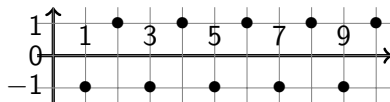
Vizsgáljuk az

$$x_n = (-1)^n$$

sorozatot!

A sorozat első elemei:

$$-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$$



Definíció

Ha x_n sorozat úgy, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$x_n x_{n+1} \leq 0$$

teljesül, akkor **jelváltó** vagy **alternáló** sorozatnak nevezzük.

Hogy egyszerre tudjunk beszélni végtelen és véges határértékről bevezetjük a gömbkörnyezet fogalmát.

Definíció

Az $a \in \mathbb{R}$ gömbkörnyezetének hívjuk a következő intervallumokat, ahol $\varepsilon > 0$ tetszőleges.

$$]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$$

∞ egy gömbkörnyezetének hívjuk a következő intervallumokat, ahol $K \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

$$]K, \infty[$$

∞ egy gömbkörnyezetének hívjuk a következő intervallumokat, ahol $K \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

$$]-\infty, K[$$

Ha $a \in \overline{\mathbb{R}}$ és $\varepsilon > 0$, akkor bevezetjük a következő jelölést.

$$B_\varepsilon(a) = \begin{cases}]a - \varepsilon, a + \varepsilon[, & \text{ha } a \in \mathbb{R} \\]\frac{1}{\varepsilon}, \infty[, & \text{ha } a = \infty \\]-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}[, & \text{ha } a = -\infty \end{cases}$$

Ez alapján azt mondhatjuk, hogy

$$x_n \rightarrow a \in \overline{\mathbb{R}}$$

pontosan akkor, ha a bármely I gömbkörnyezetéhez létezik $N \in \mathbb{R}$ küszöb, melyre

$$n > N \quad \text{esetén} \quad x_n \in I,$$

azaz

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N}^+ : N < n \in \mathbb{N}^+ \implies x_n \in B_\varepsilon(a).$$

Másképp

$$x_n \rightarrow a \in \overline{\mathbb{R}}$$

pontosan akkor, ha a bármely környezete tartalmazza a sorozat összes elemét, véges sok kivételével.

Ez jól mutatja, hogy véges sok tag elhagyása, megváltoztatása, vagy véges sok új tag hozzávétele, nem változtat azon, hogy a sorozat konvergens-e, és ha létezik, a határértékét sem változtatja meg.

Tétel

Ha a és b különböző bővített valós számok, azaz $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ úgy, hogy $a \neq b$, akkor léteznek diszjunkt I_1 és I_2 környezeteik.

Tétel (A határérték egyértelmű)

Ha $\lim x_n = a \in \overline{\mathbb{R}}$, és $\lim x_n = b \in \overline{\mathbb{R}}$, akkor $a = b$.

Definíció

Ha $x_n \rightarrow 0$, akkor azt mondjuk, hogy x_n **nullsorozat**.

A nullsorozatokra néha egyszerűbbek a bizonyítások mint általában konvergens sorozatokra. Közben fogjuk látni, $a \in \mathbb{R}$ esetén $x_n \rightarrow a$ pontosan akkor, ha $(x_n - a)$ nullsorozat, hiszen mindkettő azt jelenti definíció szerint, hogy $|x_n - a|$ kicsi, ha n elég nagy. Láttuk például, hogy

$$\frac{2n-1}{n+1} \rightarrow 2,$$

és könnyen látható, hogy

$$\frac{2n-1}{n+1} - 2 = \frac{2n-1}{n+1} - \frac{2n+2}{n+1} = \frac{-3}{n+1}$$

nullsorozat.

Könnyen látható, hogy ha $x_n \rightarrow a$, akkor $|x_n| \rightarrow |a|$. Az $x_n = (-1)^n$ jó példa arra, hogy fordítva általában nem igaz. Igaz viszont fordítva, ha $a = 0$.

Tétel (Nullsorozat szükséges és elégséges feltétele)

Az x_n sorozat pontosan akkor nullsorozat, ha $|x_n|$ sorozat az.

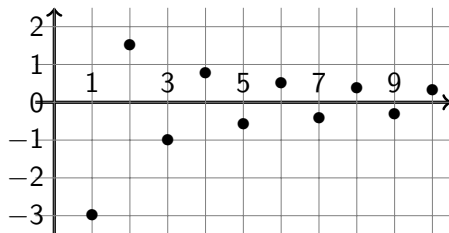
Láttuk, hogy a $\frac{3}{n}$ nullsorozat, így a tétel szerint az alternáló

$$x_n = (-1)^n \frac{3}{n}$$

sorozat is az, tehát konvergens, bár nem monoton.

x_n első elemei

$-3, 1.5, -1, 0.75, -0.6, 0.5, \dots$



Tétel (Határérték létezésének elégséges feltétele)

Monoton sorozatnak van határértéke. Még hozzá, ha x_n monoton növő, akkor

$$\lim x_n = \sup x_n,$$

illetve ha x_n monoton csökkenő, akkor

$$\lim x_n = \inf x_n.$$

Következmény (Konvergencia elégséges feltétele)

Ha egy sorozat monoton és korlátos, akkor konvergens.

Láttuk, hogy például a

$$\left(-1\right)^n \frac{3}{n}$$

sorozat konvergens, de nem monoton, vagyis a konvergenciából nem következik a monotonitás. Ezzel szemben igaz a következő.

Tétel (Konvergencia szükséges feltétele)

Ha az x_n sorozat konvergens, akkor korlátos.

Megjegyzés

Ha $x_n \rightarrow \infty$, akkor alulról korlátos, de felülről nem.

Ha $x_n \rightarrow -\infty$, akkor felülről korlátos, de alulról nem.

Műveletek függvényekkel

A határérték meghatározásához definiálnunk kell műveleteket sorozatok között. Ha f és g függvények úgy, hogy értékkészleteik az $\mathbb{R}$ részhalmazai, és $c \in \mathbb{R}$, akkor értelmezzük a következő műveleteket.

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &= f(x) + g(x) & (x \in \text{Dom}_f \cap \text{Dom}_g), \\(f - g)(x) &= f(x) - g(x) & (x \in \text{Dom}_f \cap \text{Dom}_g), \\(cf)(x) &= cf(x) & (x \in \text{Dom}_f), \\(fg)(x) &= f(x)g(x) & (x \in \text{Dom}_f \cap \text{Dom}_g), \\(f/g)(x) &= f(x)/g(x) & (x \in \text{Dom}_f \cap \text{Dom}_g \text{ és } g(x) \neq 0).\end{aligned}$$

Sorozatokra alkalmazva kapjuk, hogy két sorozat összege, különbsége és szorzata, illetve egy sorozat skalárral való szorzata is sorozat. Két sorozat hányadosa viszont csak akkor lesz sorozat, ha a nevezőbeli nem veszi fel a nullát, vagy csak véges sokszor.

Feladat

Vizsgáljuk az

$$x_n = c$$

konstans sorozatot, ahol $c \in \mathbb{R}$ egy tetszőleges rögzített valós szám!

Az első elemek:

$$c, c, c, c, \dots$$

Tétel

Ha x_n nullsorozat, és y_n korlátos, akkor $x_n \cdot y_n$ is nullsorozat.

Tétel (Határérték és műveletek 1.)

Ha az x_n és y_n sorozatok konvergensek és $c \in \mathbb{R}$, akkor $(x_n + y_n)$, $(x_n - y_n)$, $(x_n \cdot y_n)$ és $(c \cdot x_n)$ is az. Továbbá, ha

$$a = \lim x_n \quad \text{és} \quad b = \lim y_n,$$

akkor

1. $\lim(x_n + y_n) = a + b$,
2. $\lim(x_n - y_n) = a - b$,
3. $\lim(c \cdot x_n) = c \cdot a$,
4. $\lim(x_n \cdot y_n) = a \cdot b$.

Ha még $b \neq 0$, akkor x_n/y_n is konvergens, és

5. $\lim \left(\frac{x_n}{y_n} \right) = \frac{a}{b}$.

Ez alapján tudjuk meghatározni például, hogy

$$\frac{2n-1}{n+1} \rightarrow 2.$$

Ugyanis

$$\frac{2n-1}{n+1} = \frac{2-1/n}{1+1/n}.$$

Azt láttuk, hogy $1/n \rightarrow 0$, és $c = 1/3$ konstans szorzóval kapjuk, hogy $1/n \rightarrow 0$.

A fenti tétel szerint ekkor

$$\frac{2n-1}{n+1} = \frac{2-1/n}{1+1/n} \rightarrow \frac{2-0}{1+0} = 2.$$

Teljes indukcióval belátható, hogy ugyanez több, de véges sok konvergens sorozatra is igaz.

Példa

$$\lim \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{100}{n^2} \right) = 0 + 0 + \cdots + 0 = 0$$

Nem igaz viszont végtelen sok sorozat esetén.

$$\lim \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} \right)$$

nem számolható így, ez a határérték ugyan létezik, de nem 0. Ki is tudjuk számolni.

$$\lim \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} \right) = \lim \frac{n(n+1)/2}{n^2} = \lim \frac{1(1+1/n)/2}{1} = \frac{1}{2}$$

Tétel (Határérték és műveletek 2.)

1. Ha $x_n \rightarrow \infty$, és y_n alulról korlátos, akkor

$$x_n + y_n \rightarrow \infty.$$

2. Ha $x_n \rightarrow -\infty$, és y_n felülről korlátos, akkor

$$x_n + y_n \rightarrow -\infty.$$

3. Ha $x_n \rightarrow \infty$, és y_n felülről korlátos, akkor

$$x_n - y_n \rightarrow \infty.$$

4. Ha $x_n \rightarrow -\infty$, és y_n alulról korlátos, akkor

$$x_n - y_n \rightarrow -\infty.$$

Következmény

Ha az x_n , x'_n , y_n és z_n , z'_n sorozatokról csak annyit tudunk, hogy $\lim x_n = \lim x'_n = -\infty$, $\lim y_n \in \mathbb{R}$ és $\lim z_n = \lim z'_n = \infty$, akkor

$$\lim(x_n + x'_n) = \lim(x_n + y_n) = -\infty,$$

és

$$\lim(z_n + z'_n) = \lim(z_n + y_n) = \infty.$$

Viszont ebből nem tudjuk, mi a határértéke, sőt azt sem létezik-e határértéke az

$$(x_n - x'_n), (x_n + z_n), (z_n - z'_n)$$

sorozatoknak.

Az összeadás és kivonásra vonatkozó eddigi állításokat foglalja össze a két alábbi táblázat.

$a \backslash b$	$-\infty$	$\mathbb{R}$	∞
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	?
$\mathbb{R}$	$-\infty$	$a + b$	∞
∞	?	∞	∞

összeg sorozat
határértéke

$a \backslash b$	$-\infty$	$\mathbb{R}$	∞
$-\infty$	?	$-\infty$	$-\infty$
$\mathbb{R}$	∞	$a - b$	$-\infty$
∞	∞	∞	?

különbség sorozat
határértéke

A ? határozatlan értéket jelent.

Tétel (Határérték és műveletek 3.)

1. Ha $\lim x_n = \infty$, és $\lim y_n > 0$ vagy $\lim y_n = \infty$, akkor

$$\lim x_n y_n = \infty.$$

2. Ha $\lim x_n = \infty$, és $\lim y_n < 0$ vagy $\lim y_n = -\infty$, akkor

$$\lim x_n y_n = -\infty.$$

3. Ha $\lim x_n = -\infty$, és $\lim y_n > 0$ vagy $\lim y_n = \infty$, akkor

$$\lim x_n y_n = -\infty.$$

4. Ha $\lim x_n = -\infty$, és $\lim y_n < 0$ vagy $\lim y_n = -\infty$, akkor

$$\lim x_n y_n = \infty.$$

A szorzásra vonatkozó eddigi állításokat foglalja össze az alábbi táblázat.

$a \backslash b$	$-\infty$	$\mathbb{R}^-$	0	$\mathbb{R}^+$	∞
$-\infty$	∞	∞	$?$	$-\infty$	$-\infty$
$\mathbb{R}^-$	∞	ab	0	ab	$-\infty$
0	$?$	0	0	0	$?$
$\mathbb{R}^+$	$-\infty$	ab	0	ab	∞
∞	$-\infty$	$-\infty$	$?$	∞	∞

szorzat sorozat határértéke

A $?$ határozatlan értéket jelent.

Tétel (Határérték és műveletek 4.)

1. Ha $\lim x_n = \infty$, és $\lim y_n > 0$, akkor

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = \infty.$$

2. Ha $\lim x_n = \infty$, és $\lim y_n < 0$, akkor

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = -\infty.$$

3. Ha $\lim x_n = -\infty$, és $\lim y_n > 0$, akkor

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = -\infty.$$

4. Ha $\lim x_n = -\infty$, és $\lim y_n < 0$, akkor

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = \infty.$$

Tétel

$$\lim |x_n| = \infty \text{ pontosan akkor ha } \lim \frac{1}{x_n} = 0.$$

Következmény (Határérték és műveletek 4.)

5. Ha $\lim y_n = \infty$ vagy $\lim y_n = -\infty$, és x_n konvergens, akkor

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = 0.$$

6. Ha y_n nullsorozat úgy, hogy nem veszi fel a 0-t, illetve létezik $\lim x_n \in \overline{\mathbb{R}}$ és $\lim x_n \neq 0$, akkor

$$\lim \left| \frac{x_n}{y_n} \right| = \infty.$$

Az osztásra vonatkozó eddigi állításokat foglalja össze az alábbi táblázat.

$a \backslash b$	$-\infty$	$\mathbb{R}^-$	0	$\mathbb{R}^+$	∞
$-\infty$	$?^+$	∞	$ \cdot = \infty$	$-\infty$	$?^-$
$\mathbb{R}^-$	0	a/b	$ \cdot = \infty$	a/b	0
0	0	0	?	0	0
$\mathbb{R}^+$	0	a/b	$ \cdot = \infty$	a/b	0
∞	$?^-$	$-\infty$	$ \cdot = \infty$	∞	$?^+$

hányados sorozat határértéke

A ? határozatlan értéket jelent.

A $?^+$ és $?^-$ határozatlan értéket jelent, de $?^+$ nem lehet negatív, se $-\infty$, és $?^-$ nem lehet pozitív se ∞ .

A $|\cdot| = \infty$ is határozatlan értéket jelent, de ilyenkor $\lim \left| \frac{x_n}{y_n} \right| = \infty$.

Tétel ((320))

Ha $\alpha \in \mathbb{Q}$, akkor

$$\lim n^{\alpha} = \begin{cases} \infty, & \text{ha } \alpha > 0, \\ 1, & \text{ha } \alpha = 0, \\ 0, & \text{ha } \alpha < 0. \end{cases}$$

Polinom, azaz racionális egész függvény

Definíció (Emlékeztető (100))

Ha $k \in \mathbb{N}^+$, és $a_0, a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $a_k \neq 0$, akkor a

$$p(x) = a_k x^k + \dots a_1 x + a_0$$

függvényt k -adfokú (valós együtthatós) polinomnak nevezzük, míg $a_0, a_1, \dots, a_k$ -t a polinom együtthatóinak, a_k -t a főegyütthatónak hívjuk.

Ha nem tesszük fel, hogy $a_k \neq 0$, akkor legfeljebb k -adfokú polinomról beszélünk.

A konstans függvényeket 0-adfokú polinomnak nevezzük.

Polinomnak vagy racionális egész függvénynek nevezünk egy függvényt, ha k -adfokú polinom valamely $k \in \mathbb{N}_0$ esetén.

A $p(x)$ polinom gyökének nevezzük a zérushelyeit, azaz azon x számokat, melyekre $p(x) = 0$.

A $p(x)$ k -adfokú polinom fokszámát $\deg p(x)$ -szel jelöljük, azaz

$$\deg p(x) = k.$$

Feladat

Mi a

$$2n^2 + n - 1$$

sorozat határértéke?

Feladat

Mi a

$$2n^2 - n - 1$$

sorozat határértéke?

Tétel

Egy legalább elsőfokú polinomsorozat határértéke ∞ vagy $-\infty$. A határérték előjele a főegyüttható előjelével egyezik.

Ugyanis nagy n -ekre a nagyobb kitevőjű hatványok nagyobbak, így a főtaghoz képest a többi elhanyagolható.

Példa

Eszerint

$$\lim(n^6 - 20n^5 - 14n^4 - 345n^3 - 12n^2 + n - 111) = \infty.$$

A tétel felhasználása nélkül.

$$\begin{aligned} n^6 - 20n^5 - 14n^4 - 345n^3 - 12n^2 + n - 111 &= \\ &= n^6 \left(1 - \frac{20}{n} - \frac{14}{n^2} - \frac{345}{n^3} - \frac{12}{n^4} + \frac{1}{n^5} - \frac{111}{n^6} \right) \rightarrow \infty \end{aligned}$$

A sorozat első elemei negatívak, sőt gyorsan csökkennek a 18. elemig.

$$\begin{aligned} x_1 &= -500, x_2 = -3\,717, x_3 = -14\,796, x_4 = -42\,347, \dots, \\ x_{17} &= -7\,127\,412, x_{18} = -7\,264\,821, x_{19} = -6\,671\,372, \\ x_{20} &= -5\,004\,891, x_{21} = -1\,839\,060, x_{22} = 3\,348\,223, \dots \end{aligned}$$

Racionális tört függvény

Definíció

Ha egy függvény felírható két polinom hányadosaként, akkor **racionális tört függvénynek** nevezzük.

Megjegyzés

Ha $p(x)$ és $q(x)$ polinomok, akkor

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

egy racionális tört függvény.

Általában egy ilyen értelmezési tartománya nem az egész számegyenes, mert a nevező gyökeiben nincs értelmezve.

$q(x) = 1$ konstans függvény is polinom, így maguk a polinomok is racionális tört függvények.

Korábban már beláttuk definíció szerint a következőket.

Feladat

Határozzuk meg a

$$\frac{2n-1}{n+1}$$

sorozat határértékét!

Feladat

Határozzuk meg a

$$\frac{-2n^2 - 6n + 2}{n+1}$$

sorozat határértékét!

Feladat

Határozzuk meg a

$$\frac{2n^2 + 1}{2n^5 - 3n^4}$$

sorozat határértékét!

Általános szabály, hogy ha a

$$\frac{p(n)}{q(n)}$$

sorozat határértékét akarjuk meghatározni, ahol $p(x)$ és $q(x)$ polinomok, akkor

$$n^{\deg q(x)}\text{-szel}$$

kell egyszerűsíteni. Így a nevezőben marad a főegyüttható és nullsorozatok, vagyis a nevező határértéke egy nem nulla (de véges) szám lesz. Ezzel pedig el tudjuk osztani a számláló határértékét, akkor is, ha az $\pm\infty$.

Tétel

Legyen $p(x)$ és $q(x)$ polinom! Ha $\deg p(x) = \deg q(x)$, akkor $\lim \frac{p(n)}{q(n)}$ a főegyütthatók hányadosa.

Ha $\deg p(x) < \deg q(x)$, akkor $\lim \frac{p(n)}{q(n)} = 0$.

Végül, ha $\deg p(x) > \deg q(x)$, akkor $\lim \frac{p(n)}{q(n)} = \pm\infty$, a főegyütthatók előjelétől függően.

Tétel (A határérték monoton)

Ha $x_n \leq y_n$ minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén, és mindkét sorozat konvergens, akkor

$$\lim x_n \leq \lim y_n.$$

Megjegyzés

A határérték nem szigorúan monoton. Ugyanis például

$$\frac{1}{n} < \frac{2}{n},$$

mégis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n}.$$

Tétel (Rendőrelv)

Ha $x_n \leq y_n \leq z_n$ minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén, és x_n és z_n konvergens úgy, hogy

$$\lim x_n = a = \lim z_n,$$

akkor y_n is az, és

$$\lim y_n = a.$$

Tétel (Speciális rendőrelv)

Tegyük fel, hogy $x_n \leq y_n$ minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén.

- ▶ Ha $\lim x_n = \infty$, akkor $\lim y_n = \infty$.
- ▶ Ha $\lim y_n = -\infty$, akkor $\lim x_n = -\infty$.

Tétel

Ha $k \in \mathbb{N}^+$, és x_n egy nem negatív tagú, konvergens sorozat, akkor $\sqrt[k]{x_n}$ is az, és

$$\lim \sqrt[k]{x_n} = \sqrt[k]{\lim x_n}.$$

Következmény

Ha x_n konvergens, és $k \in \mathbb{N}^+$ páratlan, akkor $\sqrt[k]{x_n}$ is konvergens, és

$$\lim \sqrt[k]{x_n} = \sqrt[k]{\lim x_n}.$$

Tétel ((322))

Ha $\alpha \in \mathbb{Q}$, $\alpha \geq 0$, és x_n egy nem negatív tagú, konvergens sorozat, akkor x_n^α is az, és

$$\lim x_n^\alpha = (\lim x_n)^\alpha .$$

Megjegyzés ((322))

Ha x_n pozitív tagú, és határértéke is pozitív, akkor nem kell az $\alpha \geq 0$ feltétel.

Tétel

Ha $k \in \mathbb{N}^+$, és $\lim x_n = \infty$, akkor

$$\lim \sqrt[k]{x_n} = \infty.$$

Következmény

Ha $k \in \mathbb{N}^+$ páratlan, és $\lim x_n = -\infty$, akkor

$$\lim \sqrt[k]{x_n} = -\infty.$$

Tétel ((322))

Ha $\alpha \in \mathbb{Q}$, és $\lim x_n = \infty$, akkor

$$\lim x_n^\alpha = \begin{cases} \infty, & \text{ha } \alpha > 0, \\ 1, & \text{ha } \alpha = 0, \\ 0, & \text{ha } \alpha < 0. \end{cases}$$

Feladat

Határozzuk meg a

$$\frac{2n^2\sqrt{n} + 7}{\sqrt{2n^5} - 3n}$$

sorozat határértékét!

Feladat

Határozzuk meg a

$$\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - 3}$$

sorozat határértékét!

Mértani sorozat

Definíció

Azt mondjuk, hogy x_n **mértani sorozat**, ha valamely $q \in \mathbb{R}$ esetén

$$x_{n+1} = qx_n$$

teljesül minden $n \in \mathbb{N}^+$ -re. A fenti q -t az x_n mértani sorozat **hányadosának**, vagy **kvóciensének** nevezzük.

Megjegyzés

Ha egy mértani sorozat első eleme 0, akkor ez a konstans 0 sorozat.

Ha az első elem nem 0, akkor a hányados egyértelműen meghatározott.

$$q = x_2/x_1$$

Ha x_n mértani sorozat hányadosa q , akkor

$$x_n = x_1 q^{n-1}.$$

Tétel

A q^n mértani sorozat határértéke q -tól függ. Nevezetesen

$$\lim q^n = \begin{cases} 0, & \text{ha } -1 < q < 1, \\ 1, & \text{ha } q = 1, \\ \infty, & \text{ha } q > 1. \end{cases}$$

$q \leq -1$ esetén a q^n sorozatnak nem létezik határértéke.

Feladat

Határozzuk meg a

$$\frac{2^n}{3^n + (1/3)^n}$$

sorozat határértékét!

Feladat

Határozzuk meg a

$$\frac{2^{4n+1} + 3^{2n-2}}{3^n - 4^{2n}}$$

sorozat határértékét!

Egy $q > 1$ kvóciensű mértani sorozat gyorsabban tart ∞ -hez, bármely n^α hatvány sorozatnál, és így bármely polinomnál is.

Tétel ((320))

Ha $q > 1$, és $\alpha \in \mathbb{Q}$, akkor

$$\lim \frac{n^\alpha}{q^n} = 0.$$

Feladat

Határozzuk meg a

$$\frac{3^n + n^2}{2^n + n^3 + 1}$$

sorozat határértékét!

Definíció (Emlékeztető (44))

Ha $n \in \mathbb{N}_0$, akkor n faktoriálisnak nevezzük és $n!$ -ként jelöljük, az alábbi értéket.

$$0! = 1,$$

és ha már értelmeztük $n!$ -t valamely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén, akkor

$$(n+1)! = (n+1)n!.$$

Megjegyzés

Ha $n \in \mathbb{N}^+$, akkor

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n.$$

Emiatt

$$n! \geq 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 = 2^{n-1} \rightarrow \infty,$$

így a speciális rendőrelv szerint

$$\lim n! = \infty.$$

Feladat

Határozzuk meg az

$$\frac{(n+2)!}{(n^2+1)n!}$$

sorozat határértékét!

$n!$ gyorsabban tart ∞ -hez mint bármely $q > 1$ kvóciensű mértani sorozat.

Tétel

Ha $q \in \mathbb{R}$, akkor

$$\lim \frac{q^n}{n!} = 0$$

n^n gyorsabban tart ∞ -hez mint $n!$.

Tétel

$$\lim \frac{n!}{n^n} = 0$$

Ha $\alpha < 0 < \beta$ és $0 < p < 1 < q$, akkor

$$\begin{array}{cccccccc}
 n^{-n} & \ll & p^n & \ll & n^\alpha & \ll & 1 & \ll & n^\beta & \ll & q^n & \ll & n! & \ll & n^n \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & & 0 & & 0 & & & & \infty & & \infty & & \infty & & \infty
 \end{array}$$

illetve

$$\begin{array}{cccccccc}
 \sqrt[n]{n^{-n}} & \sqrt[n]{p^n} & \sqrt[n]{n^\alpha} & \sqrt[n]{1} & \sqrt[n]{n^\beta} & \sqrt[n]{q^n} & \sqrt[n]{n!} & \sqrt[n]{n^n} \\
 \parallel & \parallel & \downarrow & \parallel & \downarrow & \parallel & \downarrow & \parallel \\
 1/n & p & 1 & 1 & 1 & q & \infty & n \\
 \downarrow & & & & & & & \downarrow \\
 0 & & & & & & & \infty
 \end{array}$$

Tétel

$$\lim \sqrt[n]{n} = 1$$

Következmény ((321))

Tetszőleges $\alpha \in \mathbb{Q}$ esetén

$$\lim \sqrt[n]{n^\alpha} = 1.$$

Következmény

Tetszőleges $c > 0$ esetén

$$\lim \sqrt[n]{c} = 1.$$

Tétel

$$\lim \sqrt[n]{n!} = \infty$$

Feladat

Határozzuk meg az

$$\sqrt[n]{n}$$

sorozat határértékét!

Feladat

Határozzuk meg az

$$\sqrt[n]{\frac{2n^2 + 1}{2n^5 - 3n^4}}$$

sorozat határértékét!

Feladat

Határozzuk meg az

$$\sqrt[n]{\frac{2^n + 5^n}{3^n + 4^n}}$$

sorozat határértékét!

Definíció

Ha $\alpha(n)$ egy $\mathbb{N}^+$ -beli szigorúan monoton növekvő sorozat, akkor azt mondjuk, hogy az $x_{\alpha(n)}$ sorozat az x_n egy **rézsorozat**a.

Példa

- ▶ Minden sorozat rézsorozat önmagának.
- ▶ $(n+3)^2$ egy rézsorozat az $x_n = n^2$ sorozatnak. Ugyanis $\alpha(n) = n+3$ jó választás, hiszen $x_{\alpha(n)} = x_{n+3} = (n+3)^2$.

$$1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, \dots$$

- ▶ $6n+5$ egy rézsorozat az $x_n = 2n+1$ sorozatnak. Ugyanis $\alpha(n) = 3n+2$ jó választás, hiszen $x_{\alpha(n)} = x_{3n+2} = 2(3n+2) + 1 = 6n+5$.

$$3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, \dots$$

Tétel

Minden sorozatnak van monoton részsorozata.

Tétel (Bolzano-Weierstrass-féle kiválasztási tétel (sorozat))

Minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.

Torlódási pont

Definíció

Az $a \in \overline{\mathbb{R}}$ bővített valós számot az x_n sorozat **torlódási pontjának** nevezzük, ha létezik olyan $x_{\alpha(n)}$ részsorozat, melynek határértéke a .

Példa

$x_n = (-1)^n$ sorozatnak torlódási pontja az 1 és a -1 , mert $\lim x_{2n} = 1$, és $\lim x_{2n-1} = -1$. Nyilván a határérték torlódási pont is, de míg a határérték egyértelmű, egy sorozatnak több torlódási pontja is lehet.

Tétel

Minden sorozatnak van torlódási pontja.

Tétel

$a \in \overline{\mathbb{R}}$ pontosan akkor torlódási pontja az x_n sorozatnak, ha bármely gömbkörnyezete tartalmazza a sorozat végtelen sok elemét.

Tétel

Ha $x_{\alpha(n)}$ és $x_{\beta(n)}$ az x_n részsorozatai úgy, hogy $\text{Ran}_\alpha \cup \text{Ran}_\beta = \mathbb{N}$, és

$$\lim x_{\alpha(n)} = \lim x_{\beta(n)} = a,$$

akkor létezik

$$\lim x_n = a.$$

Hasonló mondható 3, vagy még több, de csak véges sok részsorozat esetén.

Tétel (Határérték szükséges és elégséges feltétele)

Ha $a \in \overline{\mathbb{R}}$, akkor a következő állítások ekvivalensek.

1. $\lim x_n = a$.
2. *Minden $x_{\alpha(n)}$ részsorozatra $\lim x_{\alpha(n)} = a$.*
3. *Az x_n sorozatnak a az egyetlen torlódási pontja.*

Definíció

Az x_n sorozat torlódási pontjainak szuprémumát illetve infimumát a sorozat **felső**, illetve **alsó határérték**ének, vagy **limesz superior**jának, illetve **limesz inferior**jának nevezzük és alkalmazzuk rá a

$$\limsup x_n, \quad \text{vagy} \quad \overline{\lim} x_n,$$

illetve a

$$\liminf x_n, \quad \text{vagy} \quad \underline{\lim} x_n$$

jelölést.

Tétel

Az x_n *tetszőleges sorozat esetén*

$$\limsup x_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{n \geq k} x_n = \inf_{k \in \mathbb{N}^+} \sup_{n \geq k} x_n$$

és

$$\limsup x_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \inf_{n \geq k} x_n = \sup_{k \in \mathbb{N}^+} \inf_{n \geq k} x_n.$$

Következmény

Egy tetszőleges x_n sorozatra

1. $\limsup x_n = \infty \iff \sup x_n = \infty$
2. $\limsup x_n = -\infty \iff \lim x_n = -\infty$
3. $\limsup x_n = s \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon > 0 :$

$$|\{n \in \mathbb{N}^+ : x_n - s \geq \varepsilon\}| < \aleph_0 = |\{n \in \mathbb{N}^+ : |x_n - s| < \varepsilon\}|$$

illetve

1. $\liminf x_n = \infty \iff \lim x_n = \infty$
2. $\liminf x_n = -\infty \iff \inf x_n = -\infty$
3. $\liminf x_n = s \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon > 0 :$

$$|\{n \in \mathbb{N}^+ : s - x_n \geq \varepsilon\}| < \aleph_0 = |\{n \in \mathbb{N}^+ : |x_n - s| < \varepsilon\}|$$

Tétel

Ha $a \in \overline{\mathbb{R}}$, akkor a következő állítások ekvivalensek.

1. $\lim x_n = a$.
2. $\liminf x_n = \limsup x_n = a$.

Példa

$$\limsup(-1)^n = 1, \quad \text{és} \quad \liminf(-1)^n = -1$$

Feladat

Határozzuk meg az

$$x_n = 2^{(-1)^n n}$$

sorozat összes torlódási pontját, limesz superiorját, limesz inferiorját, és ha létezik a határértékét is!

Feladat

Határozzuk meg az

$$x_n = \frac{n^2 + n^2 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{2n^2 + 3n + 7}$$

sorozat limesz superiorját, limesz inferiorját és a határértékét, ha létezik!

Feladat

Határozzuk meg az

$$x_n = \frac{3^{2n+1} + (-4)^n}{5 + 9^{n+1}}$$

sorozat limesz superiorját, limesz inferiorját és a határértékét, ha létezik!

Rekurzív sorozat

Tétel

Ha az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény felcserélhető a határértékkel, azaz konvergens x_n sorozat esetén

$$\lim f(x_n) = f(\lim x_n),$$

és az $x_{n+1} = f(x_n)$ rekurzióval adott sorozat konvergens, akkor határértéke az f függvény fixpontja, azaz $a = \lim x_n$ jelöléssel

$$f(a) = a.$$

Feladat

Legyen $x_1 = 11$ és $x_{n+1} = \sqrt{\frac{x_n^2 + 9}{2}}$ minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén!

$\inf x_n = ?$

$\sup x_n = ?$

$\lim x_n = ?$

Definíció

Azt mondjuk, hogy az x_n sorozat **Cauchy-sorozat**, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz létezik $N \in \mathbb{R}$ küszöb, melyre $n, k > N$ esetén

$$|x_n - x_k| < \varepsilon.$$

Tétel (Cauchy-kritérium (sorozatokra))

Egy valós számsorozat pontosan akkor konvergens, ha Cauchy-sorozat.

Útmutatás.

Ha x_n konvergens, akkor létezik $a \in \mathbb{R}$, melyre $\lim x_n = a$. Legyen $\varepsilon > 0$, ekkor mivel $\varepsilon/2$ is pozitív, ezért létezik $N \in \mathbb{R}$ küszöb, hogy $n, k > N$ esetén $|x_n - a| < \varepsilon/2$ és $|x_k - a| < \varepsilon/2$. Ekkor

$$|x_n - x_k| = |x_n - a + a - x_k| \leq |x_n - a| + |a - x_k| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Fordítva, ahogy konvergens sorozatról beláttuk, hogy korlátos, ugyanúgy Cauchy-sorozatról is belátható. Így a Bolzano-Weierstrass kiválasztási tétel szerint Cauchy-sorozatnak van konvergens részsorozata. Szintén megmutatható, hogy ennek határértéke lesz az eredeti sorozat határértéke is. □

Példa

Vizsgáljuk az

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

sorozatot.

Világos, hogy $x_{n+1} - x_n = 1/(n+1) > 0$, azaz x_n szigorúan monoton növvő, így van határértéke, ami nagyobb mint $x_1 = 1$. Ha $N \in \mathbb{R}$ tetszőleges, akkor létezik $n \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $n > N$, és erre $k = (n+1)^2 > N$ is teljesül.

$$\begin{aligned} |x_k - x_n| &= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2 - 1} + \cdots + \frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+1} \geq \\ &\geq \frac{(n+1)^2 - (n+1)}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} = 1. \end{aligned}$$

Így ekkor $\varepsilon = 1 > 0$ -hoz nem létezik küszöb, vagyis x_n nem Cauchy-sorozat, így nem is konvergens, tehát

$$\lim x_n = \infty.$$

Tétel (emlékeztető, (57))

Ha $n \in \mathbb{N}^+$, és $a, b \in \mathbb{R}$, akkor

$$a^n - b^n = (a - b) \left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1} \right).$$

Következmény

Ha $n \in \mathbb{N}^+$, és $0 \leq b \leq a$, akkor

$$(a - b)nb^{n-1} \leq a^n - b^n \leq (a - b)na^{n-1}.$$

Tétel

Ha $x \in \mathbb{R}$, akkor az $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ sorozat konvergens, és határértéke pozitív.

Tétel

Ha $x, y \in \mathbb{R}$, akkor $A_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n - \left(1 + \frac{x+y}{n}\right)^n$ nullsorozat.

Definíció

Jelölje e az $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ sorozat határértékét, azaz legyen

$$e = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n !$$

Ezt Euler-féle számnak nevezzük.

Legyen továbbá minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$e^x = \lim \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n !$$

Megjegyzés

$x \in \mathbb{Q}$ esetén ez megegyezik a korábban definiált értékkel.

e a természetes alapú exponenciális és logaritmus függvény alapszáma, irracionális (sőt transzcendens) szám, 10 tizedesjegyre kerekített értéke

$$e \approx 2.7182818285.$$

Következmény

Ha $x, y \in \mathbb{R}$, akkor $e^x e^y = e^{x+y}$.

Feladat

Határozzuk meg az $\left(1 + \frac{x}{n^2}\right)^{n^2}$ sorozat határértékét, ha létezik!

Feladat

Határozzuk meg az $\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n$ sorozat határértékét, ha létezik!

Feladat

Határozzuk meg az $\left(1 - \frac{3}{n}\right)^{n+1}$ sorozat határértékét, ha létezik!

Feladat

Határozzuk meg az $\left(\frac{3n+1}{3n-2}\right)^{3n}$ sorozat határértékét, ha létezik!

Feladat

Határozzuk meg az $\left(\frac{3n+1}{3n-2}\right)^{2n}$ sorozat határértékét, ha létezik!

Feladat

Határozzuk meg az $\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n^2+2n}$ sorozat határértékét, ha létezik!

Definíció

Egy $z : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ függvényt **komplex számsorozatnak** nevezünk. Egy tetszőleges $n \in \mathbb{N}^+$ esetén a $z(n)$ jelölés helyett az z_n jelölést használjuk, és azt mondjuk, hogy z_n a sorozat n -edik eleme. A z_n komplex sorozatot **korlátosnak** nevezzük, ha létezik $K \in \mathbb{R}$ úgy, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $|z_n| \leq K$.

Azt mondjuk, hogy a z_n komplex sorozat **konvergens** és **határértéke** $w \in \mathbb{C}$, ha

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{R} : N < n \in \mathbb{N}^+ \implies |z_n - w| < \varepsilon.$$

Ezt úgy is mondhatjuk, hogy z_n **tart** vagy **konvergál** w -hez, és így jelöljük:

$$\lim z_n = w \quad \text{vagy} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = w \quad \text{vagy} \quad z_n \rightarrow w.$$

Az N számot az ε pozitív számhoz tartozó **küszöbnek** nevezzük.

A z_n sorozatot **divergensnek** nevezzük, ha nem konvergens.

Azt mondjuk, hogy z_n **divergál a végtelenhez** jelben $z_n \rightarrow \infty$, ha $|z_n| \rightarrow \infty$.

Lemma

$z \in \mathbb{C}$ esetén $|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z| \leq |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$.

Tétel

Legyen z_n komplex számsorozat és $w \in \mathbb{C}$!

Ekkor z_n korlátos pontosan akkor, ha $\operatorname{Re} z_n$ és $\operatorname{Im} z_n$ az, illetve pontosan akkor ha $|z_n|$ korlátos.

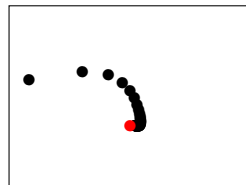
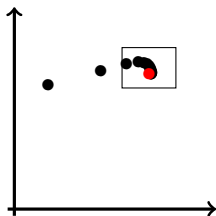
$z_n \rightarrow w$ pontosan akkor, ha $\operatorname{Re} z_n \rightarrow \operatorname{Re} w$ és $\operatorname{Im} z_n \rightarrow \operatorname{Im} w$.

Továbbá, $w \neq 0$ esetén $z_n \rightarrow w$ pontosan akkor, ha $|z_n| \rightarrow |w|$ és $\arg z_n \rightarrow \arg w$.

Végül, $w = 0$ esetén $z_n \rightarrow w = 0$ pontosan akkor, ha $|z_n| \rightarrow 0$. Ez utóbbi azt jelenti, hogy komplex sorozatok esetén is igaz, hogy z_n pontosan akkor nullsorozat, ha $|z_n|$ nullsorozat.

Példa

$$\frac{2n^2 + n - 1}{n^2 + 3} + i \frac{2^{2n+1} + 3^n}{4^n + 2^n} \rightarrow 2 + 2i$$



Most is lehetne gömbkörnyezettel definiálni a határértéket, illetve a határérték most is egyértelmű.

Konvergens sorozat komplex esetben is korlátos.

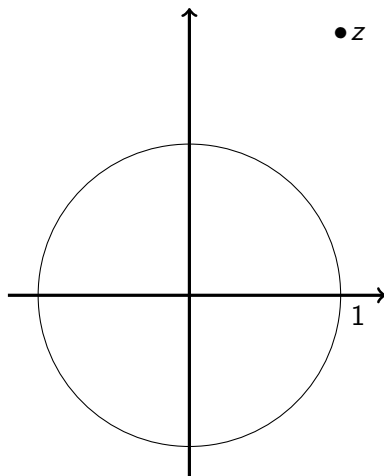
A határérték és az alapl műveletek kapcsolata most is igaz konvergens sorozatok esetén.

Komplex esetben is beszélhetünk mértani sorozatról, részsorozatról, torlódási pontról, de nincs $\limsup$ és $\liminf$.

Komplex esetben is beszélhetünk Cauchy-sorozatról, és itt is igaz a Cauchy-kritérium.

Radián

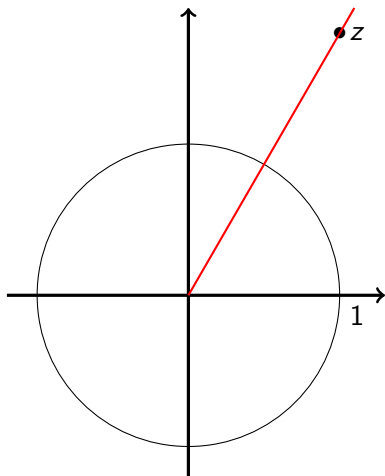
Egy z komplex szám argumentumát mérjük a következőképpen! (Az ábrán $z = 1 + \sqrt{3}i$.)



Jelölje π az egységsugarú félkörív hosszát.

Radián

Egy z komplex szám argumentumát mérjük a következőképpen! (Az ábrán $z = 1 + \sqrt{3}i$.)

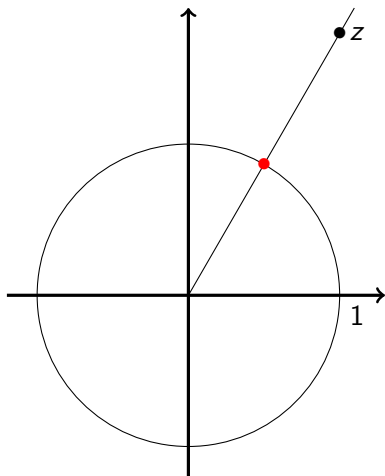


Jelölje π az egységsugarú félkörív hosszát.

Rajzoljunk egy 0-ból induló félegyenest z -n át!

Radián

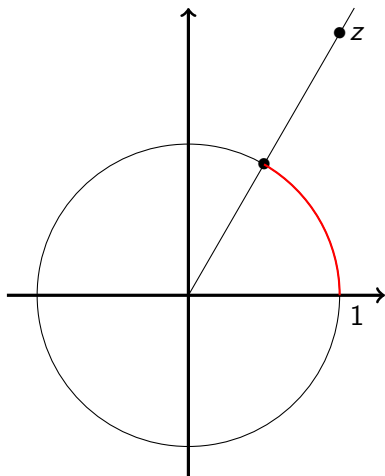
Egy z komplex szám argumentumát mérjük a következőképpen! (Az ábrán $z = 1 + \sqrt{3}i$.)



Jelölje π az egységsugarú félkörív hosszát.
Rajzoljunk egy 0-ból induló félegyenest z -n át!
Ennek a sugárnak vegyük a metszetét az
egységkörrel! $(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)$

Radián

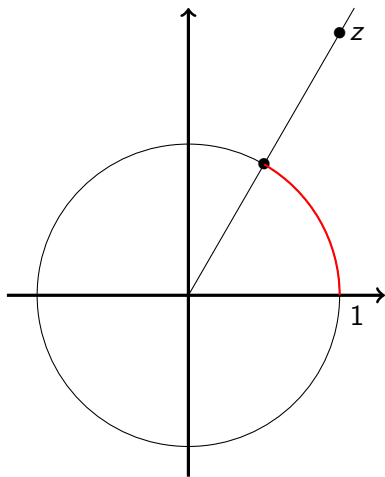
Egy z komplex szám argumentumát mérjük a következőképpen! (Az ábrán $z = 1 + \sqrt{3}i$.)



Jelölje π az egységsugarú félkörív hosszát.
Rajzoljunk egy 0-ból induló félegyenest z -n át!
Ennek a sugárnak vegyük a metszetét az egységgörrel! $(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)$
Az 1-ből induljunk pozitív irányba az egységgörön, egészen az előbbi metszetig! Az így kapott körív hossza lesz $\arg z$ értéke radiánban. $(\pi/3)$

Radián

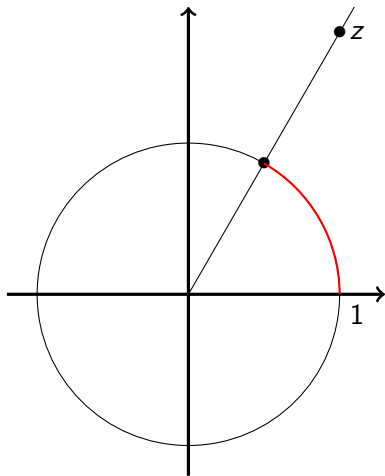
Egy z komplex szám argumentumát mérjük a következőképpen! (Az ábrán $z = 1 + \sqrt{3}i$.)



Jelölje π az egységsugarú félkörív hosszát. Rajzoljunk egy 0-ból induló félegyenest z -n át! Ennek a sugárnak vegyük a metszetét az egységgörrel! $(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)$ Az 1-ből induljunk pozitív irányba az egységgörön, egészen az előbbi metszetig! Az így kapott körív hossza lesz $\arg z$ értéke **radiánban**. $(\pi/3)$ Mostantól a szögeket radiánban mérjük. Az átváltás egyszerű, hiszen 360° egy teljes kör radiánban 2π , és ennek megfelelően például 90° radiánban $\pi/2$.

Radián

Egy z komplex szám argumentumát mérjük a következőképpen! (Az ábrán $z = 1 + \sqrt{3}i$.)



Jelölje π az egységsugarú félkörív hosszát. Rajzoljunk egy 0-ból induló félegyenest z -n át! Ennek a sugárnak vegyük a metszetét az egységgörrel! $(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)$ Az 1-ből induljunk pozitív irányba az egységgörön, egészen az előbbi metszetig! Az így kapott körív hossza lesz $\arg z$ értéke **radiánban**. $(\pi/3)$ Mostantól a szögeket radiánban mérjük. Az átváltás egyszerű, hiszen 360° egy teljes kör radiánban 2π , és ennek megfelelően például 90° radiánban $\pi/2$.

Megjegyzés

Az egységgör köré írt szabályos n -szög kerülete $n \cdot a_n$, míg területe $n \frac{1 \cdot a_n}{2}$, ahol a_n az oldal hossza. Határátmenettel kapjuk, hogy az egységgör területe a kerületének a fele.

Tétel

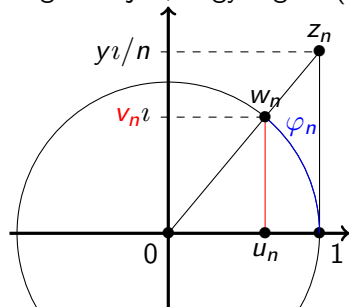
Ha $y \in \mathbb{R}$, akkor $\left| \lim \left(1 + \frac{y\imath}{n} \right)^n \right| = 1$ és $\arg \lim \left(1 + \frac{y\imath}{n} \right)^n = y$.

Útmutatás.

Legyen $z_n = 1 + y\imath/n$, $\varphi_n = \arg(z_n)$, és $w_n = z_n/|z_n| = u_n + v_n\imath$!

Ekkor $|z_n^n| = |z_n|^n = \left(\sqrt{1 + y^2/n^2} \right)^n = \sqrt{(1 + y^2/n^2)^n} \rightarrow 1$

Megmutatjuk, hogy $\arg \lim (z_n^n) = \lim \arg (z_n^n) = \lim n\varphi_n = y$. Tegyük fel, hogy $y \geq 0$!



A 0 , 1 és z_n csúcsú háromszög területe $\frac{y}{2n}$, a φ_n ívhez tartozó körcikk területe pedig $\frac{\varphi_n}{2}$. Kaptuk, hogy

$$\frac{\varphi_n}{2} \leq \frac{y}{2n}, \text{ azaz } n\varphi_n \leq y.$$

Másrészt $0 \leq 1 - u_n \leq \varphi_n \leq y/n \rightarrow 0$, így a rendőrelv miatt $1 - u_n \rightarrow 0$, azaz $u_n \rightarrow 1$.

Ugyanakkor a 0 , u_n és w_n csúcsú és a 0 , 1 és z_n csúcsú háromszögek hasonlóak, így

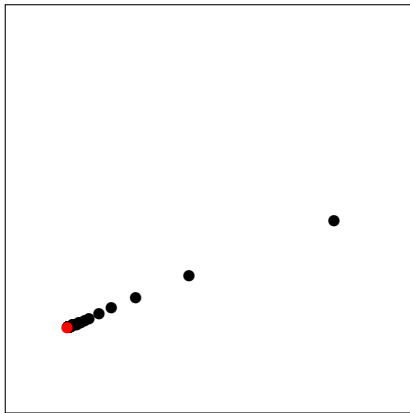
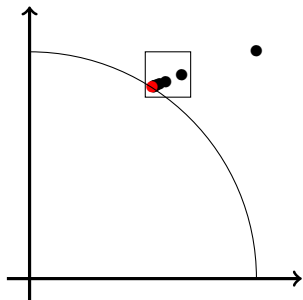
$$\frac{v_n}{u_n} = \frac{y/n}{1} = \frac{y}{n}, \text{ azaz } nv_n = yu_n.$$

Összefoglalva $yu_n = nv_n \leq n\varphi_n \leq y$, így a rendőrelv miatt $n\varphi_n \rightarrow y$.



Tétel

Ha $y \in \mathbb{R}$, akkor $\left| \lim \left(1 + \frac{y^l}{n} \right)^n \right| = 1$ és $\arg \lim \left(1 + \frac{y^l}{n} \right)^n = y$.



A valós esethez hasonlóan, most is belátható, hogy ha $z, w \in \mathbb{C}$, és $\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ és $\left(1 + \frac{w}{n}\right)^n$ konvergens, akkor $\left(1 + \frac{z+w}{n}\right)^n$ is az, és

$$\lim \left(1 + \frac{z+w}{n}\right)^n = \lim \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \lim \left(1 + \frac{w}{n}\right)^n.$$

Tudjuk, hogy ha $z = x + y\iota$, akkor $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ és $\left(1 + \frac{y\iota}{n}\right)^n$ konvergens, így $\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ is az, és

$$\lim \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \lim \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \lim \left(1 + \frac{y\iota}{n}\right)^n.$$

Definíció

Legyen minden $z \in \mathbb{C}$ esetén

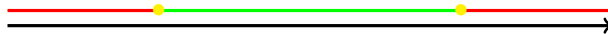
$$e^z = \lim \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n !$$

Tétel

Ha $x, y \in \mathbb{R}$ és $z = x + y\iota \in \mathbb{C}$, akkor $|e^z| = e^x$ és $\arg e^z = y$.

Definíció

- ▶ Azt mondjuk, hogy $a \in \mathbb{R}$ **belső pontja** az $A \subset \mathbb{R}$ halmaznak, ha létezik I gömbkörnyezete, melyre $I \subset A$.
- ▶ Azt mondjuk, hogy $a \in \mathbb{R}$ **külső pontja** az $A \subset \mathbb{R}$ halmaznak, ha létezik I gömbkörnyezete, melyre $I \cap A = \emptyset$.
- ▶ Azt mondjuk, hogy $a \in \mathbb{R}$ **határpontja** az $A \subset \mathbb{R}$ halmaznak, ha nem belső pontja, és nem is külső pontja.
- ▶ A **belsejének** nevezzük a belső pontjainak halmazát, és $\text{int } A$ -val jelöljük.
- ▶ A **lezártjának** nevezzük a belső és határpontjainak halmazát, és $\text{cl } A$ -val jelöljük.



A belseje, **A határa**, **A külsője**.

Definíció

Legyen $A \subset \mathbb{R}$! Azt mondjuk, hogy az x_n sorozat **lényegében A -beli**, ha $x_n \in A$ véges sok kivétellel minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén.

Tétel

Legyen $a \in \mathbb{R}$ és $A \subset \mathbb{R}$! Ekkor

- ▶ *a belső pontja A -nak pontosan akkor, ha minden a -hoz konvergáló sorozat lényegében A -beli.*
- ▶ *a külső pontja A -nak pontosan akkor, ha nem létezik a -hoz konvergáló sorozat, amely lényegében A -beli.*
- ▶ *a határpontja A -nak pontosan akkor, ha létezik, de nem minden a -hoz konvergáló sorozat lényegében A -beli.*

A definíciók alapján könnyen látható, hogy

$$\text{int } A \subset A \subset \text{cl } A.$$

Definíció

Azt mondjuk, hogy az $A \subset \mathbb{R}$ halmaz **zárt**, ha $A = \text{cl } A$.

Azt mondjuk, hogy az $A \subset \mathbb{R}$ halmaz **nyílt**, ha $A = \text{int } A$.

Megjegyzés

Egy $A \subset \mathbb{R}$ halmaz pontosan akkor nyílt, ha minden pontja belső pont, vagyis nem tartalmazza egyetlen határpontját sem.

Egy $A \subset \mathbb{R}$ halmaz pontosan akkor zárt, ha tartalmazza minden határpontját.

Tétel

$A \subset \mathbb{R}$ pontosan akkor zárt, ha komplementere nyílt.

Definíció

Azt mondjuk, hogy $a \in \overline{\mathbb{R}}$ **torlódási pontja** az $A \subset \mathbb{R}$ halmaznak, ha bármely I gömbkörnyezetére, $I \cap A$ halmaznak van a -tól különböző eleme.

Ha $a \in A$ nem torlódási pontja A -nak, akkor A **izolált pontjának** nevezzük.

Megjegyzés

Egy $a \in \overline{\mathbb{R}}$ pontosan akkor torlódási pontja egy $A \subset \mathbb{R}$ halmaznak, ha bármely I gömbkörnyezetére, $I \cap A$ halmaznak végtelen sok eleme van.

Egy $a \in \overline{\mathbb{R}}$ pontosan akkor torlódási pontja az x_n sorozatnak, ha torlódási pontja a sorozat értékkészletének, vagy $x_n = a$ végtelen sok $n \in \mathbb{N}^+$ esetén.

Következmény (Bolzano-Weierstrass-féle kiválasztási tétel (halmaz))

Minden korlátos végtelen halmaznak van torlódási pontja.

Tétel

Egy $A \subset \mathbb{R}$ halmaz pontosan akkor zárt, ha tartalmazza minden torlódási pontját.

A következő részben ha mást nem mondunk, akkor függvény alatt mindig olyan függvényt értünk melynek értelmezési tartománya, és értékkészlete is az $\mathbb{R}$ részhalmaza. Azt is mondhatnánk, hogy a függvény részhalmaza $\mathbb{R}^2$ -nek.

Egy függvény megadásakor meg kell adnunk az értelmezési tartományt, de mi ezt sokszor elhagyjuk, ha a függvényt egy képlettel értelmezzük. Ilyenkor értelmezési tartománynak tekintjük az $\mathbb{R}$ legbővebb olyan részhalmazát, melynek elemeire értelmes a képlet.

$f(x) = x^2$, esetén

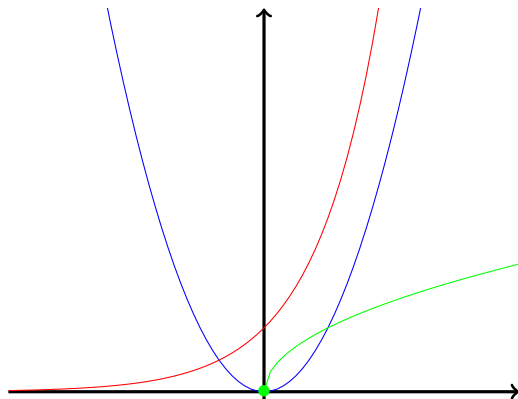
$\text{Dom}_f = \mathbb{R}$.

$f(x) = e^x$, esetén

$\text{Dom}_f = \mathbb{R}$.

$f(x) = \sqrt{x}$, esetén

$\text{Dom}_f = \mathbb{R}_0^+$.



Definíció (emlékeztető, (22))

Az f függvényt (alulról/felülről) korlátosnak nevezzük, ha értékkészlete (Ran_f) (alulról/felülről) korlátos. Továbbá, az értékkészlet infimumát, szuprémumát, ha létezik minimumát és maximumát, rendre az f infimumának, szuprémumának, minimumának és maximumának nevezzük.

$$\inf f = \inf \text{Ran}_f, \quad \sup f = \sup \text{Ran}_f, \quad \min f = \min \text{Ran}_f, \quad \max f = \max \text{Ran}_f.$$

Példa

Ha $f(x) = x^2$, vagy $f(x) = \sqrt{x}$ akkor

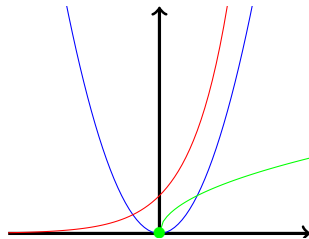
$$\min f = \inf f = 0, \quad \text{és} \quad \sup f = \infty.$$

Így f -nek nem létezik maximuma.

Ha $f(x) = e^x$, akkor

$$\inf f = 0, \quad \text{és} \quad \sup f = \infty.$$

Most f -nek nem létezik maximuma és minimuma sem.



Definíció (Emlékeztető (11))

Az f függvény $A \subset \mathbb{R}$ halmazra vonatkozó megszorítása alatt azt az $f|_A$ -val jelölt függvényt értjük, melynek értelmezési tartománya $\text{Dom}_{f|_A} = A \cap \text{Dom}_f$, és $x \in \text{Dom}_{f|_A}$ esetén $f|_A(x) = f(x)$.

Továbbá, az $A \subset \mathbb{R}$ halmaz f függvény szerinti képe

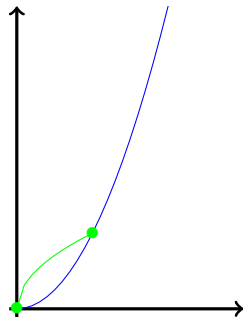
$$f[A] = \{f(x) : x \in \text{Dom}_f \cap A\}.$$

Megjegyzés

Nilván $f[A] = \text{Ran}_{f|_A}$.

Ha $f(x) = x^2$, akkor az ábrán látható $f|_{\mathbb{R}_0^+}$. Könnyen leolvasható, hogy $f[\mathbb{R}_0^+] = \mathbb{R}_0^+$, azaz $\text{Ran}_{f|_{\mathbb{R}_0^+}} = \text{Ran}_f = \mathbb{R}_0^+$.

Ha $f(x) = \sqrt{x}$, akkor az ábrán látható $f|_{[0,1]}$. Könnyen leolvasható, hogy $f[[0,1]] = [0,1]$, azaz $\text{Ran}_{f|_{[0,1]}} = [0,1]$.



Definíció

Legyen $A \subset \mathbb{R}$! Azt mondjuk, hogy f (alulról/felülről) korlátos A -n, ha $f|_A$ (alulról/felülről) korlátos. Ilyenkor

$$\inf_A f = \inf f|_A, \quad \text{és} \quad \sup_A f = \sup f|_A,$$

és ha létezik

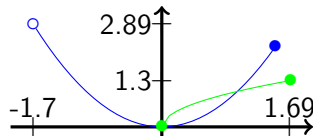
$$\min_A f = \min f|_A, \quad \text{és} \quad \max_A f = \max f|_A.$$

Példa

Az $f(x) = x^2$ esetén $f|_A$ pontosan akkor korlátos felülről, ha A korlátos. Ha $A \neq \emptyset$ korlátos, akkor $\sup_A f = (\max\{|\inf A|, |\sup A|\})^2$.

$$\sup_{]-1.7, 1.5]} f = 1.7^2 = 2.89$$

$$\sup_{[-1, 1.69]} f = \sqrt{1.69} = 1.3$$



Az $f(x) = \sqrt{x}$ esetén $f|_A$ pontosan akkor korlátos felülről, ha A felülről korlátos. Ha $A \cap [0, \infty[\neq \emptyset$ felülről korlátos, akkor $\sup_A f = \sqrt{\sup A}$.

Definíció

Az f maximumhelyének, illetve minimumhelyének nevezzük az $a \in \text{Dom}_f$ -et, ha

$$f(a) = \max f, \quad \text{illetve} \quad f(a) = \min f.$$

Az f szélsőértékének nevezzük $\max f$ -et és $\min f$ -et, illetve szélsőérték helyének nevezzük $a \in \text{Dom}_f$ -et, ha maximumhely, vagy minimumhely.

Az f lokális vagy helyi szélsőérték helyének nevezzük $a \in \text{Dom}_f$ -et, ha létezik olyan I gömbkörnyezete, hogy a szélsőérték helye $f|_I$ -nek. Ilyenkor $f(a)$ -t lokális szélsőértéknek nevezzük.

Hasonlóan értelmezhetjük a lokális minimumhely, lokális maximumhely, lokális minimum és lokális maximum fogalmakat.

Tétel

Ha a szélsőérték helye f -nek, akkor lokális szélsőérték helye is.

Definíció (emlékeztető, (23))

Azt mondjuk, hogy f

monoton növő, ha $f(x) \leq f(y)$;

szigorúan monoton növő, ha $f(x) < f(y)$;

monoton csökkenő, ha $f(x) \geq f(y)$;

szigorúan monoton csökkenő, ha $f(x) > f(y)$;

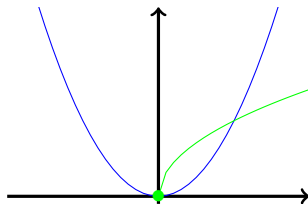
minden $x, y \in \text{Dom}_f$, $x < y$ esetén.

Tétel

f pontosan akkor (szigorúan) monoton növő, ha $-f$ (szigorúan) monoton csökkenő.

Az $f(x) = x^2$ nem monoton, mert például $-1 < 0 < 1$, és $(-1)^2 = 1 > 0^2 = 0 < 1^2 = 1$.

Korábbi tételek alapján tudjuk, hogy az $f(x) = \sqrt{x}$ szigorúan monoton növő.

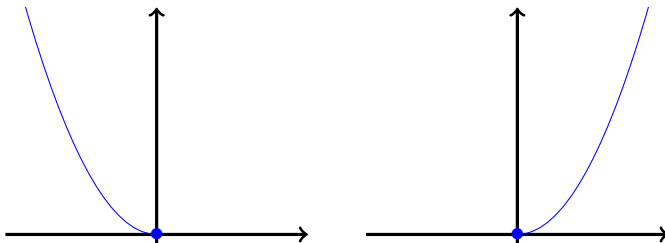


Definíció

Legyen $A \subset \mathbb{R}$! Azt mondjuk, hogy f (szigorúan) monoton növény/csökkenő A -n, ha $f|_A$ (szigorúan) monoton növény/csökkenő.

Az $f(x) = x^2$ szigorúan monoton csökkenő $\mathbb{R}_0^- =]-\infty, 0]$ -n.

Az $f(x) = x^2$ szigorúan monoton növény $\mathbb{R}_0^+ = [0, \infty[$ -n.



Tétel

f pontosan akkor (szigorúan) monoton növény A -n, ha $-f$ (szigorúan) monoton csökkenő.

Definíció (Pontbeli folytonosság)

Legyen $a \in \text{Dom}_f$! Azt mondjuk, hogy f **folytonos** a -ban, ha

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : x \in \text{Dom}_f, |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Megjegyzés

δ függhet ε -től. Ezt néha jelöljük is, ilyenkor a $\delta(\varepsilon)$ jelölést használjuk.

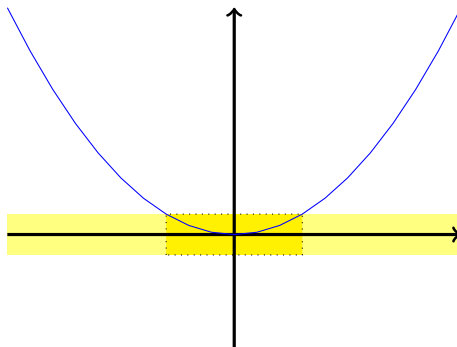
Példa

Az $f(x) = x^2$ függvény folytonos az $a = 0$ -ban. Egy $\varepsilon > 0$ esetén jó a $\delta(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}$, ugyanis ha

$$|x - a| = |x| < \delta = \sqrt{\varepsilon},$$

akkor

$$|x^2 - a^2| = |x^2| = |x|^2 < \delta^2 = \varepsilon.$$

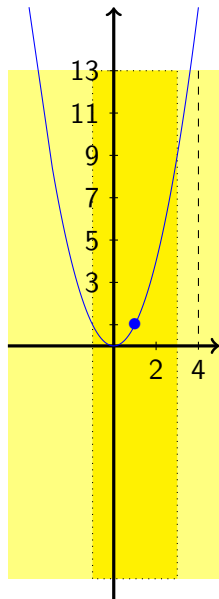


Feladat

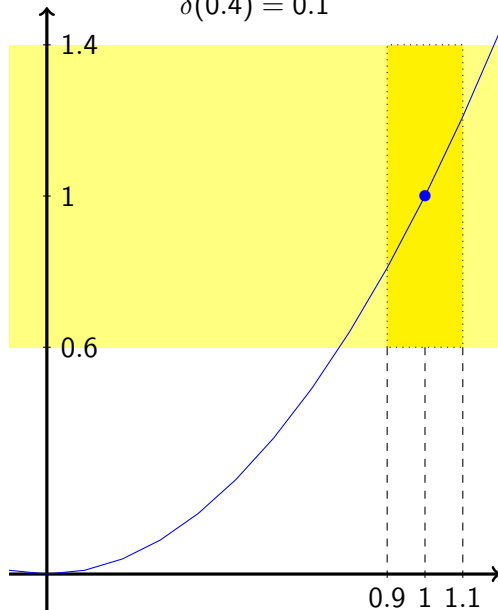
Mutassuk meg definíció szerint, hogy $f(x) = x^2$ folytonos $a = 1$ -ben!

$f(x) = x^2$ folytonos $a = 1$ -ben. $\delta(\varepsilon) = \min\{2, \varepsilon/4\}$.

$$\delta(12) = 2$$



$$\delta(0.4) = 0.1$$



Tétel (A pontbeli folytonosság lokális tulajdonság)

Ha az $a \in \text{Dom}_f \cap \text{Dom}_g$ pontnak van olyan I környezete, hogy $\text{Dom}_f \cap I = \text{Dom}_g \cap I$, és $f(x) = g(x)$ minden $x \in \text{Dom}_f \cap I$ esetén, akkor vagy f és g is folytonos a -ban, vagy egyik sem az.

Feladat

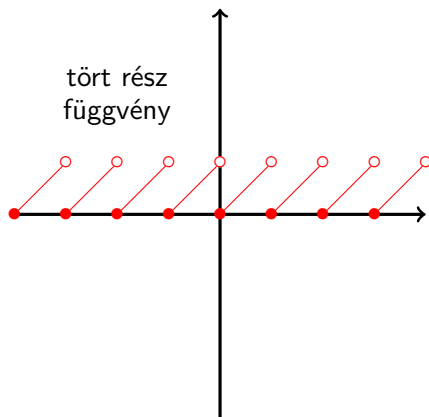
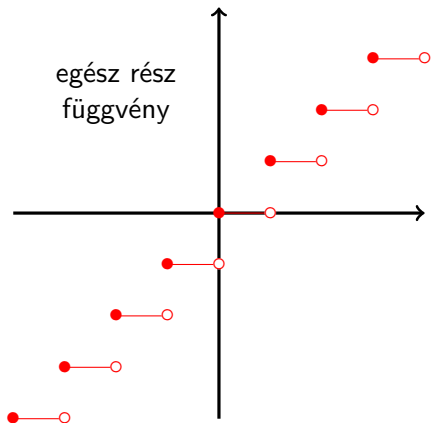
Mutassuk meg, hogy az $f(x) = c$ konstans függvény minden $a \in \text{Dom}_f$ pontban folytonos.

Definíció

Ha $x \in \mathbb{R}$, akkor x **egész részének**, illetve **tört részének** nevezzük az

$$\lfloor x \rfloor = \sup\{z \in \mathbb{Z} : z \leq x\}, \quad \text{illetve} \quad \{x\} = x - \lfloor x \rfloor$$

számokat.



Feladat

Mely $a \in \mathbb{R}$ pontokban folytonos az egész rész függvény?

Definíció (Féloldali folytonosság)

Legyen $a \in \text{Dom}_f$! Azt mondjuk, hogy f **balról folytonos** a -ban, ha

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : x \in \text{Dom}_f, -\delta < x - a < 0 \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Azt mondjuk, hogy f **jobbról folytonos** a -ban, ha

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : x \in \text{Dom}_f, 0 < x - a < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Tétel

Az f függvény pontosan akkor folytonos $a \in \text{Dom}_f$ -ben, ha balról és jobbról is folytonos a -ban.

Definíció

Azt mondjuk, hogy f **folytonos**, ha az értelmezési tartományának minden pontjában folytonos. Illetve, ha $A \subset \text{Dom}_f$ és $f|_A$ folytonos, akkor azt is mondjuk, hogy f **folytonos A -n**.

Megjegyzés

Ugyanezt értelmezhetjük féloldali folytonosságra.

Az egészrész függvény jobbról folytonos.

Illetve folytonos például a $[0, 1[$ -en.

Például egy f függvény pontosan akkor jobbról folytonos a -ban, ha $f|_{[a, \infty[}$ folytonos a -ban.

Ugyanakkor f folytonos A -n, nem azt jelenti, hogy f az A minden pontjában folytonos. Hiszen ha $f(x) = \lfloor x \rfloor$, akkor f folytonos a $[0, 1[$ -en, de nem folytonos a 0 -ban.

Feladat

Mutassuk meg definíció szerint, hogy az $f(x) = \sqrt{x}$ függvény folytonos!

Tétel (Átviteli elv)

Az f függvény pontosan akkor folytonos az $a \in \text{Dom}_f$ pontban, ha minden x_n Dom_f -beli, a -hoz konvergáló sorozatra $f(x_n) \rightarrow f(a)$.

Feladat

Hol folytonos a

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

úgynevezett Dirichlet-függvény?

Feladat

Hol folytonos az

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \in \mathbb{Q}, \\ -x, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

függvény?

Műveletek függvényekkel

Ha f és g függvények úgy, hogy értékkészleteik az $\mathbb{R}$ részhalmazai, és $c \in \mathbb{R}$, akkor értelmezzük a következő műveleteket.

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad (x \in \text{Dom}_f \cap \text{Dom}_g),$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) \quad (x \in \text{Dom}_f \cap \text{Dom}_g),$$

$$(cf)(x) = cf(x) \quad (x \in \text{Dom}_f),$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x) \quad (x \in \text{Dom}_f \cap \text{Dom}_g),$$

$$(f/g)(x) = f(x)/g(x) \quad (x \in \text{Dom}_f \cap \text{Dom}_g \text{ és } g(x) \neq 0).$$

Az átviteli-elv, és a sorozatok határértékére vonatkozó tételek alapján könnyen belátható a következő.

Tétel (Folytonosság és műveletek)

Ha f és g függvények folytonosak $a \in \text{Dom}_f \cap \text{Dom}_g$ -ben, akkor

$$f \pm g, fg, cf, \text{ és ha } g(a) \neq 0, \text{ akkor } f/g$$

is folytonos a -ban.

Tétel

Az

$$f(x) = x$$

identikus függvény folytonos.

Tétel

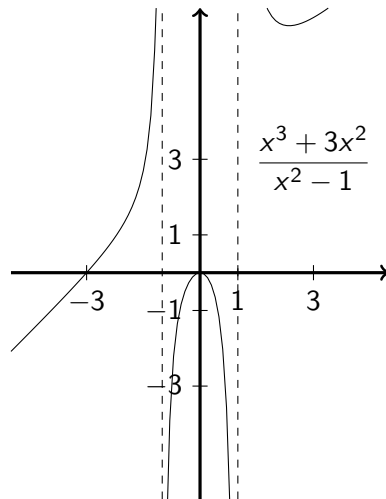
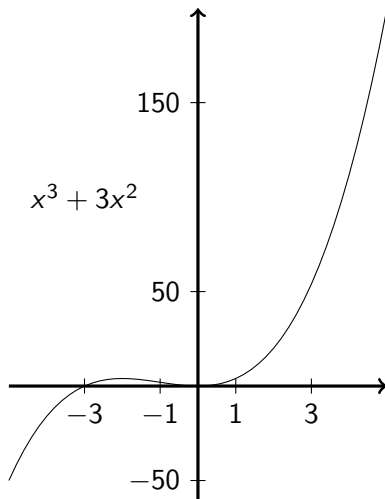
Ha $n \in \mathbb{Z}$, akkor az

$$f(x) = x^n$$

függvény folytonos.

Tétel

A polinomok és a racionális tört függvények folytonosak.



Definíció

f külső és g belső függvényből készített **összetett függvény**nek nevezzük az

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

függvényt, melynek értelmezési tartománya $\text{Dom}_{f \circ g} = \{x \in \text{Dom}_g \mid g(x) \in \text{Dom}_f\}$.

Feladat

Ha $f(x) = \sqrt{x} + 2$, $g(x) = (x - 2)^2$, és $h(x) = x^2 + 3x$, akkor

$$(f \circ g)(x) =$$

$$(h \circ f)(x) =$$

$$(g \circ f)(x) =$$

$$(h \circ h)(x) =$$

Tétel (Az összetett függvény folytonossága)

Ha g folytonos $a \in \text{Dom}_g$ -ben, és f folytonos $g(a) \in \text{Dom}_f$ -ben, akkor $f \circ g$ is folytonos a -ban.

Példa

Az $f(x) = \sqrt{x} + 2$ függvény folytonos, hiszen $\sqrt{x}$ a korábban látottak szerint folytonos, így $f(x)$ folytonos függvények összegeként szintén folytonos.

A $g(x) = (x - 2)^2$, és $h(x) = x^2 + 3x$ függvények polinomok, tehát folytonosak, így például az $f \circ g$, $h \circ f$, $g \circ f$ és $h \circ h$ függvények is folytonosak.

Tétel ((319))

Ha $n \in \mathbb{N}^+$, akkor $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[n]{x}$ függvény folytonos.

Ha $n \in \mathbb{N}^+$ páratlan, akkor $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[n]{x}$ függvény folytonos.

Ha $\alpha \in \mathbb{Q}$, akkor az $f :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^\alpha$ függvény folytonos.

Tétel (Rendőrelv (függvény folytonosság))

Ha $\delta > 0$ úgy, hogy $I =]a - \delta, a + \delta[\subset \text{Dom}_f \cap \text{Dom}_g \cap \text{Dom}_h$, és $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ minden $x \in I$ esetén, és $f(a) = h(a)$, akkor f és h a -beli folytonosságából következik g a -beli folytonossága.

Definíció

Legyen $a \in \mathbb{R}$ torlódási pontja Dom_f -nek, és $b \in \mathbb{R}$! Azt mondjuk, hogy f **határértéke a -ban b** , ha

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : 0 < |x - a| < \delta, x \in \text{Dom}_f \implies |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Ezt úgy is mondhatjuk, hogy $f(x)$ tart b -hez, ha x tart a -hoz, és így jelöljük

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b.$$

Tétel

Ha $a \in \text{Dom}_f$ torlódási pontja is Dom_f -nek, akkor f pontosan akkor folytonos a -ban, ha

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Példa

Ha $f(x) = x^2 - 3x + 1$, akkor mivel f folytonos, ezért

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 1,$$

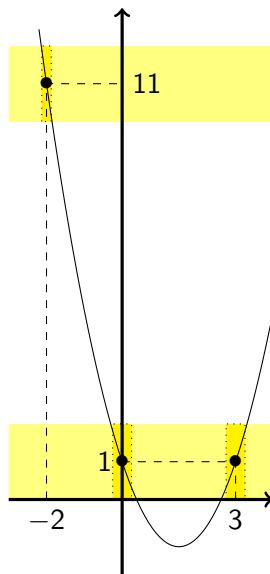
$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3) = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = f(-2) = 11,$$

illetve

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) = a^2 - 3a + 1.$$

Az ábrán az $\varepsilon = 1$ -hez tartozó δ látható.



Példa

Ha $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$, akkor mivel f folytonos, ezért

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3) = 4,$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = f(-2) = -1,$$

illetve ha $a \neq 1$, akkor

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Megmutatjuk, hogy

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2,$$

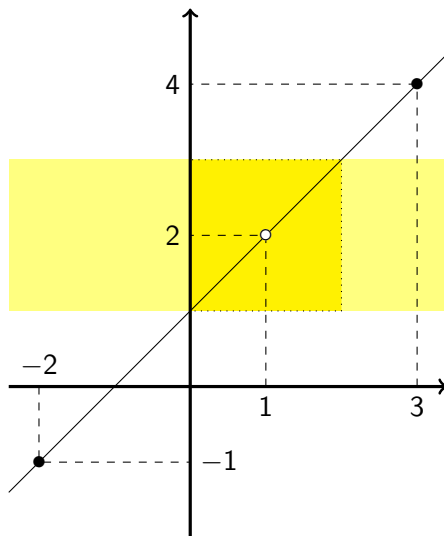
azaz minden $\varepsilon > 0$ -hoz létezik $\delta > 0$ úgy, hogy

$0 < |x - 1| < \delta$, esetén $|f(x) - 2| < \varepsilon$.

Ha $0 < |x - 1|$, akkor $x \neq 1$, ezért

$f(x) - 2 = x + 1 - 2 = x - 1$, így $\delta = \varepsilon$ jó választás.

Tehát ha $\varepsilon = 1$, akkor $\delta = 1$.



Definíció

Legyen $a, b \in \mathbb{R}$!

Azt mondjuk, hogy f **jobboldali határértéke a -ban b** , ha a torlódási pontja $\text{Dom}_f \cap [a, \infty[$ -nek, és

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : 0 < x - a < \delta, x \in \text{Dom}_f \implies |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Azt mondjuk, hogy f **baloldali határértéke a -ban b** , ha a torlódási pontja $\text{Dom}_f \cap]-\infty, a]$ -nak, és

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : -\delta < x - a < 0, x \in \text{Dom}_f \implies |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Ezeket így jelöljük $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = b$, illetve $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = b$.

Tétel

Ha $a \in \text{Dom}_f$ torlódási pontja $\text{Dom}_f \cap [a, \infty[$ -nek, illetve $\text{Dom}_f \cap]-\infty, a]$ -nak, akkor f pontosan akkor folytonos jobbról, illetve balról a -ban, ha

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = f(a), \quad \text{illetve} \quad \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = f(a).$$

Példa

Ha $f(x) = \lfloor x \rfloor$, és $a \notin \mathbb{Z}$, akkor f folytonos a -ban, így

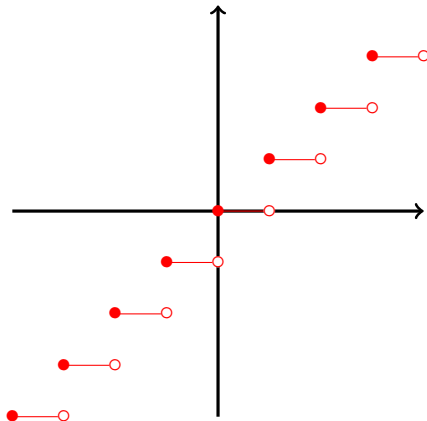
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = f(a).$$

Ha $a \in \mathbb{Z}$, akkor f jobbról folytonos a -ban, így

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = f(a) = a,$$

de balról nem folytonos, így

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = a - 1 \neq f(a).$$



Definíció

Legyen $a \in \mathbb{R}$ torlódási pontja Dom_f -nek!

Azt mondjuk, hogy f **határértéke a -ban ∞** , ha

$$\forall K \in \mathbb{R} : \exists \delta > 0 : 0 < |x - a| < \delta, x \in \text{Dom}_f \implies f(x) > K.$$

Ezt úgy is mondhatjuk, hogy $f(x)$ tart ∞ -hez, ha x tart a -hoz, és így jelöljük

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty.$$

Azt mondjuk, hogy f **határértéke a -ban $-\infty$** , ha

$$\forall K \in \mathbb{R} : \exists \delta > 0 : 0 < |x - a| < \delta, x \in \text{Dom}_f \implies f(x) < K.$$

Ezt úgy is mondhatjuk, hogy $f(x)$ tart $-\infty$ -hez, ha x tart a -hoz, és így jelöljük

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty.$$

Definíció

Legyen $a \in \mathbb{R}$ torlódási pontja $\text{Dom}_f \cap [a, \infty[-$ -nek!

Azt mondjuk, hogy f **jobboldali határértéke a -ban ∞ ($-\infty$)**, ha

$$\forall K \in \mathbb{R} : \exists \delta > 0 : 0 < x - a < \delta, x \in \text{Dom}_f \implies f(x) > K \text{ (} f(x) < K \text{)}.$$

Ezt így jelöljük

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \infty, \quad \text{illetve} \quad \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = -\infty.$$

Legyen $a \in \mathbb{R}$ torlódási pontja $\text{Dom}_f \cap]-\infty, a]$ -nak!

Azt mondjuk, hogy f **baloldali határértéke a -ban ∞ ($-\infty$)**, ha

$$\forall K \in \mathbb{R} : \exists \delta > 0 : -\delta < x - a < 0, x \in \text{Dom}_f \implies f(x) > K \text{ (} f(x) < K \text{)}.$$

Ezt így jelöljük

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \infty, \quad \text{illetve} \quad \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = -\infty.$$

Tétel

Legyen $a \in \mathbb{R}$ torlódási pontja $\text{Dom}_f \cap [a, \infty[$ -nek, és $\text{Dom}_f \cap]-\infty, a]$ -nak is, és legyen $b \in \overline{\mathbb{R}}$! Ekkor $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ pontosan akkor, ha $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = b$, és $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = b$.

Példa

Legyen $f(x) = \frac{1}{x^2}$! Ekkor $f(x)$ folytonos, így

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a), \text{ ha } a \neq 0.$$

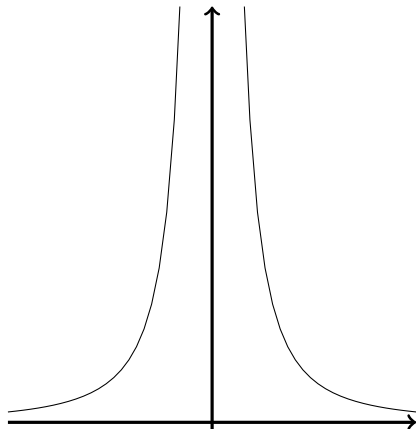
Megmutatjuk, hogy $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$, azaz minden

$K \in \mathbb{R}$ esetén létezik $\delta > 0$ úgy, hogy $0 < |x| < \delta$ esetén $f(x) > K$.

$K \leq 0$ esetén minden $\delta > 0$ jó választás, hiszen $f(x) > 0 \geq K$.

$K > 0$ esetén $f(x) > K$ pontosan akkor, ha

$$\frac{1}{K} > x^2, \text{ így } \delta = \sqrt{\frac{1}{K}} \text{ jó választás.}$$



Példa

Legyen $f(x) = \frac{1}{x}$! Ekkor $f(x)$ folytonos, így

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a), \text{ ha } a \neq 0.$$

Megmutatjuk, hogy $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \infty$, azaz minden

$K \in \mathbb{R}$ esetén létezik $\delta > 0$ úgy, hogy $0 < x < \delta$ esetén $f(x) > K$.

$K \leq 0$ esetén minden $\delta > 0$ jó választás, hiszen $0 < x$ esetén $f(x) > 0 \geq K$.

$K > 0$ esetén $f(x) > K$ pontosan akkor, ha $1/K > x$, így $\delta = 1/K$ jó választás.

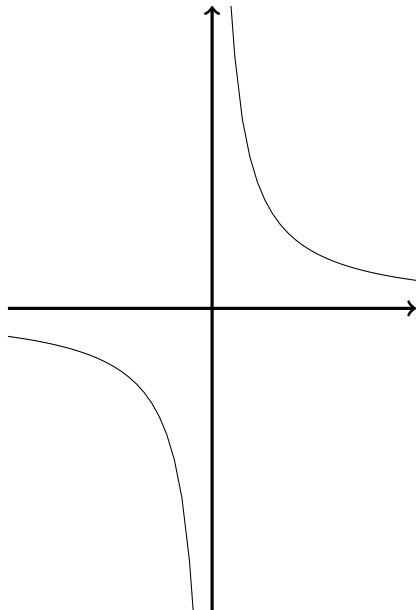
Megmutatjuk, hogy $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = -\infty$, azaz minden

$K \in \mathbb{R}$ esetén létezik $\delta > 0$ úgy, hogy $-\delta < x < 0$ esetén $f(x) < K$.

$K \geq 0$ esetén minden $\delta > 0$ jó választás, hiszen $x < 0$ esetén $f(x) < 0 \leq K$.

$K < 0$ esetén $f(x) < K$ pontosan akkor, ha $1/K < x$, így $\delta = -1/K$ jó választás.

Így a 0-ban nem létezik határérték.



Tétel

Ha valamely $\delta > 0$ és $A =]a - \delta, a + \delta[\setminus \{a\}$ esetén $f|_A = g|_A$, és $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b \in \overline{\mathbb{R}}$, akkor $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ is teljesül.

Példa

Ha $f(x) = \frac{x-1}{x^3 - x^2 + x - 1}$, akkor mivel f folytonos, ezért

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3) = 0.1,$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = f(-2) = 0.2,$$

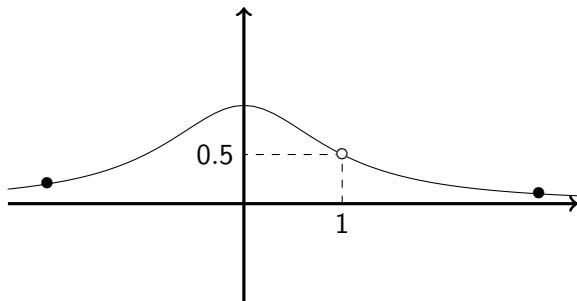
illetve ha $a \neq 1$, akkor

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

$x \neq 1$ esetén $f(x) = g(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$, ezért

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = g(1) = 0.5,$$

hiszen g folytonos az $a = 1$ -ben is, és alkalmazható a fenti tétel.



Feladat

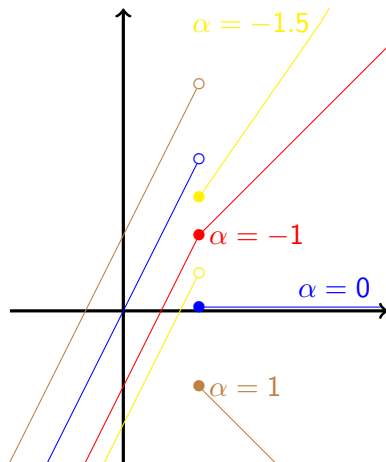
Határozzuk meg a

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x}$$

határértékeket!

Feladat

Milyen $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén lesz folytonos az $f(x) = \begin{cases} 2x + \alpha, & \text{ha } x < 1, \\ -\alpha x, & \text{ha } x \geq 1 \end{cases}$ függvény?



Definíció

Legyen $b \in \mathbb{R}$, és Dom_f felülről nem korlátos.

Azt mondjuk, hogy f **határértéke a ∞ -ben b** , ha

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists M \in \mathbb{R} : M < x, x \in \text{Dom}_f \implies |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Azt mondjuk, hogy f **határértéke a ∞ -ben ∞** , ha

$$\forall K \in \mathbb{R} : \exists M \in \mathbb{R} : M < x, x \in \text{Dom}_f \implies K < f(x).$$

Azt mondjuk, hogy f **határértéke a ∞ -ben $-\infty$** , ha

$$\forall K \in \mathbb{R} : \exists M \in \mathbb{R} : M < x, x \in \text{Dom}_f \implies f(x) < K.$$

Megjegyzés

Ha f egy sorozat, azaz $\text{Dom}_f = \mathbb{N}^+$, akkor a ∞ az egyetlen torlódási pontja, így csak itt vizsgálhatjuk a határértékét. Ez pontosan a sorozatok határértékét adja.

Definíció

Legyen $b \in \mathbb{R}$, és Dom_f alulról nem korlátos.

Azt mondjuk, hogy f **határértéke a $-\infty$ -ben b** , ha

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists M \in \mathbb{R} : x < M, x \in \text{Dom}_f \implies |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Azt mondjuk, hogy f **határértéke a $-\infty$ -ben ∞** , ha

$$\forall K \in \mathbb{R} : \exists M \in \mathbb{R} : x < M, x \in \text{Dom}_f \implies K < f(x).$$

Azt mondjuk, hogy f **határértéke a $-\infty$ -ben $-\infty$** , ha

$$\forall K \in \mathbb{R} : \exists M \in \mathbb{R} : x < M, x \in \text{Dom}_f \implies f(x) < K.$$

Tétel

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(-x)$$

Definíció (Emlékeztető (122))

Az $a \in \mathbb{R}$ **gömbkörnyezetének** hívjuk az alábbi intervallumot, ha $\varepsilon > 0$.

$$]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$$

∞ egy **gömbkörnyezetének** hívjuk az alábbi intervallumot, ha $K \in \mathbb{R}$.

$$]K, \infty[$$

$-\infty$ egy **gömbkörnyezetének** hívjuk az alábbi intervallumot, ha $K \in \mathbb{R}$.

$$]-\infty, K[$$

Tétel

Ha $a \in \overline{\mathbb{R}}$ torlódási pontja Dom_f -nek, és $b \in \overline{\mathbb{R}}$, akkor $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ pontosan akkor, ha b bármely J gömbkörnyezetéhez létezik a -nak I gömbkörnyezete, melyre

$$x \in I \cap \text{Dom}_f, x \neq a \quad \text{esetén} \quad f(x) \in J.$$

Tétel (Átviteli elv)

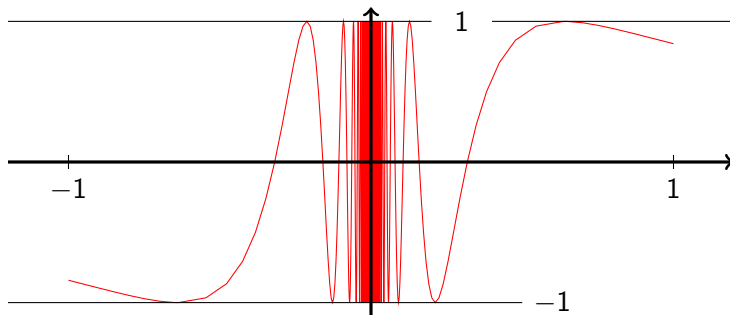
Legyen $a \in \overline{\mathbb{R}}$ torlódási pontja Dom_f -nek, és $b \in \overline{\mathbb{R}}$! $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ pontosan akkor, ha minden $x_n \in \text{Dom}_f \setminus \{a\}$ -beli, a -hoz tartó sorozatra $f(x_n) \rightarrow b$.

Példa

Megmutatjuk, hogy $\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ nem létezik, sőt még féloldali határérték sem. Legyen ugyanis $x_n = \frac{1}{n\pi} \rightarrow 0$, és $y_n = \frac{2}{(4n+1)\pi} \rightarrow 0$. Ha létezne legalább jobboldali határérték, akkor

$$\lim \sin n\pi = \lim \sin \frac{1}{x_n} = \lim_{x \rightarrow 0+} \sin x = \lim \sin \frac{1}{y_n} = \lim \sin \left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right),$$

vagyis $0 = 1$ lenne.



Az átviteli elv miatt a sorozatoknál látottakkal teljesen megegyezően, most is elvégezhetők a műveletek a határértékkel.

Tétel (Határérték és műveletek)

Legyen $a \in \overline{\mathbb{R}}$ torlódási pontja $\text{Dom}_f \cap \text{Dom}_g$ -nek, és $b_1, b_2, c \in \mathbb{R}$! Ha $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b_1$ és $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b_2$, akkor

$$\lim_{x \rightarrow a} (f \pm g)(x) = b_1 \pm b_2, \lim_{x \rightarrow a} (fg)(x) = b_1 b_2, \lim_{x \rightarrow a} (cf)(x) = cb_1.$$

Ha még $b_2 \neq 0$, akkor

$$\lim_{x \rightarrow a} (f/g)(x) = b_1/b_2.$$

Ha $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ és $g(x)$ korlátos a valamely környezetében, akkor

$$\lim_{x \rightarrow a} (fg)(x) = 0.$$

Tétel

A $p(x)$ polinom $-\infty$ -beli határértéke a főegyüttható előjelétől, és a fokszám paritásától függően ∞ vagy $-\infty$. Nevezetesen, ha a fokszám páros a határérték és a főegyüttható előjele megegyezik, ha a fokszám páratlan, akkor a két előjel különböző.

Feladat

Határozzuk meg az $f(x) = x^2 - x + 1$, a $g(x) = 2x^3 - x + 1$, az f/g , a g/f a $h(x) = -x^3 + x^2 + 1$ és a g/h függvények $-\infty$ -beli határértékét!

Tétel (A (függvény) határérték monoton)

Ha $a \in \overline{\mathbb{R}}$ torlódási pontja $\text{Dom}_f = \text{Dom}_g$ -nek, $f(x) \leq g(x)$ minden $x \in \text{Dom}_f$ esetén, és létezik $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b_1 \in \overline{\mathbb{R}}$, és $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b_2 \in \overline{\mathbb{R}}$, akkor $b_1 \leq b_2$.

Megjegyzés

A tétel kimondható egyoldali határértékre is.

Tétel (Rendőrelv (függvény határérték))

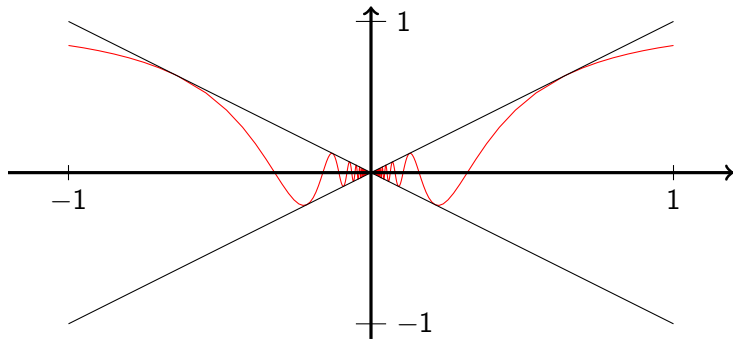
Ha $a \in \overline{\mathbb{R}}$ torlódási pontja $\text{Dom}_f = \text{Dom}_g = \text{Dom}_h$ -nak, $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ minden $x \in \text{Dom}_f$ esetén, és létezik $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = b \in \overline{\mathbb{R}}$, akkor létezik $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$.

Megjegyzés

A tétel kimondható egyoldali határértékre is, illetve $b = \pm\infty$ esetén elég az egyik becslés.

Példa

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0, \text{ hiszen } -|x| \leq x \sin \frac{1}{x} \leq |x|.$$



Megjegyzés

Úgy is láthatjuk, hogy $x \rightarrow 0$ és $\sin \frac{1}{x}$ korlátos, így a szorzat is 0-hoz tart.

Definíció

Azt mondjuk, hogy az f függvénynek **szakadása** van $a \in \mathbb{R}$ -ben, ha a torlódási pontja Dom_f -nek, és f nem folytonos a -ban. Ilyenkor a -t az f **szakadási helyének** nevezzük. A szakadási helyeket a következőképpen osztályozzuk.

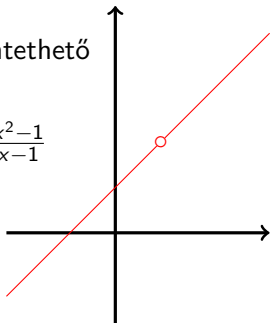
- ▶ **elsőfajú szakadás**

- ▶ **megszüntethető szakadás**, ha létezik $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \in \mathbb{R}$;
- ▶ **véges ugrás**, ha létezik $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) \in \mathbb{R}$ és $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) \in \mathbb{R}$, de nem egyenlőek;

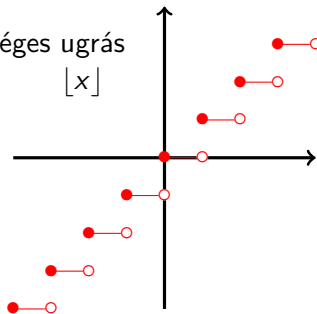
- ▶ **másodfajú szakadás** ha nem elsőfajú.

megszüntethető

$$\frac{x^2-1}{x-1}$$

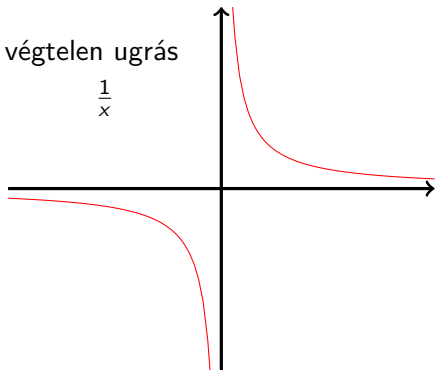


véges ugrás
 $[x]$

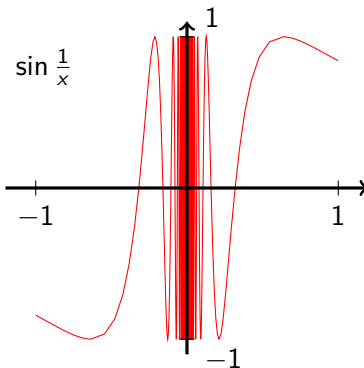


végtelen ugrás

$$\frac{1}{x}$$



$\sin \frac{1}{x}$



Tétel

Legyen $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $L = D \cap]-\infty, a[$ és $R = D \cap]a, \infty[$.

Legyen továbbá f monoton növekvő!

▶ Ha a torlódási pontja R -nek, akkor $\exists \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \inf_{x \in R} f(x)$.

▶ Ha a torlódási pontja L -nek, akkor $\exists \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \sup_{x \in L} f(x)$.

▶ Ha $a \in D$, akkor $\sup_{x \in L} f(x) \leq f(a) \leq \inf_{x \in R} f(x)$.

Legyen most f monoton csökkenő!

▶ Ha a torlódási pontja R -nek, akkor $\exists \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \sup_{x \in R} f(x)$.

▶ Ha a torlódási pontja L -nek, akkor $\exists \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \inf_{x \in L} f(x)$.

▶ Ha $a \in D$, akkor $\inf_{x \in L} f(x) \geq f(a) \geq \sup_{x \in R} f(x)$.

Tétel

$\mathbb{R}$ korábban definiált nyílt halmazainak bármely $\mathcal{A}$ rendszerére $\bigcup \mathcal{A}$ nyílt. Ha még $\mathcal{A}$ véges, akkor $\bigcap \mathcal{A}$ is nyílt.

$\mathbb{R}$ korábban definiált zárt halmazainak bármely $\mathcal{B}$ rendszerére $\bigcap \mathcal{B}$ zárt. Ha még $\mathcal{B}$ véges, akkor $\bigcup \mathcal{B}$ is zárt.

$\emptyset$ és az egész tér ($\mathbb{R}$) egyszerre nyílt és zárt.

Megjegyzés

Nyílt halmazok ilyen rendszerét **topológiának** nevezzük.

Összefüggő halmaz folytonos képe összefüggő.

Tétel (Bolzano-tétel)

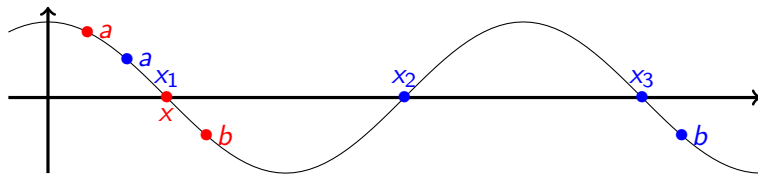
Legyen $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, és $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos. Ekkor $f[I]$ is intervallum.

Következmény

Legyen $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, és $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos. Ekkor

- ▶ ha $a, b \in I$, $a < b$ és $y \in]f(a), f(b)[$ vagy $y \in]f(b), f(a)[$, akkor $\exists x \in]a, b[: f(x) = y$.
- ▶ ha $a, b \in I$, $a < b$ és $f(a)f(b) < 0$, akkor $\exists x \in]a, b[: f(x) = 0$.

Példa



Feladat

Határozzuk meg 1 tizedesjegy pontossággal a $p(x) = x^5 - x^4 + 6x^3 + 4x^2 - 2x + 3$ polinom egyik gyökét.

Tétel (Intervallumon értelmezett folytonos és invertálható függvény inverze is folytonos.)

Legyen $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos, és $J = \text{Ran}_f$.

1. Ha f szigorúan monoton, akkor invertálható, és inverze is szigorúan monoton, még hozzá ugyanabban az értelemben.
2. f pontosan akkor invertálható ha szigorúan monoton.
3. Ha f invertálható, akkor $f^{-1} : J \rightarrow I$ folytonos.

Definíció

Az $A \subset \mathbb{R}$ halmazt **kompaktnak** nevezzük, ha korlátos és zárt.

Megjegyzés

Ha $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ kompakt, akkor létezik $\min A$ és $\max A$.

Kompakt halmaz folytonos képe kompakt.

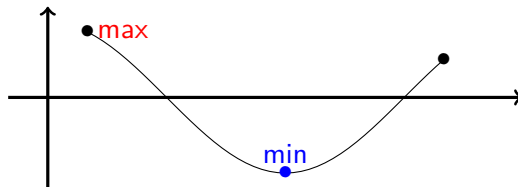
Tétel (Weierstrass-tétel)

Ha $A \subset \mathbb{R}$ kompakt, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos, akkor $f[A]$ is kompakt.

Következmény

Ha $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$ kompakt és $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos, akkor f -nek létezik maximuma, és minimuma, tehát felveszi a szélsőértékeit.

Példa



Tétel

Ha $A \subset \mathbb{R}$ kompakt, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos és invertálható, akkor inverze is folytonos.

Tétel (Emlékeztető)

Azt mondjuk, hogy f folytonos, ha

$$\forall \varepsilon > 0 : \forall a \in \text{Dom}_f : \exists \delta > 0 : x \in \text{Dom}_f \cap B_\delta(a) \implies f(x) \in B_\varepsilon(f(a)).$$

Definíció (Egyenletes folytonosság)

Azt mondjuk, hogy f **egyenletesen folytonos**, ha

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall a \in \text{Dom}_f : x \in \text{Dom}_f \cap B_\delta(a) \implies f(x) \in B_\varepsilon(f(a)).$$

Kompakt halmazon folytonos függvény egyenletesen folytonos.

Tétel (Heine-tétel)

Ha $D \subset \mathbb{R}$ kompakt és $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos, akkor egyenletesen folytonos.

Definíció (Pontbeli folytonosság)

Legyen $D \subset \mathbb{R}$ vagy $D \subset \mathbb{C}$ és $K = \mathbb{R}$ vagy $K = \mathbb{C}$, továbbá $a \in D$ és $f : D \rightarrow K$! Azt mondjuk, hogy f **folytonos a -ban**, ha

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : z \in D, |z - a| < \delta \implies |f(z) - f(a)| < \varepsilon.$$

Most is igaz az átviteli elv, ezért folytonos függvények összege, szorzata, különbsége, hányadosa is folytonos.

Továbbá, az összetett függvény folytonossága a valós esettel teljesen megegyezően bizonyítható.

Tétel (Az összetett függvény folytonossága)

Ha g folytonos $a \in \text{Dom}_g$ -ben, és f folytonos $g(a) \in \text{Dom}_f$ -ben, akkor $f \circ g$ is folytonos a -ban.

Definíció (emlékeztető, (205), (75))

Definiáljuk az $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt a következőképpen.

$$\exp(x) = \lim \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n$$

Megjegyzés

Más jelölések: $\exp_e(x) = e^x = \exp(x)$. Ezt a függvényt **természetes alapú, valós exponenciális** függvénynek, vagy röviden **exponenciális** függvénynek fogjuk nevezni.

Tétel (exp addíciós tétele, emlékeztető, (208))

A definícióban szereplő sorozat minden $x \in \mathbb{R}$ esetén konvergens, és

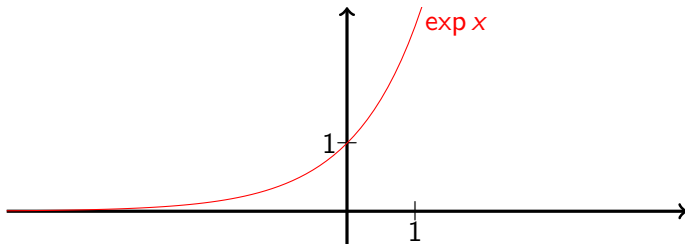
$$\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$$

Tétel

exp *folytonos*.

Tétel

Az exponenciális függvény szigorúan monoton növekvő, és értékkészlete $\text{Ran}(\exp) =]0, \infty[$.



Tétel

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Következmény

Ha $x \neq a$ esetén $f(x) \neq 0$, és $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, akkor $\lim_{x \rightarrow a} \frac{e^{f(x)} - 1}{f(x)} = 1$.

Komplex exponenciális függvény

Definíció

Definiáljuk az $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ függvényt a következőképpen.

$$\exp(z) = \lim \left(1 + \frac{z}{n} \right)^n$$

Hasonlóan látható, hogy minden $z \in \mathbb{C}$ esetén konvergens. Most is igaz az addíciós tétel, a komplex exponenciális függvény értékkészlete $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, hiszen $e^z = \frac{1}{e^{-z}} \neq 0$.

Monotonitásról nem beszélhetünk, sőt a komplex exponenciális függvény periodikus $2\pi i$ szerint.

Tétel

$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = w$ pontosan akkor, ha $\lim_{z \rightarrow a} \operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} w$ és $\lim_{z \rightarrow a} \operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Im} w$.

Továbbá, $w \neq 0$ esetén $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = w$ pontosan akkor, ha $\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = |w|$ és

$\lim_{z \rightarrow a} \arg(f(z)) = \arg(w)$.

Végül, $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = 0$ pontosan akkor, ha $\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = 0$.

A folytonossághoz csak a 0-beli folytonosságot kell újra bizonyítanunk.

Tétel

$$\lim_{z \rightarrow 0} e^z = 1$$

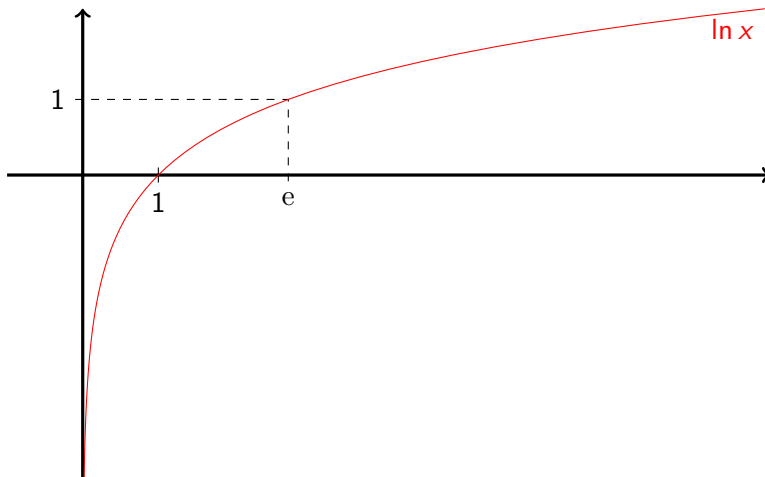
Szükségünk lesz még a (288) Tétel komplex változatára.

Tétel

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1$$

Definíció

A valós e^x függvény inverzét **természetes alapú** vagy **e alapú logaritmus függvénynek**, röviden **logaritmus függvénynek** nevezzük, és az $\ln x$, $\log x$ vagy $\log_e x$ jelöléseket használjuk.



Tétel

A $\ln x$ függvény szigorúan monoton növekvő, folytonos, értelmezési tartománya a $]0, \infty[$ intervallum, értékkészlete $\mathbb{R}$, és

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y.$$

Következmény

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty, \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$$

Tétel

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Következmény

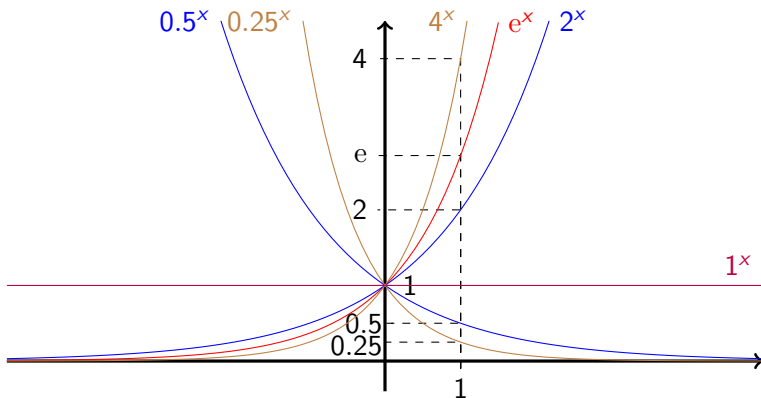
Ha $x \neq a$ esetén $f(x) \neq 0$, és $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, akkor $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln(1+f(x))}{f(x)} = 1$.

Definíció

Ha $a > 0$, akkor értelmezzük x kitevőjű hatványát úgy, hogy

$$a^x = e^{x \ln a}$$

ahol x tetszőleges. Az $x \mapsto a^x$ függvényt a alapú exponenciális függvénynek nevezzük, és az a^x vagy $\exp_a x$ jelöléseket használjuk.



Tétel

Az a^x függvény folytonos minden $a > 0$ esetén.

Ha $a = 1$, akkor $a^x = 1^x = 1$ konstans függvény. Ekkor $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 1$, és értékkészlete a $\{1\}$ halmaz.

Ha $a > 1$, akkor a^x szigorúan monoton növény. Ekkor $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty$ és $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$, így értékkészlete a $]0, \infty[$ intervallum.

Ha $0 < a < 1$, akkor a^x szigorúan monoton csökkenő. Ekkor $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = 0$ és $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \infty$, így értékkészlete a $]0, \infty[$ intervallum.

Tétel

Ha $a > 0$, és $x, y \in \mathbb{R}$ tetszőleges, akkor

$$a^{x+y} = a^x a^y, \quad \ln(a^x) = x \ln a, \quad \text{és} \quad (a^x)^y = a^{xy}.$$

Komplex kitevőkkel is igaz.

Következmény

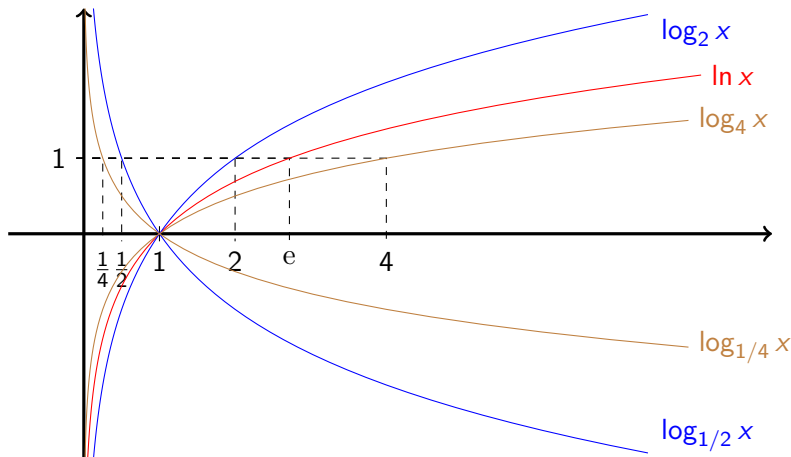
Ha $a > 0$ és $x \in \mathbb{Q}$, akkor a^x megegyezik a korábban definiálttal.

Definíció

Ha $a > 0$, és $a \neq 1$, akkor az a^x függvény inverzét a alapú logaritmus függvénynek nevezzük, és a

$$\log_a x$$

jelölést használjuk.



Tétel

A $\log_a x$ függvény folytonos minden $a > 0$, $a \neq 1$ esetén. Értelmezési tartománya a $]0, \infty[$ intervallum, értékkészlete $\mathbb{R}$.

Ha $a > 1$, akkor $\log_a x$ szigorúan monoton növekvő, ha $0 < a < 1$, akkor $\log_a x$ szigorúan monoton csökkenő.

Végül

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Következmény

Ha $a, b, x > 0$ és $a, b \neq 1$, akkor

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, \quad \text{és} \quad \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

Ha $a > 1$, akkor

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \log_a x = -\infty, \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = \infty,$$

ha $0 < a < 1$, akkor

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \log_a x = \infty, \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = -\infty.$$

Definíció

Definiáljuk az $\text{sh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és $\text{ch} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt a következőképpen.

$$\text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Megjegyzés

Más jelölések: $\sinh(x) = \text{sh}(x)$, $\cosh(x) = \text{ch}(x)$. Ezeket a függvényeket **szinusz hiperbolikus**, illetve **koszinusz hiperbolikus függvény**nek nevezzük.

Vegyük észre, hogy

$$e^x = \text{ch } x + \text{sh } x.$$

Tétel

sh páratlan

$$\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh}(x)$$

ch páros

$$\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch}(x)$$

Hiperbolikus Euler-formula

$$e^x = \operatorname{sh}(x) + \operatorname{ch}(x)$$

sh addíciós tétele

$$\operatorname{sh}(x + y) = \operatorname{sh}(x) \cdot \operatorname{ch}(y) + \operatorname{ch}(x) \cdot \operatorname{sh}(y)$$

ch addíciós tétele

$$\operatorname{ch}(x + y) = \operatorname{ch}(x) \cdot \operatorname{ch}(y) + \operatorname{sh}(x) \cdot \operatorname{sh}(y)$$

Hiperbolikus Pitagorasz-tétel

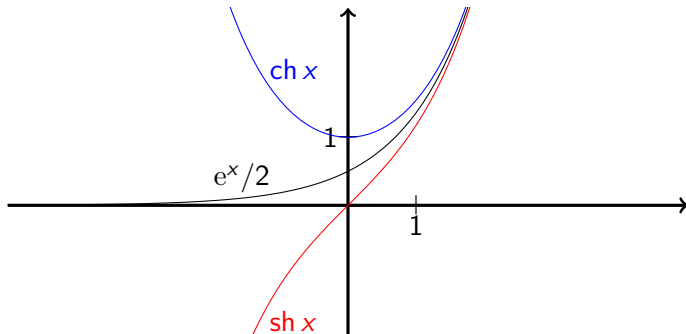
$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

Tétel

$\operatorname{sh}(x)$ és $\operatorname{ch}(x)$ folytonos.

Az $\operatorname{sh} x$ függvény szigorúan monoton növekvő, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \operatorname{sh}(x) = \pm\infty$, így értékkészlete $\operatorname{Ran}(\operatorname{sh}) = \mathbb{R}$.

A $\operatorname{ch} x$ szigorúan monoton csökkenő a $]-\infty, 0]$ és szigorúan monoton növekvő a $[0, \infty[$ intervallumon, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \operatorname{ch}(x) = \infty$, így értékkészlete $\operatorname{Ran}(\operatorname{ch}) = [1, \infty[$.



Tétel

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} x}{x} = 1, \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} x - 1}{x} = 0$$

Következmény

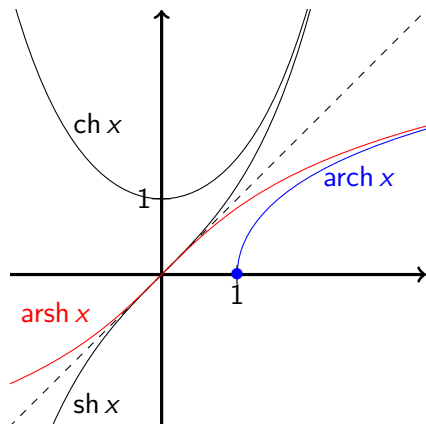
Ha $x \neq a$ esetén $f(x) \neq 0$, és $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, akkor $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{sh}(f(x))}{f(x)} = 1$, és

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{ch}(f(x)) - 1}{f(x)} = 0.$$

Definíció

Area szinusz hiperbolikus függvénynek nevezzük, és arsh -vel jelöljük a szinusz hiperbolikus függvény inverzét. Area koszinusz hiperbolikus függvénynek nevezzük, és arch -val jelöljük a koszinusz hiperbolikus függvény $[0, \infty[$ -re való megszorításának inverzét.

$$\operatorname{arsh} = \operatorname{sh}^{-1}, \quad \text{illetve} \quad \operatorname{arch} = \left(\operatorname{ch} |_{[0, \infty[} \right)^{-1}$$



Tétel

Az arsh függvény, folytonos, szigorúan monoton növekvő és páratlan.

$$\operatorname{Dom}_{\operatorname{arsh}} = \operatorname{Ran}_{\operatorname{arsh}} = \mathbb{R}, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \operatorname{sh} x = \pm\infty.$$

Az arch függvény, folytonos, szigorúan monoton növekvő.

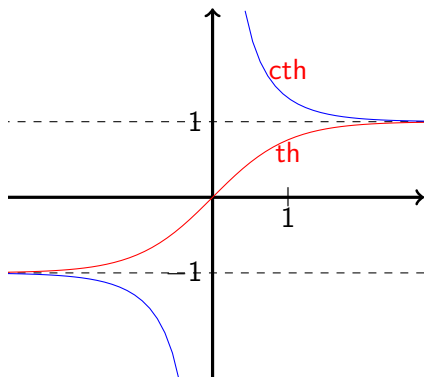
$$\operatorname{Dom}_{\operatorname{arch}} = [1, \infty[, \quad \operatorname{Ran}_{\operatorname{arch}} = [0, \infty[,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arch} x = \infty.$$

Definíció

Tangens hiperbolikus illetve kotangens hiperbolikus függvénynek nevezzük a szinusz hiperbolikus és a koszinusz hiperbolikus függvény hányadosát és th -val, illetve cth -val jelöljük.

$$th = \frac{sh}{ch}, \quad \text{illetve} \quad cth = \frac{ch}{sh}.$$



Tétel

th folytonos, páratlan és szigorúan monoton növekvő,

$$\text{Dom}_{th} = \mathbb{R}, \quad \text{Ran}_{th} =]-1, 1[, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} th\,x = \pm 1.$$

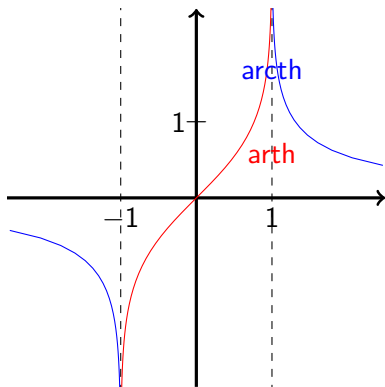
cth folytonos, páratlan és szigorúan monoton csökkenő a $] -\infty, 0[$ és a $]0, \infty[$ intervallumokon,

$$\text{Dom}_{cth} = \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad \text{Ran}_{cth} = \mathbb{R} \setminus [-1, 1],$$
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} cth\,x = \pm 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0\pm} cth\,x = \pm\infty.$$

Definíció

Area tangens hiperbolikus függvénynek nevezzük a tangens hiperbolikus függvény inverzét, illetve area kotangens hiperbolikus függvénynek a kotangens hiperbolikusét.

$$\operatorname{arth} = \operatorname{th}^{-1}, \quad \text{és} \quad \operatorname{arch} = \operatorname{cth}^{-1}$$



Tétel

arth folytonos, páratlan és szigorúan monoton növvő,

$$\operatorname{Dom}_{\operatorname{arth}} =]-1, 1[, \quad \operatorname{Ran}_{\operatorname{arth}} = \mathbb{R},$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm 1} \operatorname{arth} x = \pm \infty.$$

arch folytonos, páratlan és szigorúan monoton csökkenő a $] -\infty, -1[$ és az $]1, \infty[$ intervallumokon,

$$\operatorname{Dom}_{\operatorname{arch}} = \mathbb{R} \setminus [-1, 1], \quad \operatorname{Ran}_{\operatorname{arch}} = \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \operatorname{arch} x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \pm 1} \operatorname{arch} x = \pm \infty.$$

Definíció

Definiáljuk a $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt a következőképpen.

$$\sin(x) = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}, \quad \cos(x) = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}$$

Megjegyzés

Ezeket a függvényeket **szinusz**, illetve **koszinusz függvény**nek nevezzük.

Vegyük észre, hogy

$$e^{yi} = \cos y + i \sin y.$$

Tétel

sin páratlan

$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

cos páros

$$\cos(-x) = \cos(x)$$

(Trigonometrikus) Euler-formula

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$$

sin addíciós tétele

$$\sin(x + y) = \sin(x) \cdot \cos(y) + \cos(x) \cdot \sin(y)$$

cos addíciós tétele

$$\cos(x + y) = \cos(x) \cdot \cos(y) - \sin(x) \cdot \sin(y)$$

(Trigonometrikus) Pitagorasz-tétel

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

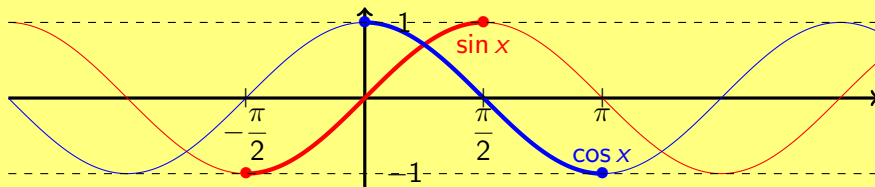
Tétel

$\sin(x)$ és $\cos(x)$ folytonos.

$\text{Ran}_{\sin} = \text{Ran}_{\cos} = [0, 1]$.

A **cos** függvény szigorúan monoton csökkenő a $[0, \pi]$ intervallumon, és szigorúan monoton növekvő a $[\pi, 2\pi]$ intervallumon.

A **sin** függvény szigorúan monoton növekvő a $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ intervallumon és szigorúan monoton csökkenő a $[\frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}]$ intervallumon.



Tétel

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

Következmény

Ha $x \neq a$ esetén $f(x) \neq 0$, és $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, akkor $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(f(x))}{f(x)} = 1$, és

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos(f(x)) - 1}{f(x)} = 0.$$

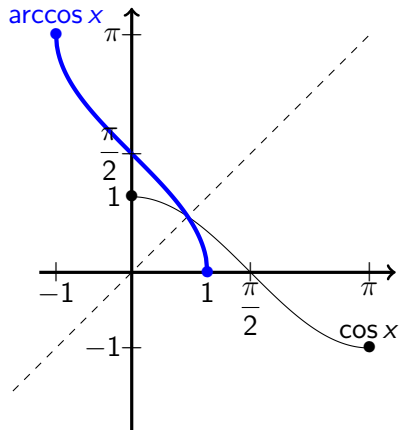
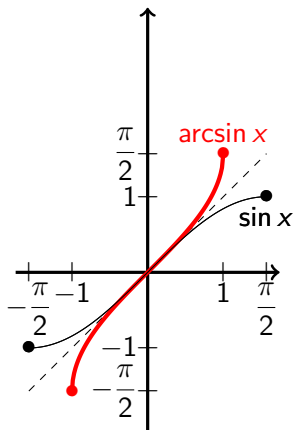
Definíció

Arkusz szinusz függvénynek nevezzük a szinusz függvény $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ intervallumra vett megszorításának inverzét, illetve arkusz koszinusz függvénynek a koszinusz $[0, \pi]$ intervallumra vett megszorításának inverzét.

$$\arcsin = \left(\sin |_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} \right)^{-1}, \quad \text{és} \quad \arccos = \left(\cos |_{[0, \pi]} \right)^{-1}$$

Feladat

Határozzuk meg az $\arcsin \frac{1}{2}$, $\arcsin(\sin \pi)$, $\arccos -\frac{1}{2}$, és $\arccos(\cos \pi)$ értékeket!



Tétel

$\arcsin$ és $\arccos$ is folytonos.

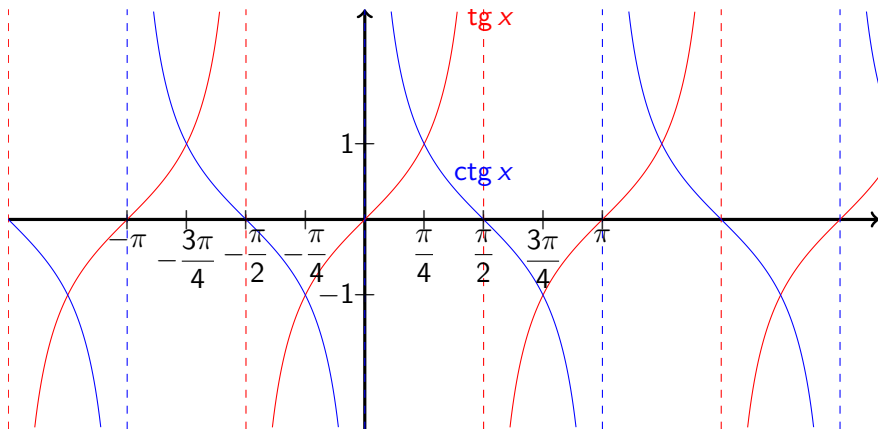
$\arcsin$ szigorúan monoton növekvő, $\text{Dom}_{\arcsin} = [-1, 1]$, és $\text{Ran}_{\arcsin} = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

$\arccos$ szigorúan monoton csökkenő, $\text{Dom}_{\arccos} = [-1, 1]$, és $\text{Ran}_{\arccos} = [0, \pi]$.

Definíció

A szinusz és a koszinusz függvény hányadosát **tangens** illetve **kotangens** függvénynek nevezzük, a **tg** illetve **ctg** jelöléseket használjuk.

$$\text{tg} = \frac{\sin}{\cos}, \quad \text{illetve} \quad \text{ctg} = \frac{\cos}{\sin}$$



Tétel

A tg és ctg függvények folytonosak, de a hányadosfüggvény definíciója miatt az értelmezési tartományban nem szerepelnek a nevező zérushelyei, azaz ha csak a valós függvényeket vizsgáljuk, akkor

$$\text{Dom}_{\text{tg}} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}, \quad \text{illetve} \quad \text{Dom}_{\text{ctg}} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy π szerint periodikusak, így nem invertálhatóak.

$$\text{Ran}_{\text{tg}} = \text{Ran}_{\text{ctg}} = \mathbb{R}.$$

A tangens függvény a $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ intervallumon szigorúan monoton növekvő, így

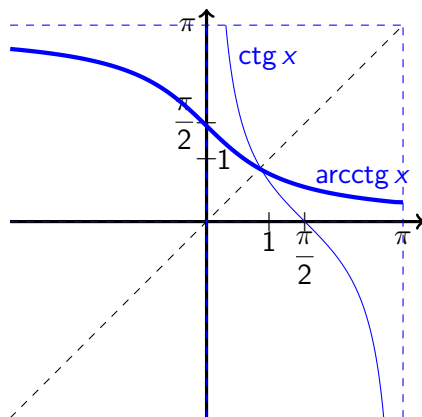
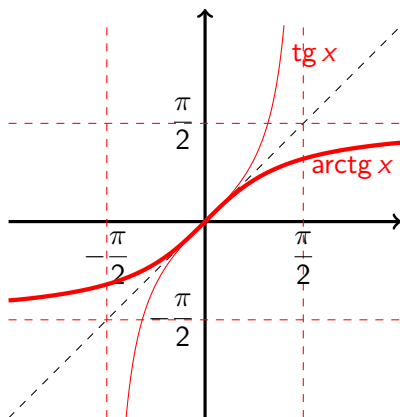
$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}+} \text{tg } x = -\infty$, és $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-} \text{tg } x = \infty$. Ahol nincs értelmezve ott másodfajú szakadása van (végtelen ugrás).

A kotangens függvény a $]0, \pi[$ intervallumon szigorúan monoton csökkenő, így $\lim_{x \rightarrow 0+} \text{ctg } x = \infty$, és $\lim_{x \rightarrow \pi-} \text{ctg } x = -\infty$. Ahol nincs értelmezve ott másodfajú szakadása van (végtelen ugrás).

Definíció

Arkusz tangens függvénynek nevezzük a tangens függvény $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ intervallumra vett megszorításának inverzét, illetve arkusz kotangens függvénynek a kotangens $]0, \pi[$ intervallumra vett megszorítását.

$$\operatorname{arctg} = \left(\operatorname{tg} \mid]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\right)^{-1}, \quad \text{és} \quad \operatorname{arcctg} = \left(\operatorname{ctg} \mid]0, \pi[\right)^{-1}$$



Tétel

Az $\arctg$ függvény szigorúan monoton növekvő, folytonos,

$$\text{Dom}_{\arctg} = \mathbb{R}, \quad \text{és} \quad \text{Ran}_{\arctg} = \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[.$$

Az arcctg függvény szigorúan monoton csökkenő, folytonos,

$$\text{Dom}_{\text{arcctg}} = \mathbb{R}, \quad \text{és} \quad \text{Ran}_{\text{arcctg}} =]0, \pi[.$$

Útmutatás.

Az inverzfüggvény definíció, és monotonitására illetve folytonosságára vonatkozó tételek miatt nyilvánvaló. □

Következmény

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \arctg x = \pm \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \text{arcctg} x = \pi, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \text{arcctg} x = 0.$$

Definíció

Elemi függvénynek nevezünk minden olyan függvényt, amely az itt felsoroltakból (exponenciális, trigonometrikus függvények) előállítható a függvényműveletek (ideértve összetett függvény, és inverzfüggvény képzés) véges sokszori alkalmazásával.

Tétel

Az elemi függvények folytonosak.

Definíció

Hatványfüggvénynek nevezzük az $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ függvényt, ahol $x > 0$ a változó, míg $\alpha \in \mathbb{R}$ rögzített.

Tétel

A hatványfüggvény folytonos, és $\alpha > 0$ esetén szigorúan monoton növvő, $\alpha < 0$ esetén szigorúan monoton csökkenő, míg $\alpha = 0$ esetén a konstans 1 függvény.

Tétel

Ha $q > 1$, és $\alpha \in \mathbb{R}$, akkor $\lim \frac{n^\alpha}{q^n} = 0$.

Tétel

Tetszőleges $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén $\lim \sqrt[n]{n^\alpha} = 1$.

Tétel

Ha $\lim x_n = a$, $\lim y_n = b \in \mathbb{R}$, és $a > 0$, akkor

$$\lim x_n^{y_n} = a^b.$$

$a \backslash b$	$-\infty$	$\mathbb{R}^-$	0	$\mathbb{R}^+$	∞
0	∞	∞	$?^+$	0	0
$]0, 1[$	∞	a^b	1	a^b	0
1	$?^+$	1	1	1	$?^+$
$]1, \infty[$	0	a^b	1	a^b	∞
∞	0	0	$?^+$	∞	∞

hatvány határértéke

A $?^+$ határozatlan értéket jelent, de nem lehet negatív, sem $-\infty$.

Egyszerűen adódik az $x^y = e^{y \ln x}$ összefüggésből, a szorzat határértékére látott tételekből.

Tétel

Ha $\lim x_n = a, \lim y_n = b \in \mathbb{R}$, és $a, b > 0, a \neq 1$, akkor

$$\lim \log_{x_n} y_n = \log_a b.$$

$\begin{array}{c} \backslash \\ a \end{array} \begin{array}{c} / \\ b \end{array}$	0	$]0, 1[$	1	$]1, \infty[$	∞
0	$?^+$	0	0	0	$?^-$
$]0, 1[$	∞	$\log_a b$	0	$\log_a b$	$-\infty$
1	$ \cdot = \infty$	$ \cdot = \infty$	?	$ \cdot = \infty$	$ \cdot = \infty$
$]1, \infty[$	$-\infty$	$\log_a b$	0	$\log_a b$	∞
∞	$?^-$	0	0	0	$?^+$

logarimus határértéke

A ? határozatlan értéket jelent, ahogy a $?^+$ és a $?^-$ is, de az utóbbiak értéke nem lehet negatív vagy $-\infty$, illetve pozitív vagy ∞ . $|\cdot| = \infty$ azt jelenti, hogy a sorozat abszolút értéke a ∞ -hez tart.

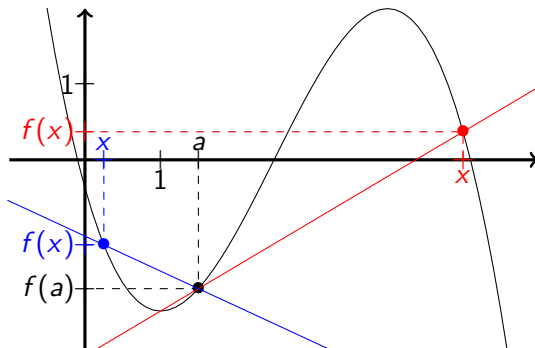
Egyszerűen adódik a $\log_x y = \frac{\ln y}{\ln x}$ összefüggésből, a hányados határértékére látott tételekből.

Definíció

Ha $a \neq x$ úgy, hogy $[a, x] \subset \text{Dom}_f$, vagy $[x, a] \subset \text{Dom}_f$, akkor az

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

értéket az a és x pontokhoz tartozó **differenciahányadosnak** nevezzük.



Ez az $(a, f(a))$ és $(x, f(x))$ pontokon átmenő szelő meredeksége, vagy az a és x időpontok közötti átlagos változási gyorsaság.

Definíció (Pontbeli derivált)

Ha a belső pontja Dom_f -nek, és létezik a

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

véges határérték, akkor azt mondjuk, hogy f differenciálható vagy deriválható a -ban. Ilyenkor a fenti véges határértéket az f függvény a -beli differenciáhányadosának vagy deriváltjának nevezzük, és használjuk az

$$f'(a)$$

jelölést.

Megjegyzés

Szokásos az

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

alak is.

Feladat

Határozzuk meg $f(x) = x + 1$ függvény $a = 2$ -beli deriváltját!

Feladat

Határozzuk meg $f(x) = x^2 + 1$ függvény $a = 2$ -beli deriváltját!

Feladat

Határozzuk meg $f(x) = \frac{1}{x^2}$ függvény $a = 1$ -beli deriváltját!

Feladat

Határozzuk meg $f(x) = 1/x$ függvény egy tetszőleges $a \in \mathbb{R}$ -beli deriváltját!

Definíció

Ha valamely $\delta > 0$ esetén $[a, a + \delta[\subset \text{Dom}_f$, illetve $]a - \delta, a] \subset \text{Dom}_f$ és létezik a

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \quad \text{illetve} \quad \lim_{x \rightarrow a-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

véges egyoldali határérték, akkor azt mondjuk, hogy f **jobbról**, illetve **balról** differenciálható vagy **deriválható** a -ban.

Ilyenkor a fenti véges egyoldali határértéket az f függvény a -beli **jobboldali**, illetve **baloldali differenciálhányados**ának vagy **deriváltjának** nevezzük, és használjuk az

$$f'_+(a), \quad \text{illetve} \quad f'_-(a)$$

jelölést.

Tétel

Legyen a belső pontja Dom_f -nek! f pontosan akkor deriválható a -ban, ha balról és jobbról is deriválható, és $f'_+(a) = f'_-(a)$. Ekkor $f'(a) = f'_+(a) = f'_-(a)$.

Feladat

Határozzuk meg az $f(x) = |x|$ függvény deriváltját, és féloldali deriváltjait, ha léteznek a 2, -1 és 0 pontokban!

Megjegyzés

Ha valamely $\delta > 0$ esetén $[a, a + \delta[\subset \text{Dom}_f$, és $]a - \delta, a[\cap \text{Dom}_f = \emptyset$, és f jobbról deriválható a -ban, akkor azt mondjuk, hogy f deriválható a -ban.

Hasonlóan, ha valamely $\delta > 0$ esetén $]a - \delta, a] \subset \text{Dom}_f$, és $]a, a + \delta[\cap \text{Dom}_f = \emptyset$, és f balról deriválható a -ban, akkor azt mondjuk, hogy f deriválható a -ban.

Definíció

Azt mondjuk, hogy f **deriválható**, ha deriválható az értelmezési tartomány minden pontjában.

Illetve azt mondjuk, hogy f **deriválható** az $A \subset \text{Dom}_f$ **halmazon**, ha $f|_A$ deriválható.

f' -vel jelöljük, és f **derivált függvényének** nevezzük azt a függvényt, melynek értelmezési tartománya

$$\text{Dom}_{f'} = \{x \in \text{Dom}_f \mid f \text{ deriválható } x\text{-ben}\}$$

és $x \in \text{Dom}_{f'}$ helyen felvett értéke az f x -beli deriváltja.

Feladat

Hol deriválható a $\sqrt{x}$ függvény? Adjuk meg a deriváltját is!

Példa

Ha $n \in \mathbb{N}^+$, akkor az x^n függvény deriválható, és deriváltja $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Ugyanis, ha $a \in \mathbb{R}$ tetszőleges, akkor

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \dots + xa^{n-2} + a^{n-1})}{x - a} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} (x^{n-1} + x^{n-2}a + \dots + xa^{n-2} + a^{n-1}) = \\ &= a^{n-1} + a^{n-1} + \dots + a^{n-1} + a^{n-1} = na^{n-1}.\end{aligned}$$

Az x^0 vagyis a konstans 1 függvény deriváltja a konstans 0 függvény.

Ugyanis, ha $a \in \mathbb{R}$ tetszőleges, akkor $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^0 - a^0}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} 0 = 0$.

Példa

Ha $n \in \mathbb{Z}$ és $n < 0$, akkor az x^n függvény deriválható, és deriváltja $(x^n)' = nx^{n-1}$. (A függvény értelmezési tartománya $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, így a derivált függvényé is ez.)

Ugyanis, ha $k = -n \in \mathbb{N}^+$, $a \in \mathbb{R}$ és $a \neq 0$, akkor

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{x^k} - \frac{1}{a^k}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^k - x^k}{x^k a^k (x - a)} = \\&= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(a - x)(a^{k-1} + a^{k-2}x + \dots + x^{k-1})}{x^k a^k (x - a)} = \\&= \lim_{x \rightarrow a} -\frac{a^{k-1} + a^{k-2}x + \dots + x^{k-1}}{x^k a^k} = -\frac{ka^{k-1}}{a^{2k}} = \\&= -\frac{k}{a^{k+1}} = -ka^{-k-1} = na^{n-1}.\end{aligned}$$

Tétel (Lineáris approximáció)

Az f függvény az a pontban pontosan akkor deriválható, ha itt *lineárisan approximálható*, azaz létezik $A \in \mathbb{R}$, és $\varepsilon : \text{Dom}_f \rightarrow \mathbb{R}$ úgy, hogy ε folytonos a -ban, $\varepsilon(a) = 0$, és

$$f(x) = f(a) + A(x - a) + \varepsilon(x)(x - a).$$

Ekkor $A = f'(a)$.

Útmutatás.

Egyszerű számolás.



Definíció

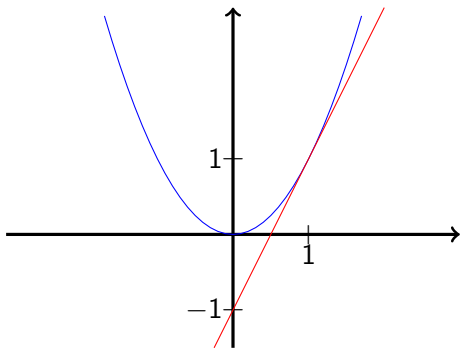
Ha f deriválható a -ban, akkor a fenti

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

egyenletű egyenest az f függvény a pontbeli *érintőegyenesének* nevezzük.

Feladat

Határozzuk meg az $f(x) = x^2$ függvény $a = 1$ -beli érintőegyenését.



Tétel (A deriválhatóság szükséges feltétele)

Ha f deriválható a -ban, akkor ott folytonos is.

Megjegyzés

Láttuk, hogy az $|x|$ függvény az $a = 0$ -ban nem deriválható, pedig folytonos, azaz a tétel fordítva nem igaz.

Tétel (Derivált és műveletek)

Legyen a torlódási pontja $\text{Dom}_f \cap \text{Dom}_g$ -nek. Ha f és g deriválható a -ban, és $c \in \mathbb{R}$, akkor $(f \pm g)$, (cf) és (fg) és ha még $g(a) \neq 0$, akkor (f/g) is deriválható itt. Továbbá, ekkor

1. $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$;
2. $(f - g)'(a) = f'(a) - g'(a)$;
3. $(cf)'(a) = cf'(a)$;
4. $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$;
5. ha $g(a) \neq 0$, akkor

$$5.1 \quad \left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \frac{-g'(a)}{g^2(a)};$$

$$5.2 \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

Feladat

Deriváljuk a következő függvényeket!

1. $(x^2 + 2x - 4)' =$

2. $(x^2\sqrt{x})' =$

3. $\left(\frac{x}{x^2 + 1}\right)' =$

Tétel (Összetett függvény deriválása)

Ha g deriválható a -ban, és f deriválható $g(a)$ -ban, akkor $f \circ g$ is deriválható a -ban. Továbbá ekkor

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) g'(a). \quad (\text{láncszabály})$$

Feladat

Deriváljuk a $\sqrt{x^2 + 1}$ függvényt!

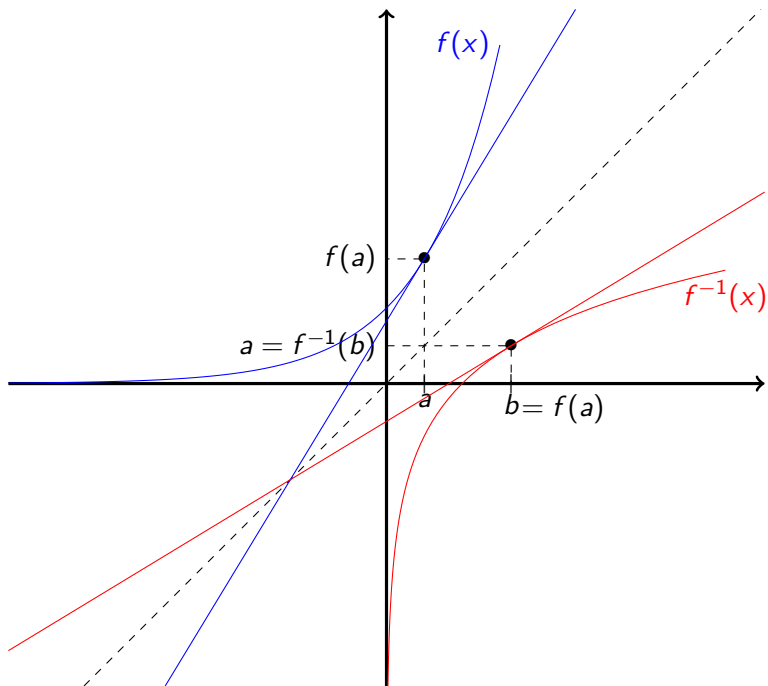
Feladat

Deriváljuk a $\sqrt[8]{x}$ függvényt!

Tétel (Inverz függvény deriválása)

Legyen I intervallum, a belső pontja I -nek, és $f : I \rightarrow \mathbb{R}$! Ha f folytonos és szigorúan monoton I -n, és deriválható a -ban úgy, hogy $f'(a) \neq 0$, akkor f inverze, azaz f^{-1} is deriválható $b = f(a)$ -ban, és

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$



Példa

Ha $n \in \mathbb{N}^+$ páros, akkor $f(x) = x^n$ esetén csak az $I =]0, \infty[$ intervallumon teljesülnek a tétel feltételei. Ennek a képe önmaga, így az inverz függvény, vagyis az $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$ deriváltját csak $x > 0$ esetén tudjuk ez alapján meghatározni. Nevezetesen

$$(\sqrt[n]{x})' = (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}}.$$

Az $\sqrt[n]{x}$ függvényt még a 0-ban is értelmeztük, itt csak jobboldali deriváltja lehetne, de

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{0}}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{(\sqrt[n]{x})^{n-1}} = \infty,$$

így itt jobbról nem deriválható.

Példa

Ha $n \in \mathbb{N}^+$ páratlan és $n \geq 3$, akkor $f(x) = x^n$ az egész számegyenesen deriválható és szigorúan monoton növekvő, de $f'(0) = 0$, így csak $x \neq 0$ esetén teljesülnek a tétel feltételei. Ennek a képe önmaga, így az inverz függvény, vagyis az $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$ deriváltját csak $x \neq 0$ esetén tudjuk ez alapján meghatározni. Nevezetesen

$$(\sqrt[n]{x})' = (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}}.$$

Az $\sqrt[n]{x}$ függvényt még a 0-ban is értelmeztük. Mivel

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{0}}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{1}{(\sqrt[n]{x})^{n-1}} = \infty,$$

így itt még egyoldali deriváltja sincs.

1. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \quad (x > 0, \alpha \in \mathbb{R});$
2. $(a^x)' = a^x \ln a \quad (x \in \mathbb{R}, a > 0);$
3. $\sin' x = \cos x \quad (x \in \mathbb{R});$
4. $\cos' x = -\sin x \quad (x \in \mathbb{R});$
5. $\operatorname{tg}' x = \frac{1}{\cos^2 x} \quad (\cos x \neq 0);$
6. $\operatorname{ctg}' x = -\frac{1}{\sin^2 x} \quad (\sin x \neq 0);$
7. $\operatorname{sh}' x = \operatorname{ch} x \quad (x \in \mathbb{R});$
8. $\operatorname{ch}' x = \operatorname{sh} x \quad (x \in \mathbb{R});$
9. $\operatorname{th}' x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} \quad (x \in \mathbb{R});$
10. $\operatorname{cth}' x = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} \quad (x \neq 0);$

$$\log'_a x = \frac{1}{x \ln a} \quad (x, a > 0, a \neq 1);$$

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1);$$

$$\arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1);$$

$$\operatorname{arctg}' x = \frac{1}{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R});$$

$$\operatorname{arcctg}' x = -\frac{1}{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R});$$

$$\operatorname{arsh}' x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad (x \in \mathbb{R});$$

$$\operatorname{arch}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad (x > 1);$$

$$\operatorname{arth}' x = \frac{1}{1-x^2} \quad (|x| < 1);$$

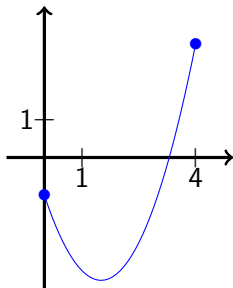
$$\operatorname{arch}' x = \frac{1}{1-x^2} \quad (|x| > 1);$$

Tétel (Lokális szélsőérték szükséges feltétele)

Ha a belső pontja Dom_f -nek, f deriválható a -ban, és itt lokális szélsőértéke van, akkor $f'(a) = 0$.

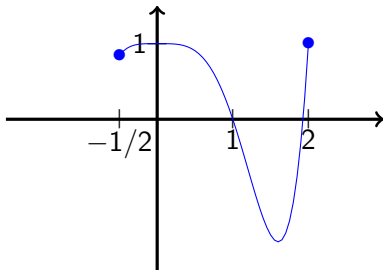
Feladat

Határozzuk meg az $f(x) = x^2 - 3x - 1$ függvény szélsőértékeit a $[0, 4]$ intervallumon!



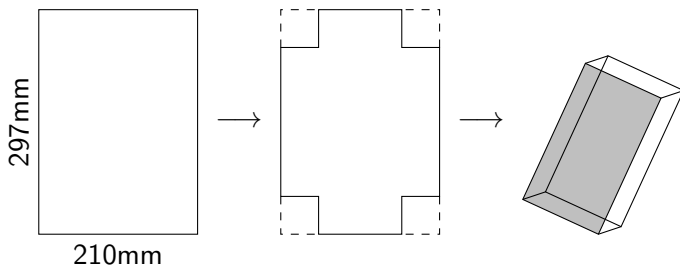
Feladat

Határozzuk meg az $f(x) = x^5 - 2x^4 + 1$ függvény szélsőértékeit a $[-1/2, 2]$ intervallumon!



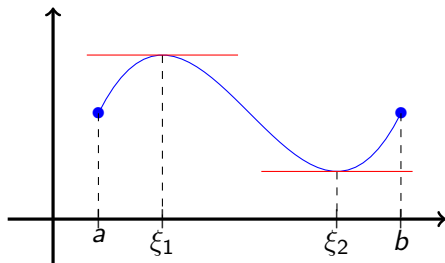
Feladat

Az alábbi ábrán látható módon egy A4-es papír mind a négy sarkából levágva egy-egy azonos négyzetet, majd a 4 oldalt felhajtva kapunk egy hamuzót. Mekkora négyzeteket vágjunk le, hogy a hamuzó térfogata maximális legyen.



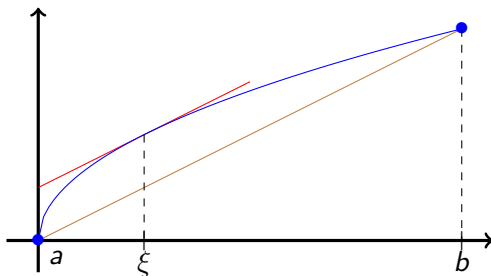
Tétel (Rolle-féle középértéktétel)

Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, f deriválható $]a, b[$ -n, és folytonos a -ban és b -ben! Ha $f(a) = f(b)$, akkor létezik $\xi \in]a, b[$, melyre $f'(\xi) = 0$.



Tétel (Lagrange-féle középértéktétel)

Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, f deriválható $]a, b[$ -n, és folytonos a -ban és b -ben! Ekkor létezik $\xi \in]a, b[$, melyre $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.



Feladat

Mutassuk meg, hogy $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén.

Tétel (Cauchy-féle középértéktétel)

Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, f és g deriválható $]a, b[$ -n, és folytonos a -ban és b -ben! Ekkor létezik $\xi \in]a, b[$, melyre $[g(b) - g(a)] f'(\xi) = [f(b) - f(a)] g'(\xi)$.

Tétel (Darboux-tétel)

Ha f deriválható $[a, b]$ -n, és m az $f'(a)$ és $f'(b)$ között van, akkor létezik $x \in]a, b[$, melyre $f'(x) = m$.

Definíció

Ha f' deriválható a -ban, akkor azt mondjuk, hogy f **kétszer deriválható** a -ban, és f' a -beli deriváltját az f **a -beli második derivált**jának nevezzük, és $f''(a)$ -val jelöljük.

$$f''(a) = (f'(x))' \Big|_{x=a}$$

Ha f' jobbról, illetve balról deriválható a -ban, akkor azt mondjuk, hogy f **jobbról**, illetve **balról kétszer deriválható** itt.

Hasonlóan, ha f és f' deriválható, akkor azt mondjuk, hogy f **kétszer deriválható**, illetve ha $f|_A$ kétszer deriválható, akkor azt mondjuk, hogy f **kétszer deriválható A -n**.

Definíció

Ha $f^{(n)}$ (az f n -edik deriváltja) deriválható a -ban, akkor azt mondjuk, hogy f $n + 1$ -szer deriválható a -ban, és $f^{(n)}$ a -beli deriváltját az f a -beli $n + 1$ -edik deriváltjának nevezzük, és $f^{(n+1)}(a)$ -val jelöljük.

$$f^{(n+1)}(a) = \left(f^{(n)}(x) \right)' \Big|_{x=a}$$

Ha $f^{(n)}$ jobbról, illetve balról deriválható a -ban, akkor azt mondjuk, hogy f jobbról, illetve balról $n + 1$ -szer deriválható itt.

Hasonlóan, ha f , f' , $\dots$, és $f^{(n)}$ deriválható, akkor azt mondjuk, hogy f $n + 1$ -szer deriválható, illetve ha $f|_A$ $n + 1$ -szer deriválható, akkor azt mondjuk, hogy f $n + 1$ -szer deriválható A -n. Végül legyen $f^{(0)}(x) = f(x)$.

Definíció

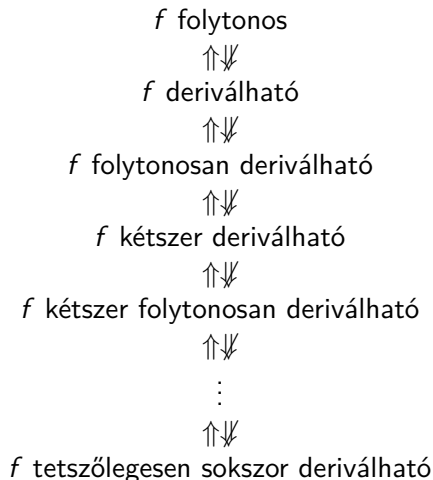
Ha $a \in \text{Dom}_f$ valamely I környezetére f deriválható $I \cap \text{Dom}_f$ -en, és f' folytonos a -ban, akkor azt mondjuk, hogy f **folytonosan deriválható a -ban**.

Azt mondjuk, hogy f **folytonosan deriválható**, ha az Dom_f minden pontjában.

Illetve ha $A \subset \text{Dom}_f$ és $f|_A$ folytonosan deriválható, akkor azt mondjuk, f **folytonosan deriválható A -n**.

Hasonlóan definiálhatjuk, hogy f kétszer folytonosan deriválható, háromszor folytonosan deriválható, $\dots$, n -szer folytonosan deriválható.

Ha minden $n \in \mathbb{N}^+$ -re n -szer deriválható, akkor azt mondjuk, hogy tetszőlegesen sokszor deriválható.



Tétel (L'Hospital szabály)

Legyen $a \in \overline{\mathbb{R}}$ úgy, hogy a valamely I gömbkörnyezetére $I \setminus \{a\}$ -n f és g deriválható, továbbá g' nem nulla.

$$\text{Ha } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0,$$

$$\text{és létezik } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b \in \overline{\mathbb{R}}, \text{ akkor}$$

$$\text{létezik } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = b.$$

Ugyanez jobboldali és baloldali határértékre is igaz.

Tétel (L'Hospital szabály)

Legyen $a \in \overline{\mathbb{R}}$ úgy, hogy a valamely I gömbkörnyezetére $I \setminus \{a\}$ -n f és g deriválható, továbbá g' nem nulla.

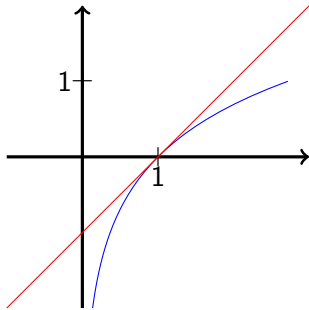
Ha $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, vagy $\lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = \infty$, és létezik $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b \in \overline{\mathbb{R}}$, akkor

létezik $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = b$.

Ugyanez jobboldali és baloldali határértékre is igaz.

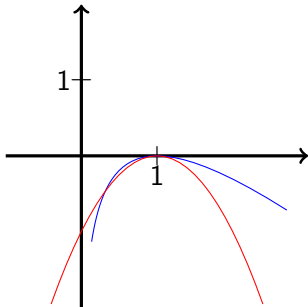
Feladat

Határozzuk meg $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1}$ határértéket!



Feladat

Határozzuk meg $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{-x^2 + 2x - 1}$ határértéket!



Feladat

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \operatorname{sh} x = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{\sin x} = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x} - 1} = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) = ?$$

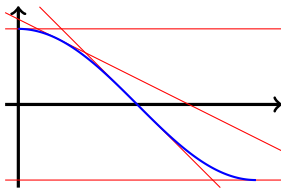
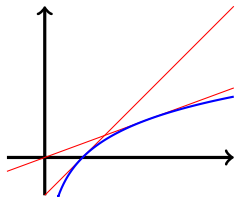
$$\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg} x \ln(\cos x) = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\operatorname{ctg} x} = ?$$

Tétel

Legyen f deriválható az I intervallumon!

- 1. $f'(x) \geq 0$ minden $x \in I$ esetén pontosan akkor, ha f monoton növekvő I -n;*
- 2. $f'(x) \leq 0$ minden $x \in I$ esetén pontosan akkor, ha f monoton csökkenő I -n.*



Az egyik irány szigorú esetben is igaz.

Tétel

Legyen f deriválható az I intervallumon!

Ha $f'(x) > 0$ minden $x \in I$ esetén, akkor f szigorúan monoton növekvő I -n.

Ha $f'(x) < 0$ minden $x \in I$ esetén, akkor f szigorúan monoton csökkenő I -n.

Viszont a tétel megfordítása most nem igaz.

Példa

Az $f(x) = x^3$ szigorúan monoton növekvő $\mathbb{R}$ -en, mégsem teljesül $f'(x) > 0$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, ugyanis $f'(x) = 3x^2$, így $f'(0) = 0$.

Összefoglalva, intervallumon:

$$f' \geq 0 \iff f \text{ monoton növekvő};$$

$$f' \leq 0 \iff f \text{ monoton csökkenő};$$

$$f' > 0 \implies f \text{ szigorúan monoton növekvő};$$

$$f' < 0 \implies f \text{ szigorúan monoton csökkenő};$$

Definíció

Ha $a \in \text{Dom}_f$ és létezik $\delta > 0$, amire minden $x, y \in \text{Dom}_f$, és

$$a - \delta < x < a < y < a + \delta$$

esetén,

- ▶ $f(x) \leq f(a) \leq f(y)$, akkor azt mondjuk, hogy f **lokálisan növény** a -ban.
- ▶ $f(x) \geq f(a) \geq f(y)$, akkor azt mondjuk, hogy f **lokálisan csökkenő** a -ban.
- ▶ $f(x) < f(a) < f(y)$, akkor azt mondjuk, hogy f **szigorúan lokálisan növény** a -ban.
- ▶ $f(x) > f(a) > f(y)$, akkor azt mondjuk, hogy f **szigorúan lokálisan csökkenő** a -ban.

Tétel

Legyen f deriválható a -ban!

Ha f lokálisan növekvő a -ban, akkor $f'(a) \geq 0$.

Ha f lokálisan csökkenő a -ban, akkor $f'(a) \leq 0$.

Ha $f'(a) > 0$, akkor f szigorúan lokálisan növekvő a -ban.

Ha $f'(a) < 0$, akkor f szigorúan lokálisan csökkenő a -ban.

Összefoglalva, pontban:

$$f'(a) \geq 0 \iff f \text{ lokálisan növekvő } a\text{-ban};$$

$$f'(a) \leq 0 \iff f \text{ lokálisan csökkenő } a\text{-ban};$$

$$f'(a) > 0 \implies f \text{ szigorúan lokálisan növekvő } a\text{-ban};$$

$$f'(a) < 0 \implies f \text{ szigorúan lokálisan csökkenő } a\text{-ban};$$

Tétel (Lokális szélsőérték (elsőrendű) elégséges feltétele)

Ha f deriválható a valamely környezetében, és f' előjelet vált a -ban, akkor f -nek lokális szélsőértéke van itt.

Nevezetesen, ha $f'(a) = 0$, és f' (szigorúan) lokálisan növő/csökkenő a -ban, akkor f -nek (szigorú) lokális minimuma/maximuma van a -ban.

Feladat

Határozzuk meg a legbővebb intervallumokat, melyeken a következő függvények monotonok!

▶ $f(x) = x^2 - 4x + 3;$

▶ $f(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 - 2x^2 + 20;$

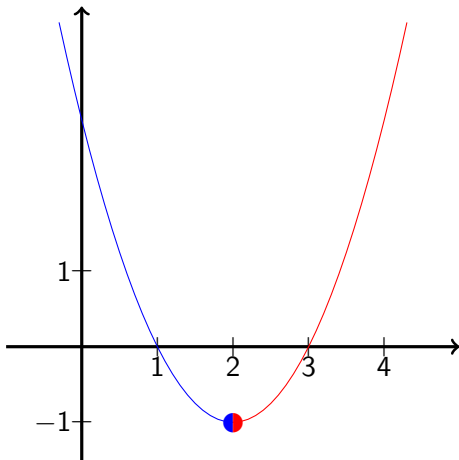
▶ $f(x) = \frac{1}{1 + x^2};$

▶ $f(x) = \frac{1}{1 + x};$

Feladat

Határozzuk meg a legbővebb intervallumokat, melyeken a következő függvények monotonok!

► $f(x) = x^2 - 4x + 3$;



Feladat

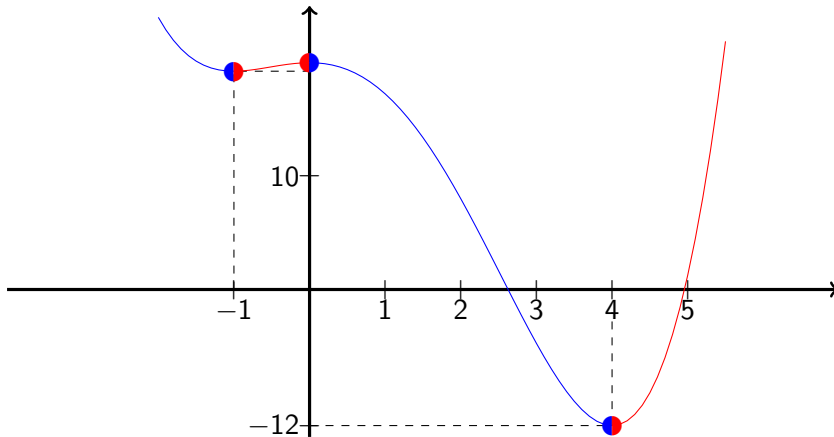
Határozzuk meg a legbővebb intervallumokat, melyeken a következő függvények monotonok!

► $f(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 - 2x^2 + 20;$

Feladat

Határozzuk meg a legbővebb intervallumokat, melyeken a következő függvények monotonok!

► $f(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 - 2x^2 + 20$;



Feladat

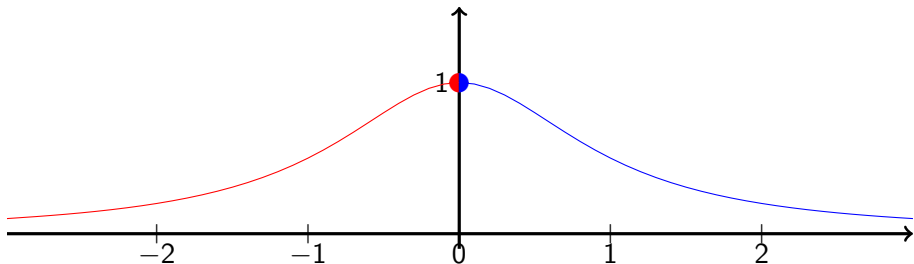
Határozzuk meg a legbővebb intervallumokat, melyeken a következő függvények monotonok!

► $f(x) = \frac{1}{1+x^2};$

Feladat

Határozzuk meg a legbővebb intervallumokat, melyeken a következő függvények monotonok!

► $f(x) = \frac{1}{1+x^2};$



Feladat

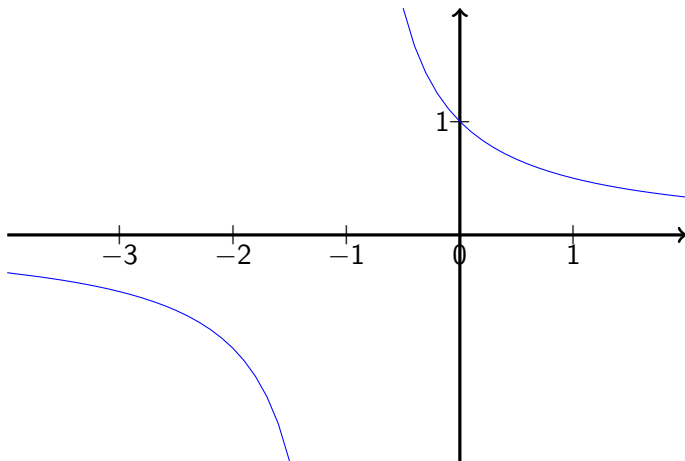
Határozzuk meg a legbővebb intervallumokat, melyeken a következő függvények monotonok!

► $f(x) = \frac{1}{1+x};$

Feladat

Határozzuk meg a legbővebb intervallumokat, melyeken a következő függvények monotonok!

► $f(x) = \frac{1}{1+x}$;



Feladat

Tudjuk, hogy az $y(x)$ kétszer deriválható függvény, eleget tesz az

$$y + x \ln y + 2x^2 - x + \ln(1 + x) = 1$$

egyenletnek, és $y(0) = 1$. Lokális szélsőérték-e ez?

Feladat

Tudjuk, hogy az $y(x)$ kétszer deriválható függvény, eleget tesz az

$$y + x \ln y + 2x^2 - x + \ln(1 + x) = 1$$

egyenletnek, és $y(0) = 1$. Lokális szélsőérték-e ez?

Tétel (Lokális szélsőérték (másodrendű) elégséges feltétele)

Ha f kétszer deriválható a -ban úgy, hogy $f'(a) = 0$, és $f''(a) \neq 0$, akkor a lokális szélsőérték hely.

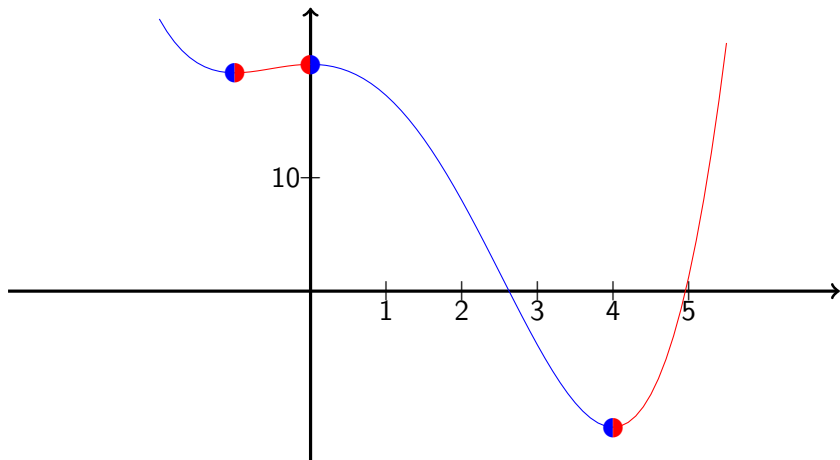
Nevezetesen, ha $f''(a) > 0$, akkor f -nek szigorú lokális minimuma van a -ban, míg ha $f''(a) < 0$, akkor f -nek szigorú lokális maximuma van a -ban

Tétel (lokális szélsőérték n -edrendű feltételei)

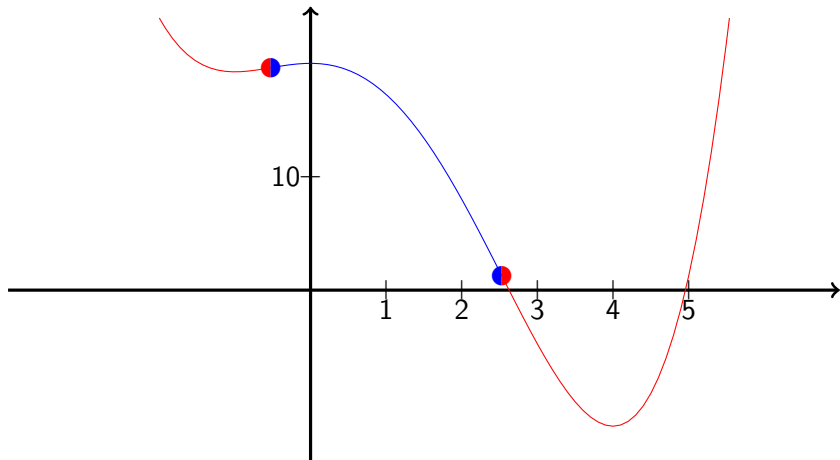
Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $D \subset \mathbb{R}$, $a \in \text{int } D$ és $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ n -szer deriválható a -ban úgy, hogy $f^{(n)}(a) \neq 0$ és $\forall k \in \widetilde{n-1} : f^{(k)}(a) = 0$.

- ▶ Ha n páratlan, akkor f -nek nincs lokális szélsőértéke a -ban.
- ▶ Ha n páros $f^{(n)}(a) > 0$, akkor f -nek lokális minimuma van a -ban.
- ▶ Ha n páros $f^{(n)}(a) < 0$, akkor f -nek lokális maximuma van a -ban.

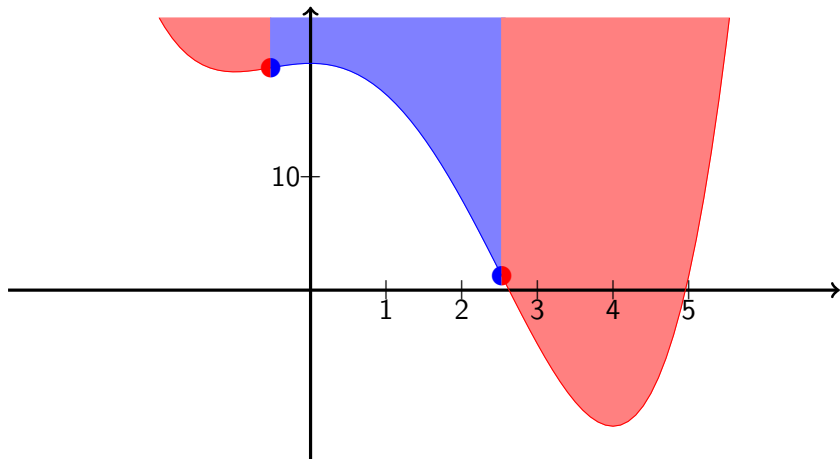
$$f(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 - 2x^2 + 20$$



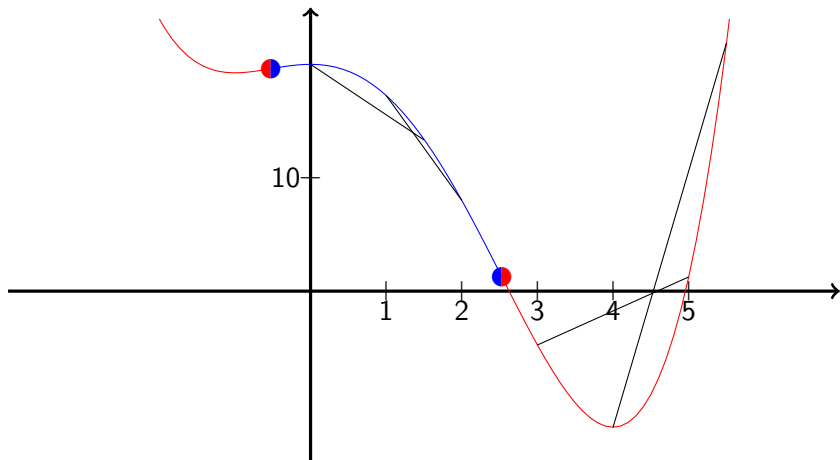
$$f(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 - 2x^2 + 20$$



$$f(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 - 2x^2 + 20$$



$$f(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 - 2x^2 + 20$$



Definíció

Azt mondjuk, hogy az $I \subset \text{Dom}_f$ intervallumon f

konvex, ha $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$;

szigorúan konvex, ha $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$;

konkáv, ha $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$;

szigorúan konkáv, ha $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) > \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$;

minden $(x, y) \in I^2 \setminus \Delta_I$, és $\lambda \in]0, 1[$ esetén.

Megjegyzés

A konvexitás azt jelenti, hogy a húrok a grafikon felett vannak.

Tétel

f pontosan akkor (szigorúan) konvex az I intervallumon, ha $-f$ (szigorúan) konkáv.

$$f(x) = x^2 - 4x + 5$$

$$\bullet \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

$$\bullet \lambda x + (1 - \lambda)y \quad \circ f(\lambda x + (1 - \lambda)y)$$

Tétel (Konvexitás szükséges és elégséges feltétele)

Ha f deriválható az I intervallumon, akkor a következő állítások ekvivalensek.

1. f (szigorúan) konvex I -n;
2. $f(x) \geq (\neq)f'(a)(x - a) + f(a)$, ha $x, a \in I$ és $x \neq a$;
3. f' (szigorúan) monoton növekvő I -n.

Bizonyítás.

► 1. $\implies$ 2.:

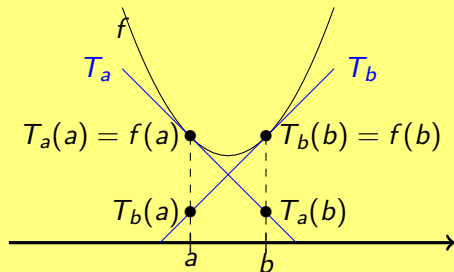
Tétel (Konvexitás szükséges és elégséges feltétele)

Ha f deriválható az I intervallumon, akkor a következő állítások ekvivalensek.

1. f (szigorúan) konvex I -n;
2. $f(x) \geq (\neq)f'(a)(x - a) + f(a)$, ha $x, a \in I$ és $x \neq a$;
3. f' (szigorúan) monoton növekvő I -n.

Bizonyítás.

► 2. $\implies$ 3.:



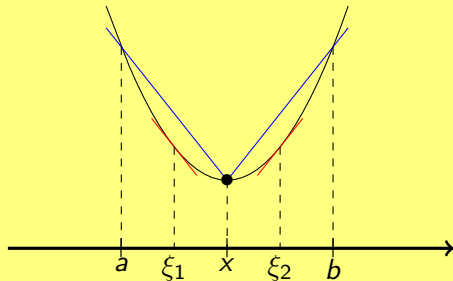
Tétel (Konvexitás szükséges és elégséges feltétele)

Ha f deriválható az I intervallumon, akkor a következő állítások ekvivalensek.

1. f (szigorúan) konvex I -n;
2. $f(x) \geq (\neq) f'(a)(x - a) + f(a)$, ha $x, a \in I$ és $x \neq a$;
3. f' (szigorúan) monoton növekvő I -n.

Bizonyítás.

► 3. $\implies$ 1.:



Következmény (Konvexitás szükséges és elégséges feltétele)

Legyen f kétszer deriválható az I intervallumon!

$f''(x) \geq 0$ minden $x \in I$ esetén pontosan akkor, ha f konvex I -n.

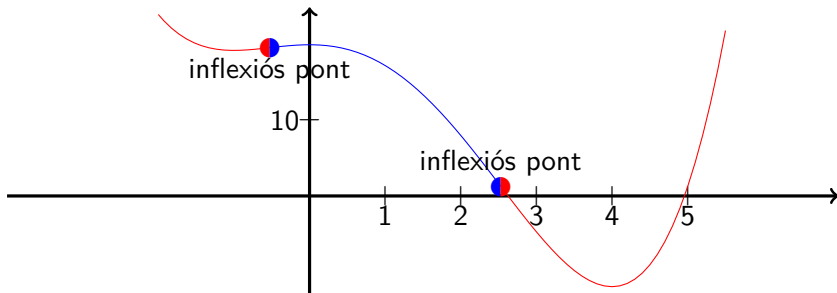
$f''(x) \leq 0$ minden $x \in I$ esetén pontosan akkor, ha f konkáv I -n.

Ha $f''(x) > 0$ minden $x \in I$ esetén, akkor f szigorúan konvex I -n.

Ha $f''(x) < 0$ minden $x \in I$ esetén, akkor f szigorúan konkáv I -n.

Definíció

Ha a belső pontja Dom_f -nek, és létezik $\delta > 0$ úgy, hogy f konvex illetve konkáv az $]a - \delta, a]$ intervallumon, és konkáv illetve konvex az $[a, a + \delta[$ -n (épp ellenkezőleg), akkor azt mondjuk, hogy a **inflexiós pontja** f -nek, vagy azt, hogy f -nek **inflexiója** van a -ban.



Tétel

Ha a belső pontja $\text{Dom}_{f'}$ -nek és inflexiós pontja f -nek, akkor lokális szélsőérték helye f' -nek.

Tétel (Inflexió szükséges feltétele)

Ha a belső pontja Dom_f -nek, f kétszer deriválható a -ban, és itt inflexió van, akkor $f''(a) = 0$.

Tétel (Inflexió (másodrendű) elégséges feltétele)

Ha f kétszer deriválható a valamely környezetében, és f'' előjelet vált a -ban, akkor f -nek inflexiója van itt.

Tétel (Inflexió (harmadrendű) elégséges feltétele)

Ha f háromszor deriválható a -ban úgy, hogy $f''(a) = 0$, és $f'''(a) \neq 0$, akkor a inflexiós pont.

Feladat

Határozzuk meg a legbővebb intervallumokat, melyeken a következő függvények konvexek illetve konkávok!

▶ $f(x) = x^2 - 4x + 3;$

▶ $f(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 - 2x^2 + 20;$

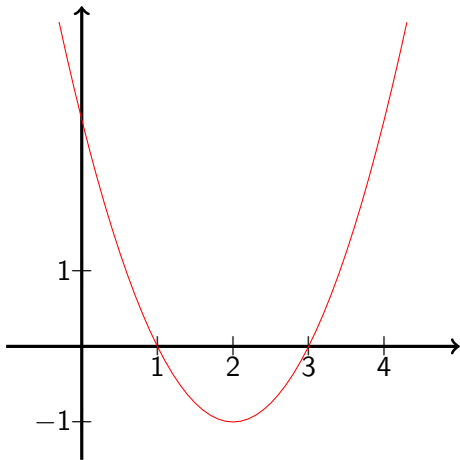
▶ $f(x) = \frac{1}{1+x^2};$

▶ $f(x) = \frac{1}{1+x};$

Feladat

Határozzuk meg a legbővebb intervallumokat, melyeken a következő függvények konvexek illetve konkávok!

► $f(x) = x^2 - 4x + 3$;



Feladat

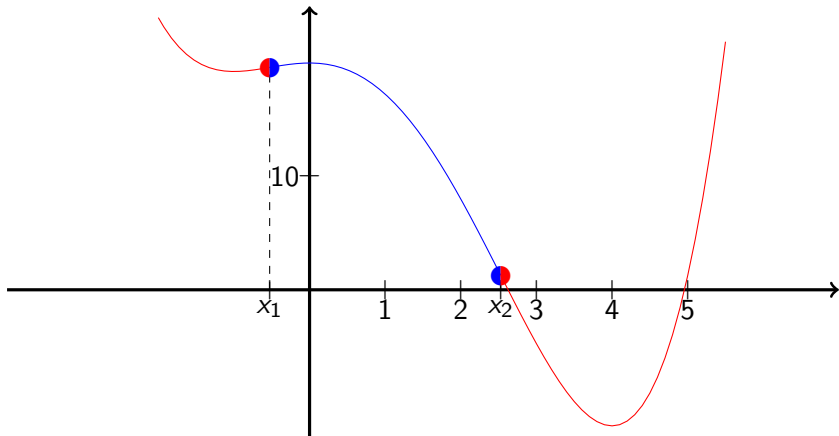
Határozzuk meg a legbővebb intervallumokat, melyeken a következő függvények konvexek illetve konkávok!

$$\blacktriangleright f(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 - 2x^2 + 20;$$

Feladat

Határozzuk meg a legbővebb intervallumokat, melyeken a következő függvények konvexek illetve konkávok!

► $f(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 - 2x^2 + 20$;



Feladat

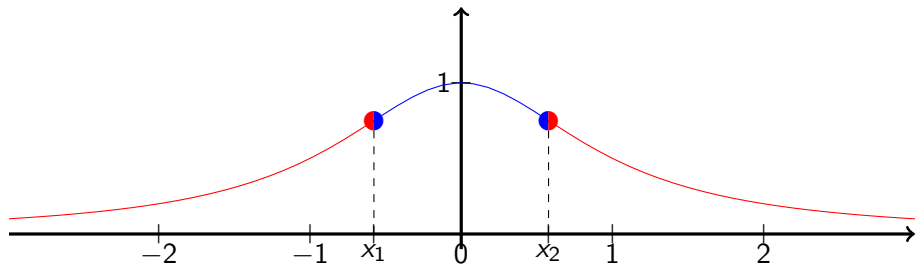
Határozzuk meg a legbővebb intervallumokat, melyeken a következő függvények konvexek illetve konkávok!

► $f(x) = \frac{1}{1+x^2};$

Feladat

Határozzuk meg a legbővebb intervallumokat, melyeken a következő függvények konvexek illetve konkávok!

► $f(x) = \frac{1}{1+x^2};$



Feladat

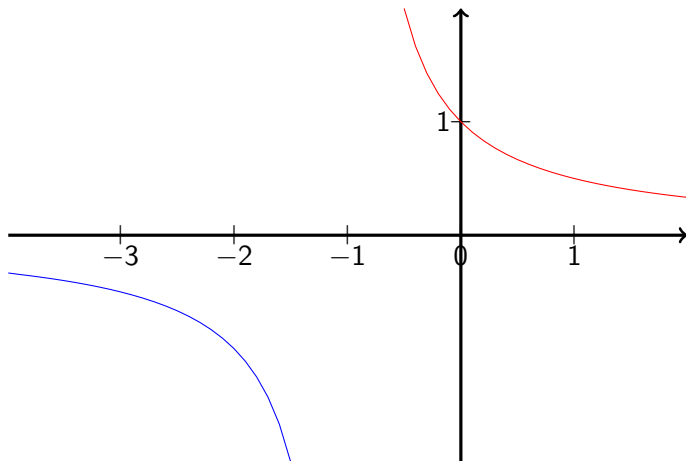
Határozzuk meg a legbővebb intervallumokat, melyeken a következő függvények konvexek illetve konkávok!

► $f(x) = \frac{1}{1+x};$

Feladat

Határozzuk meg a legbővebb intervallumokat, melyeken a következő függvények konvexek illetve konkávok!

► $f(x) = \frac{1}{1+x};$



Tétel (Inflexió n -edrendű feltétele)

Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $D \subset \mathbb{R}$, $a \in \text{int } D$ és $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ $n + 1$ -szer deriválható a -ban úgy, hogy $f^{(n+1)}(a) \neq 0$ és $\forall k \in \widetilde{n - 1} : f^{(k+1)}(a) = 0$.

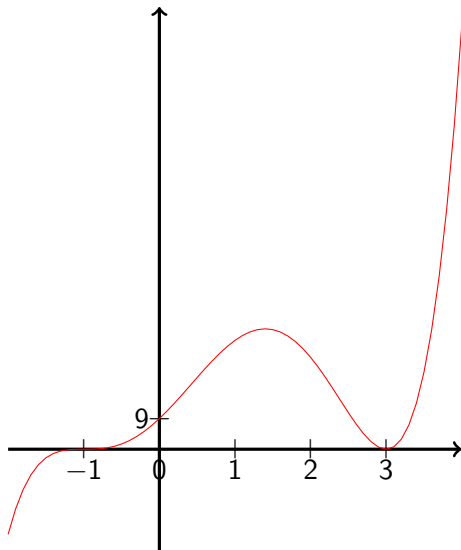
- ▶ Ha n páratlan, akkor f -nek nincs inflexiója a -ban.
- ▶ Ha n páros, akkor f -nek inflexiója van a -ban.

Feladat

Végezzünk teljes függvényvizsgálatot! $f(x) = (x - 3)^2(x + 1)^3$

Feladat

Végezzünk teljes függvényvizsgálatot! $f(x) = (x - 3)^2(x + 1)^3$

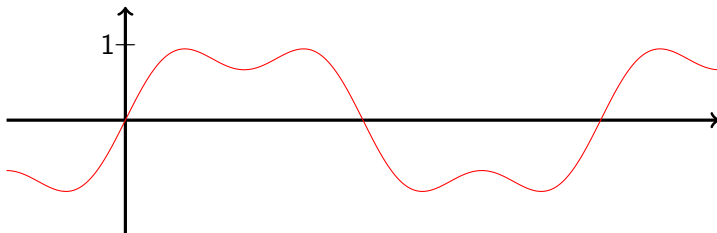


Feladat

Végezzünk teljes függvényvizsgálatot! $f(x) = \sin x + \frac{\sin 3x}{3}$

Feladat

Végezzünk teljes függvényvizsgálatot! $f(x) = \sin x + \frac{\sin 3x}{3}$

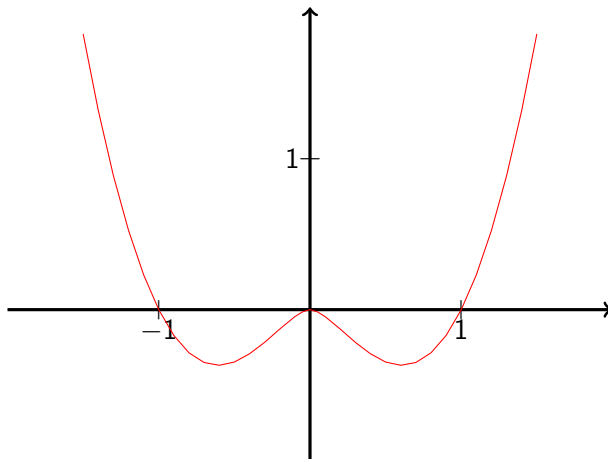


Feladat

Végezzünk teljes függvényvizsgálatot! $f(x) = x^2 \ln x^2$

Feladat

Végezzünk teljes függvényvizsgálatot! $f(x) = x^2 \ln x^2$



Tétel (Jensen-egyenlőtlenség)

f (szigorúan) konvex az $I \subset \text{Dom}_f$ intervallumon pontosan akkor, ha

$\forall n \in \mathbb{N}^+ : \forall \lambda_1, \dots, \lambda_n > 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, x_1, \dots, x_n \in I, \{x_1\} \neq \{x_1, \dots, x_n\}$ esetén

$$f\left(\sum_{i=1}^n (\lambda_i x_i)\right) \leq (\neq) \sum_{i=1}^n (\lambda_i f(x_i)).$$

Tétel (Általánosított Bernoulli-egyenlőtlenség)

Ha $\alpha \in \mathbb{R}$ és $x > -1$, akkor

1. $\alpha > 1$ esetén $(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x$ (egyenlőség pontosan akkor ha $x = 0$).
2. $\alpha = 0$ vagy $\alpha = 1$ esetén $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x$.
3. $0 < \alpha < 1$ esetén $(1+x)^\alpha \leq 1 + \alpha x$ (egyenlőség pontosan akkor ha $x = 0$).
4. $\alpha < 0$ esetén $(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x$ (egyenlőség pontosan akkor ha $x = 0$).

Tétel (Súlyozott hatványközepek közötti egyenlőtlenség)

Ha $n \in \mathbb{N}^+$, $x_1, \dots, x_n > 0$, $w_1, \dots, w_n > 0$, $p, q \in \overline{\mathbb{R}}$ úgy, hogy $w_1 + \dots + w_n = 1$ és $p < q$, akkor

$$M_{p, w_1, \dots, w_n}(x_1, \dots, x_n) \leq M_{q, w_1, \dots, w_n}(x_1, \dots, x_n).$$

Egyenlőség pontosan akkor, ha $x_1 = \dots = x_n$.

Tétel (Hölder-egyenlőtlenség)

Ha $n \in \mathbb{N}^+$, $x_1, y_1, \dots, x_n, y_n \geq 0$, $\alpha \in]0, 1[$, akkor

$$\sum_{i=1}^n x_i^\alpha y_i^{1-\alpha} \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^\alpha \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^{1-\alpha}.$$

Egyenlőség pontosan akkor, ha $\exists t \in \mathbb{R} : (x_1, \dots, x_n) = t(y_1, \dots, y_n)$, vagy $(y_1, \dots, y_n) = t(x_1, \dots, x_n)$.

Definíció

Ha f n -szer deriválható az a pontban, akkor n -edrendű, a -beli **Taylor polinom**jának nevezzük a

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k$$

polinomot.

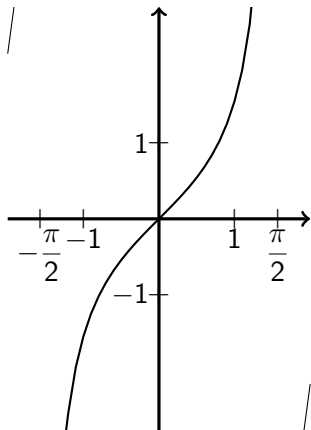
$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

Feladat

- ▶ Írjuk fel az $f(x) = x^2 + 6x - 5$ függvény első-, másod-, harmad- és negyedrendű Taylor-polinomját $a = 0$ és $a = 1$ körül.
- ▶ Írjuk fel az $f(x) = \operatorname{tg} x$ függvény 0 körüli 5-ödrendű Taylor polinomját!
- ▶ Írjuk fel az $f(x) = e^x$ függvény 0 körüli 4-edrendű Taylor polinomját!

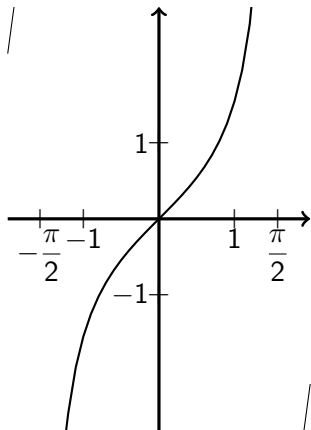
Feladat

- ▶ Írjuk fel az $f(x) = x^2 + 6x - 5$ függvény első-, másod-, harmad- és negyedrendű Taylor-polinomját $a = 0$ és $a = 1$ körül.
- ▶ Írjuk fel az $f(x) = \operatorname{tg} x$ függvény 0 körüli 5-ödrendű Taylor polinomját!
- ▶ Írjuk fel az $f(x) = e^x$ függvény 0 körüli 4-edrendű Taylor polinomját!



Feladat

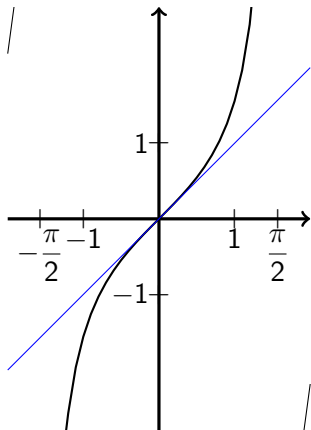
- ▶ Írjuk fel az $f(x) = x^2 + 6x - 5$ függvény első-, másod-, harmad- és negyedrendű Taylor-polinomját $a = 0$ és $a = 1$ körül.
- ▶ Írjuk fel az $f(x) = \operatorname{tg} x$ függvény 0 körüli 5-ödrendű Taylor polinomját!
- ▶ Írjuk fel az $f(x) = e^x$ függvény 0 körüli 4-edrendű Taylor polinomját!



$$T_0(x) = 0;$$

Feladat

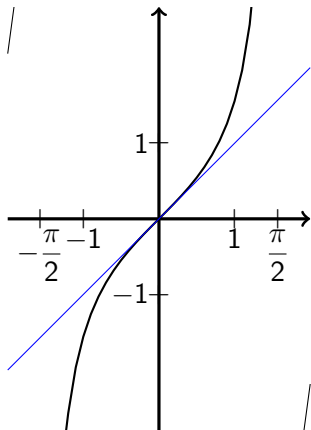
- ▶ Írjuk fel az $f(x) = x^2 + 6x - 5$ függvény első-, másod-, harmad- és negyedrendű Taylor-polinomját $a = 0$ és $a = 1$ körül.
- ▶ Írjuk fel az $f(x) = \operatorname{tg} x$ függvény 0 körüli 5-ödrendű Taylor polinomját!
- ▶ Írjuk fel az $f(x) = e^x$ függvény 0 körüli 4-edrendű Taylor polinomját!



$$T_0(x) = 0; \quad T_1(x) = x$$

Feladat

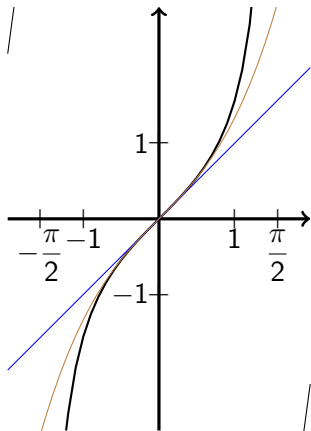
- ▶ Írjuk fel az $f(x) = x^2 + 6x - 5$ függvény első-, másod-, harmad- és negyedrendű Taylor-polinomját $a = 0$ és $a = 1$ körül.
- ▶ Írjuk fel az $f(x) = \operatorname{tg} x$ függvény 0 körüli 5-ödrendű Taylor polinomját!
- ▶ Írjuk fel az $f(x) = e^x$ függvény 0 körüli 4-edrendű Taylor polinomját!



$$T_0(x) = 0; \quad T_1(x) = x = T_2(x);$$

Feladat

- ▶ Írjuk fel az $f(x) = x^2 + 6x - 5$ függvény első-, másod-, harmad- és negyedrendű Taylor-polinomját $a = 0$ és $a = 1$ körül.
- ▶ Írjuk fel az $f(x) = \operatorname{tg} x$ függvény 0 körüli 5-ödrendű Taylor polinomját!
- ▶ Írjuk fel az $f(x) = e^x$ függvény 0 körüli 4-edrendű Taylor polinomját!

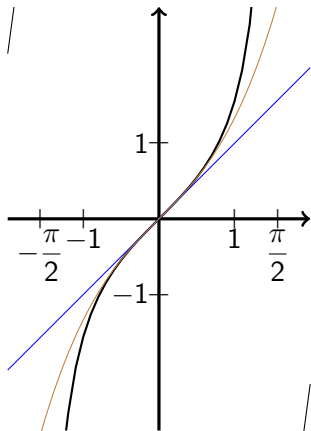


$$T_0(x) = 0; \quad T_1(x) = x = T_2(x);$$

$$T_3(x) = \frac{x^3}{3} + x$$

Feladat

- ▶ Írjuk fel az $f(x) = x^2 + 6x - 5$ függvény első-, másod-, harmad- és negyedrendű Taylor-polinomját $a = 0$ és $a = 1$ körül.
- ▶ Írjuk fel az $f(x) = \operatorname{tg} x$ függvény 0 körüli 5-ödrendű Taylor polinomját!
- ▶ Írjuk fel az $f(x) = e^x$ függvény 0 körüli 4-edrendű Taylor polinomját!

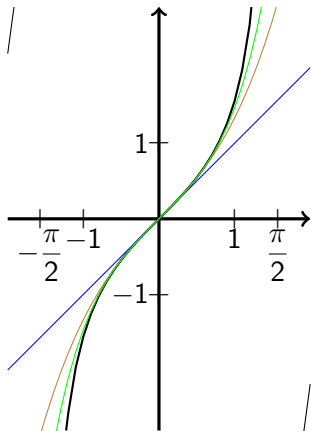


$$T_0(x) = 0; \quad T_1(x) = x = T_2(x);$$

$$T_3(x) = \frac{x^3}{3} + x = T_4(x);$$

Feladat

- ▶ Írjuk fel az $f(x) = x^2 + 6x - 5$ függvény első-, másod-, harmad- és negyedrendű Taylor-polinomját $a = 0$ és $a = 1$ körül.
- ▶ Írjuk fel az $f(x) = \operatorname{tg} x$ függvény 0 körüli 5-ödrendű Taylor polinomját!
- ▶ Írjuk fel az $f(x) = e^x$ függvény 0 körüli 4-edrendű Taylor polinomját!



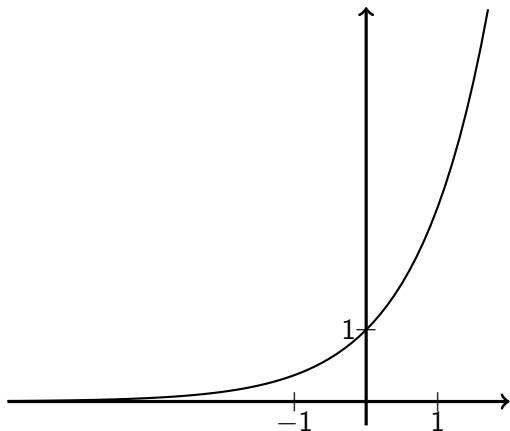
$$T_0(x) = 0; \quad T_1(x) = x = T_2(x);$$

$$T_3(x) = \frac{x^3}{3} + x = T_4(x);$$

$$T_5(x) = \frac{2x^5}{15} + \frac{x^3}{3} + x;$$

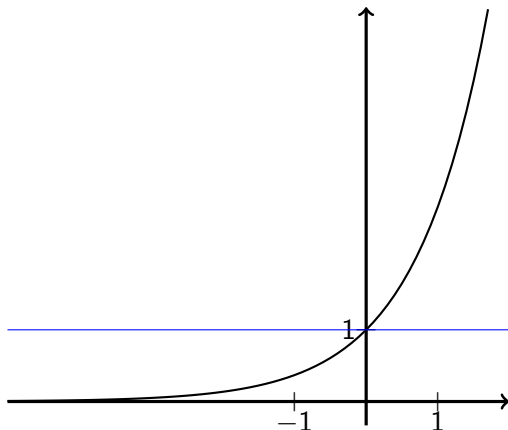
Feladat

- ▶ Írjuk fel az $f(x) = x^2 + 6x - 5$ függvény első-, másod-, harmad- és negyedrendű Taylor-polinomját $a = 0$ és $a = 1$ körül.
- ▶ Írjuk fel az $f(x) = \operatorname{tg} x$ függvény 0 körüli 5-ödrendű Taylor polinomját!
- ▶ Írjuk fel az $f(x) = e^x$ függvény 0 körüli 4-edrendű Taylor polinomját!



Feladat

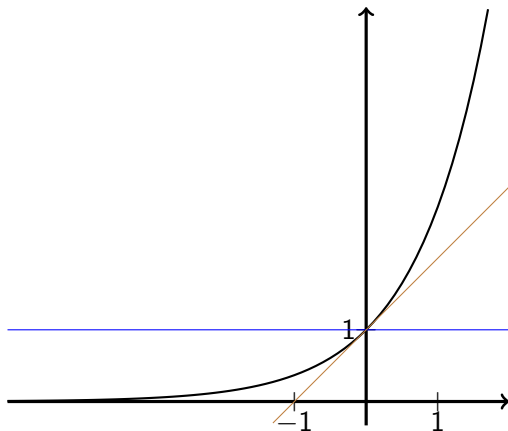
- ▶ Írjuk fel az $f(x) = x^2 + 6x - 5$ függvény első-, másod-, harmad- és negyedrendű Taylor-polinomját $a = 0$ és $a = 1$ körül.
- ▶ Írjuk fel az $f(x) = \operatorname{tg} x$ függvény 0 körüli 5-ödrendű Taylor polinomját!
- ▶ Írjuk fel az $f(x) = e^x$ függvény 0 körüli 4-edrendű Taylor polinomját!



$$T_0(x) = 1;$$

Feladat

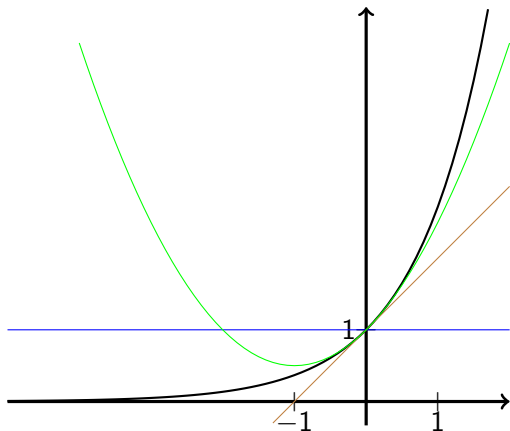
- ▶ Írjuk fel az $f(x) = x^2 + 6x - 5$ függvény első-, másod-, harmad- és negyedrendű Taylor-polinomját $a = 0$ és $a = 1$ körül.
- ▶ Írjuk fel az $f(x) = \operatorname{tg} x$ függvény 0 körüli 5-ödrendű Taylor polinomját!
- ▶ Írjuk fel az $f(x) = e^x$ függvény 0 körüli 4-edrendű Taylor polinomját!



$$T_0(x) = 1; T_1(x) = x + 1;$$

Feladat

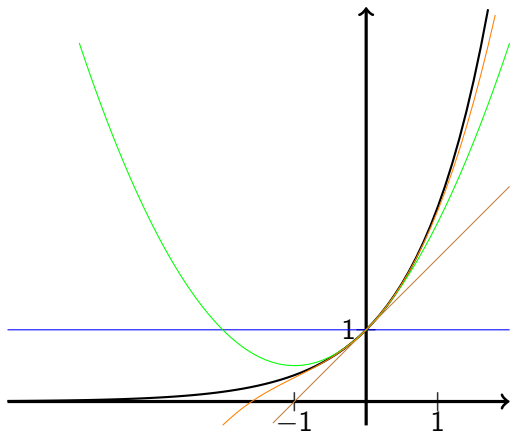
- ▶ Írjuk fel az $f(x) = x^2 + 6x - 5$ függvény első-, másod-, harmad- és negyedrendű Taylor-polinomját $a = 0$ és $a = 1$ körül.
- ▶ Írjuk fel az $f(x) = \operatorname{tg} x$ függvény 0 körüli 5-ödrendű Taylor polinomját!
- ▶ Írjuk fel az $f(x) = e^x$ függvény 0 körüli 4-edrendű Taylor polinomját!



$$T_0(x) = 1; \quad T_1(x) = x + 1;$$
$$T_2(x) = \frac{x^2}{2} + x + 1;$$

Feladat

- ▶ Írjuk fel az $f(x) = x^2 + 6x - 5$ függvény első-, másod-, harmad- és negyedrendű Taylor-polinomját $a = 0$ és $a = 1$ körül.
- ▶ Írjuk fel az $f(x) = \operatorname{tg} x$ függvény 0 körüli 5-ödrendű Taylor polinomját!
- ▶ Írjuk fel az $f(x) = e^x$ függvény 0 körüli 4-edrendű Taylor polinomját!



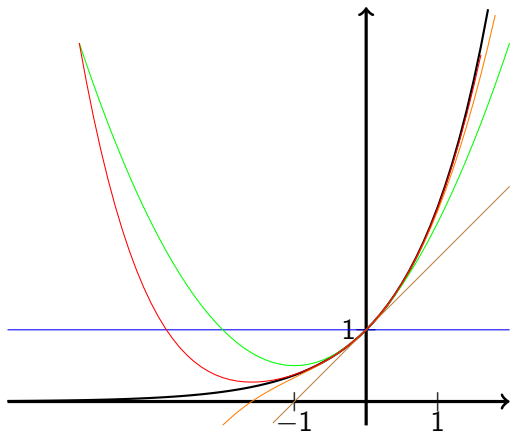
$$T_0(x) = 1; \quad T_1(x) = x + 1;$$

$$T_2(x) = \frac{x^2}{2} + x + 1;$$

$$T_3(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + x + 1;$$

Feladat

- ▶ Írjuk fel az $f(x) = x^2 + 6x - 5$ függvény első-, másod-, harmad- és negyedrendű Taylor-polinomját $a = 0$ és $a = 1$ körül.
- ▶ Írjuk fel az $f(x) = \operatorname{tg} x$ függvény 0 körüli 5-ödrendű Taylor polinomját!
- ▶ Írjuk fel az $f(x) = e^x$ függvény 0 körüli 4-edrendű Taylor polinomját!



$$T_0(x) = 1; \quad T_1(x) = x + 1;$$

$$T_2(x) = \frac{x^2}{2} + x + 1;$$

$$T_3(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + x + 1;$$

$$T_4(x) = \frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + x + 1;$$

Tétel

$T_n(x)$ az egyetlen olyan legfeljebb n -edfokú polinom, amire

$$T_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$$

minden $k = 0, 1, \dots, n$ esetén.

Következmény

Ha f n -szer deriválható a -ban, akkor az $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ *maradéktagra*

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{R_n(x)}{(x - a)^n} = 0.$$

Tétel (Taylor-tétel)

Ha f $n + 1$ -szer deriválható az $[a, x]$ (vagy $[x, a]$) intervallumon, akkor létezik $\xi \in]a, x[$ (vagy $\xi \in]x, a[$), amire

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}.$$

$$f(x) = \underbrace{f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n}_{T_n(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}}_{R_n(x)}$$

Feladat

Becsüljük $\ln 2$ -t a logaritmus függvény $a = 1$ körüli ötödrendű Taylor-polinomjával, és adjunk korlátot a hibára!

Feladat

Becsüljük $\sqrt[3]{9}$ értékét 3 tizedesjegy pontossággal!

Definíció (Paraméteres görbe)

A $t \mapsto (x(t), y(t))$ egy **paraméteres görbe**, ahol a t paraméter végigfut egy $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon.

Megjegyzés

Az intervallumon értelmezett $f(x)$ függvény grafikonja mindig egy paraméteres görbe $x(t) = t$, $y(t) = f(t)$ választással.

A paraméteres görbe nem mindig egy függvény grafikonja, például $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$, ahol $t \in [0, 2\pi]$ az egységkör.

Tétel

Ha $x(t)$ invertálható, akkor a paraméteres görbe egy $y = f(x)$ függvény grafikonját futja be.

Legyen t_0 az I belső pontja, és használjuk az $x_0 = x(t_0)$ és $y_0 = y(t_0)$ jelöléseket. Tegyük fel továbbá, hogy x invertálható I -n, és $f(x) = y(t(x))$ az előző tételbeli függvény.

Tétel

Ha x folytonos I -n, x és y deriválható t_0 -ban úgy, hogy $x'(t_0) \neq 0$, akkor f deriválható x_0 -ban és

$$f'(x_0) = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}.$$

Tétel

Ha x és y kétszer deriválható t_0 -ban úgy, hogy $x'(t_0) \neq 0$, akkor f kétszer deriválható x_0 -ban és

$$f''(x_0) = \frac{y''(t_0)x'(t_0) - x''(t_0)y'(t_0)}{(x'(t_0))^3}.$$

Feladat

Vizsgáljuk a $t \mapsto (t \cos t, t \sin t)$ paraméteres görbe lokális tulajdonságait a $t_0 = 0$, és a $t_0 = \frac{\pi}{2}$ pontban!

Definíció

Ha F deriválható az $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon, és $F'(x) = f(x)$ minden $x \in I$ esetén, akkor azt mondjuk, hogy F a f egy **primitív függvénye** I -n.

Ha az f függvénynek létezik primitív függvénye, akkor a primitív függvényeinek halmazát az f **határozatlan integráljának** nevezzük és alkalmazzuk az

$$\int f \quad \text{vagy az} \quad \int f(x) dx$$

jelölést.

Példa

Például az $f(x) = e^x$ függvény primitív függvénye az $F(x) = e^x$ és a $G(x) = e^x + 3$ is.

Tétel (A határozatlan integrál szerkezete)

Legyen F egy primitív függvénye f -nek I -n.

G pontosan akkor primitív függvénye f -nek I -n, ha létezik $c \in \mathbb{R}$, melyre

$$G(x) = F(x) + c$$

teljesül minden $x \in I$ esetén.

Következmény

Ha F egy primitív függvénye f -nek I -n, akkor

$$\int f(x) \, dx = \{F(x) + c \mid c \in \mathbb{R}\}.$$

Ezért alkalmazzuk az egyszerűbb

$$\int f(x) \, dx = F(x) + c$$

jelölést.

$$1. \int x^\alpha dx = \begin{cases} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, & \text{ha } \alpha \neq -1, \\ \ln |x| + c, & \text{ha } \alpha = -1; \end{cases}$$

$$2. \int e^x dx = e^x + c;$$

$$3. \int \sin x dx = -\cos x + c;$$

$$4. \int \cos x dx = \sin x + c;$$

$$5. \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + c;$$

$$6. \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + c;$$

$$7. \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c;$$

$$8. \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \operatorname{arsh} x + c;$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \quad (a > 0);$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + c;$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + c;$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} dx = \operatorname{th} x + c;$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} dx = -\operatorname{cth} x + c;$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + c;$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \operatorname{arch} x + c;$$

Tétel (Primitív függvény és műveletek)

Ha f -nek és g -nek van primitív függvénye (ugyanazon az intervallumon), akkor $f + g$ -nek és $f - g$ -nek is, méghozzá

$$\int (f \pm g) = \int f \pm \int g.$$

Ha f -nek van primitív függvénye, és $\alpha \in \mathbb{R}$, akkor αf -nek is van primitív függvénye, méghozzá

$$\int (\alpha f) = \alpha \int f.$$

Feladat

$$\int x^3 - x^2 + 5x + \pi \, dx = ?$$

$$\int \frac{x^3 - x^2 + 5x + \pi}{x^2} \, dx = ?$$

Tétel (Parciális integrál)

Ha f és g deriválhatóak az I intervallumon, és $f'g$ -nek létezik itt primitív függvénye, akkor fg' -nek is, és

$$\int (fg') = fg - \int (f'g).$$

Ha $p(x)$ egy polinom, és az integrandus $p(x)e^x$, $p(x) \sin x$, $p(x) \cos x$, $p(x) \operatorname{sh} x$ vagy $p(x) \operatorname{ch} x$ alakú, akkor így integrálunk.

Feladat

$$\int x \sin x \, dx = ?$$

$$\int (x^2 - 2x)e^x \, dx = ?$$

Ha $p(x)$ egy polinom, és az integrandus $p(x) \ln x$, $p(x) \arcsin x$, $p(x) \arccos x$, $p(x) \operatorname{arctg} x$, $p(x) \operatorname{arcctg} x$, $p(x) \operatorname{arsh} x$, $p(x) \operatorname{arch} x$, $p(x) \operatorname{arth} x$, $p(x) \operatorname{arcth} x$ alakú, akkor így integrálunk.

Feladat

$$\int \ln x \, dx = ?$$

$$\int (3x^2 + 1) \operatorname{arctg} x \, dx = ?$$

Ha az integrandus mindkét tényezője e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{sh} x$ vagy $\operatorname{ch} x$, akkor (néha) így integrálunk.

Feladat

$$\int e^x \cos x \, dx = ?$$

$$\int \sin^2 x \, dx = ?$$

Tétel (Helyettesítéses integrál)

Ha g deriválható, és f -nek létezik primitív függvénye, akkor $(f \circ g)g'$ -nek is létezik primitív függvénye, és

$$\int f(g(x))g'(x) \, dx = \int f(t) \, dt \Big|_{t=g(x)}.$$

$$\int f(x) \, dx = F(x) + c \text{ jelöléssel}$$

$$\int f(g(x))g'(x) \, dx = F(g(x)) + c.$$

Feladat

$$\int e^{\sin x} \cos x \, dx = ?$$

$$\int \sin(x^8 + 12x^7)(2x^7 + 21x^6) \, dx = ?$$

Megjegyzés

Ha a külső függvény x^α , akkor

$$\int (g(x))^\alpha g'(x) dx = \frac{(g(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (\alpha \neq -1)$$

és

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln |g(x)| + c$$

Feladat

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = ?$$

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}} dx = ?$$

$$\int \operatorname{ctg} x dx = ?$$

Megjegyzés

Ha a belső függvény elsőfokú polinom, akkor

$$\int f'(ax + b) dx = \frac{f(ax + b)}{a} + c.$$

Feladat

$$\int e^{2x} dx = ?$$

$$\int xe^{2x} dx = ?$$

Tétel

Ha a helyettesítéses integrál feltételei teljesülnek, és g még invertálható is, akkor a következő alakba is írhatjuk.

$$\int f(g(t))g'(t) dt \Big|_{t=g^{-1}(x)} = \int f(x) dx.$$

Feladat

$$\int e^{\sqrt{x}} dx = ?$$

$$\int \frac{e^{4x}}{1+e^x} = ?$$

$$\int \sqrt{e^x} dx = ?$$

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx = ?$$

Racionális törtfüggvény integrálása

0. lépés: Polinom osztással az integrandust felírjuk egy polinom, és egy olyan racionális törtfüggvény összegeként, melynek nevezőjének foka nagyobb mint a számlálójáé. Egyúttal a nevező legyen főpolinom. A polinomot félre tesszük a 3. lépésig csak a másik taggal foglalkozunk.
1. lépés: A nevező felírható elsőfokú, és negatív diszkriminánsú másodfokú főpolinomok szorzataként. Az azonos tényezőket rendezzük egy csoportba.
2. lépés: Parciális törtekre bontás. Ez alatt azt értjük, hogy a nevező előző pontban szereplő tényezőihez egy-egy parciális törtet rendelünk úgy, hogy ezek összege az előző tört legyen.
3. lépés: A parciális törteket külön-külön integráljuk, és a 0. lépésbeli polinomot is.

Minden lépés megoldható, csak az 1. lépés okozhat technikai problémát. Sőt, a megoldás mindig egyértelmű. A lépéseket külön-külön, példákon keresztül mutatjuk be.

Feladat

$$\int \frac{x^2 + x}{x^4 - 1} dx = ?$$

$$\int \frac{2x^2 + 1}{x^3 + 2x^2 + 2x} dx = ?$$

$$\int \frac{x^4 + 1}{(x - 1)^3} dx = ?$$

$$\int \frac{x^8 + 2}{(2x^2 + 3)(x^4 - x^2)} dx = ?$$

$P(x, y) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} a_{ij} x^i y^j$ egy **kétváltozós polinom**. Ha $\sum_{i=0}^n (a_{i,n-i})^2 \neq 0$, akkor n -edfokú.

$R(x, y)$ egy **kétváltozós racionális törtfüggvény**, ha két kétváltozós polinom hányadosa. Hasonlóan értelmezhetjük **többsváltozós polinom** és **többsváltozós racionális törtfüggvény** fogalmát.

Ebben az alfejezetben R mindig egy többsváltozós racionális törtfüggvény. Egy kivétellel kétváltozós.

$$\int \sin(ax) \cos(bx) \, dx, \quad (a^2 \neq b^2)$$

Feladat

$$\int \sin(3x) \cos(7x) = ?$$

$$\int R(e^x) dx$$

Feladat

$$\int \frac{5e^x + e^{3x}}{e^{2x} + 1} = ?$$

$$\int R(\sin x, \cos x) dx$$

Feladat

$$\int \frac{1}{3 \sin^2 x + \cos^4 x} dx = ?$$

$\int \sin^n x \cos^k x \, dx,$ ahol $n, k \in \mathbb{N}$

Feladat

▶ $\int \sin^5 x \cos^4 x \, dx = ?$

▶ $\int \sin^2 x \cos^4 x \, dx = ?$

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx, \quad (a \neq 0)$$

Feladat

$$\int x\sqrt{x^2 + 2x + 1} dx = ?$$

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx, \quad (a \neq 0)$$

Feladat

$$\int x\sqrt{x^2 + x - 1} dx = ?$$

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx, \quad (a \neq 0)$$

Feladat

$$\int x^3 \sqrt{1 - x^2} dx = ?$$

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx, \quad (a \neq 0)$$

Feladat

$$\int \sqrt{1 + x^2} dx = ?$$

$$\int R\left(x^{\frac{p_1}{q_1}}, x^{\frac{p_2}{q_2}}, \dots, x^{\frac{p_n}{q_n}}\right) dx$$

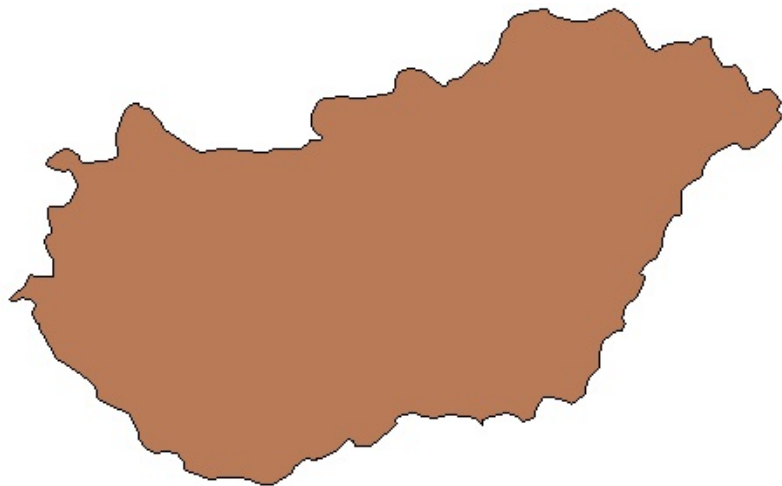
Feladat

$$\int \frac{1}{x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{3}{4}}} dx = ?$$

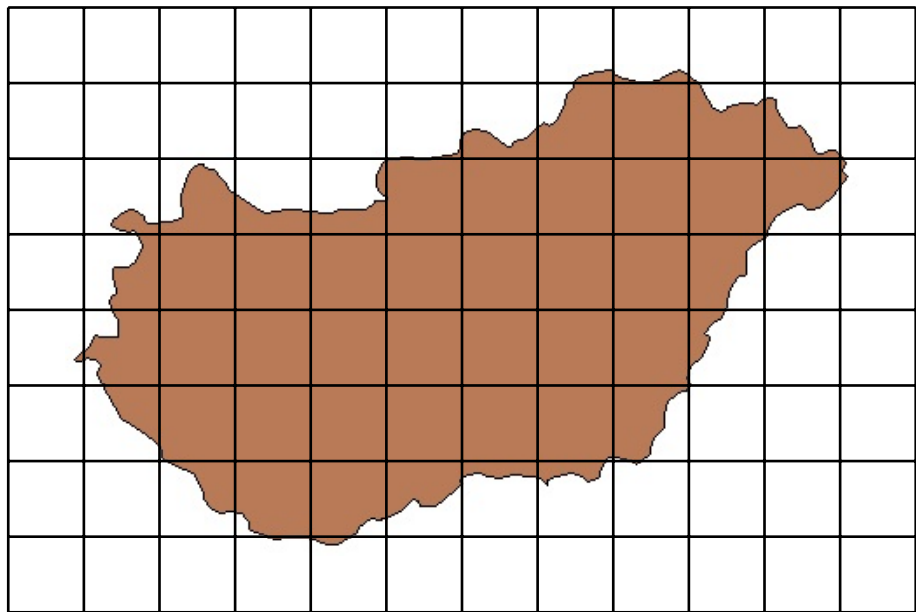
$$\int R(x, \sqrt[n]{ax+b}) dx$$

Feladat

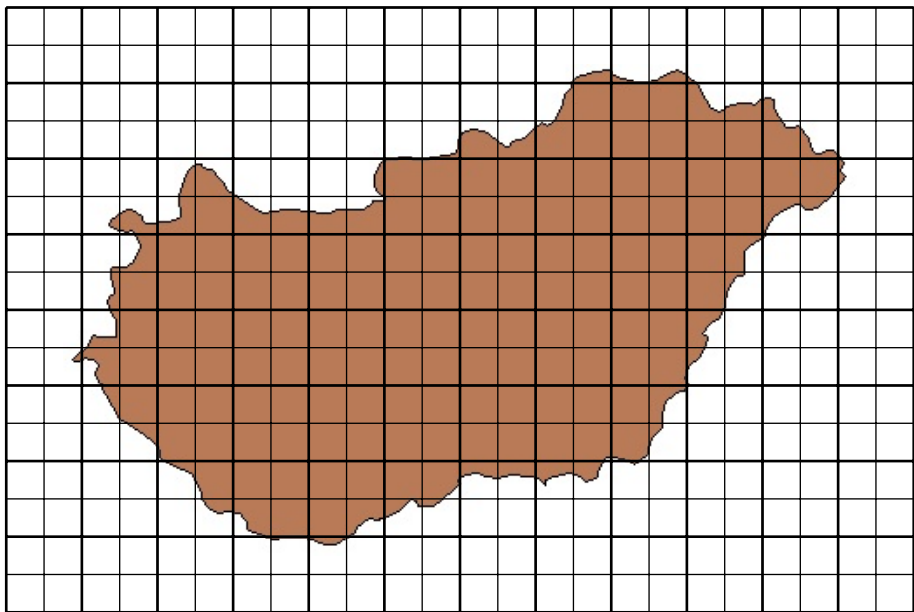
$$\int x^2 \sqrt[3]{2x+1} dx = ?$$



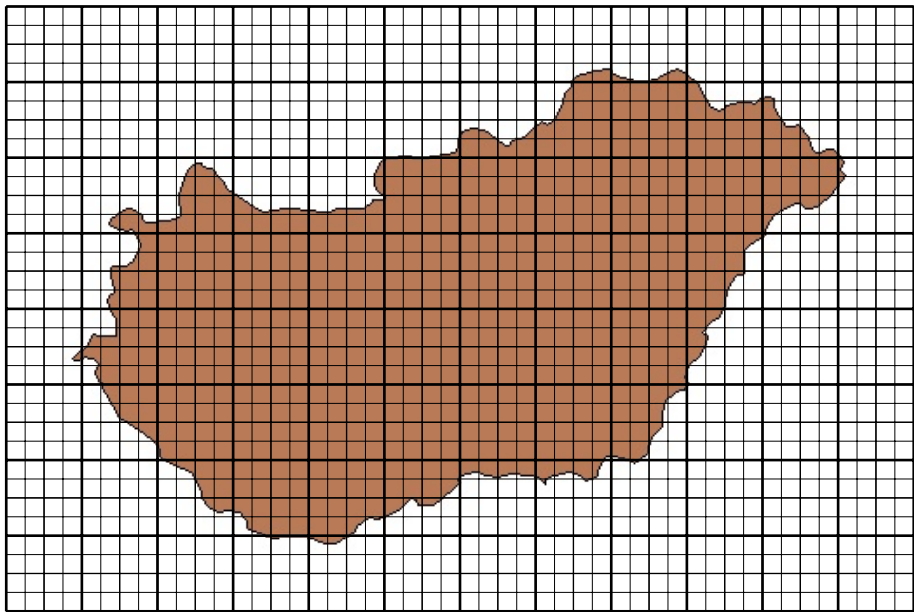
Határozott integrál



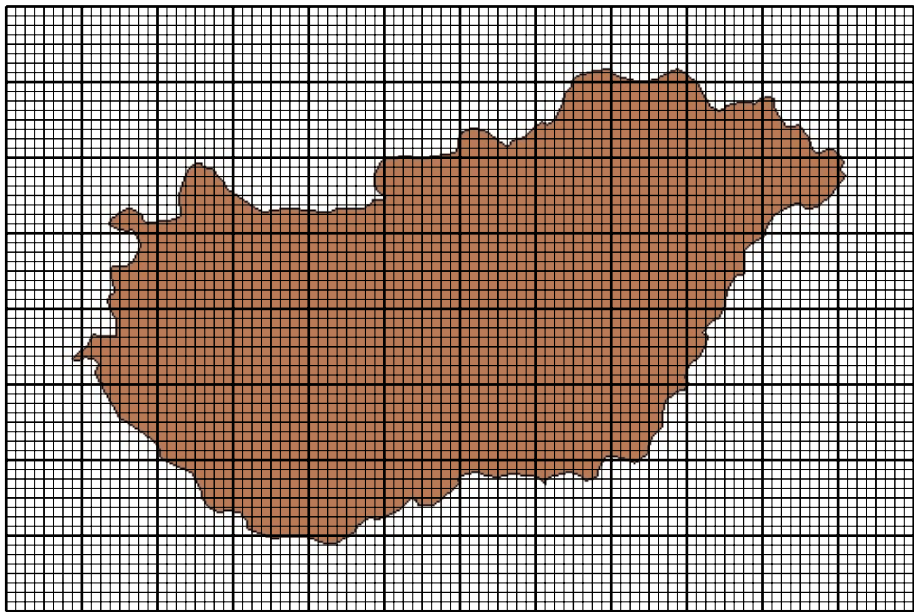
Határozott integrál

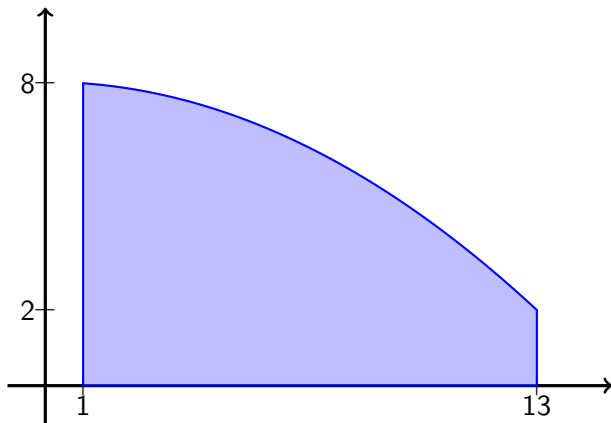


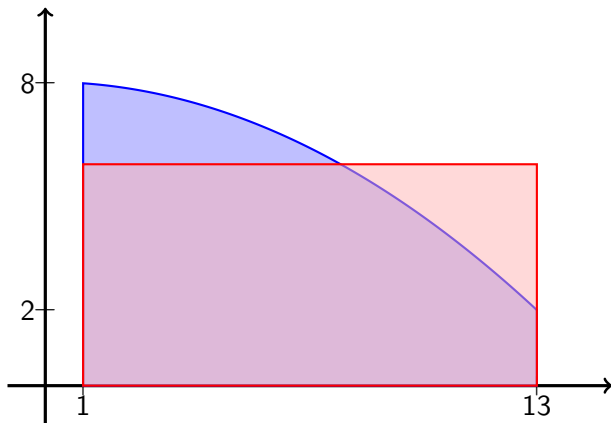
Határozott integrál

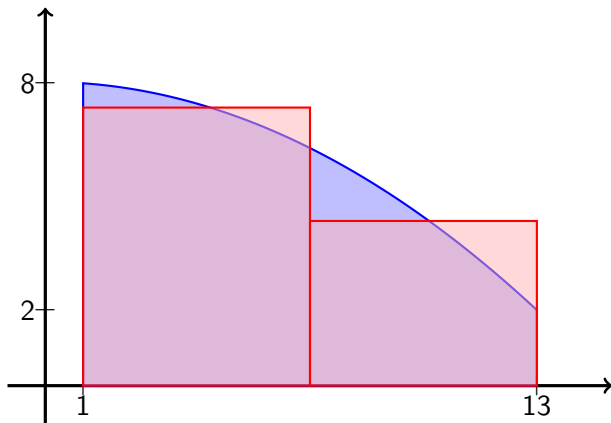


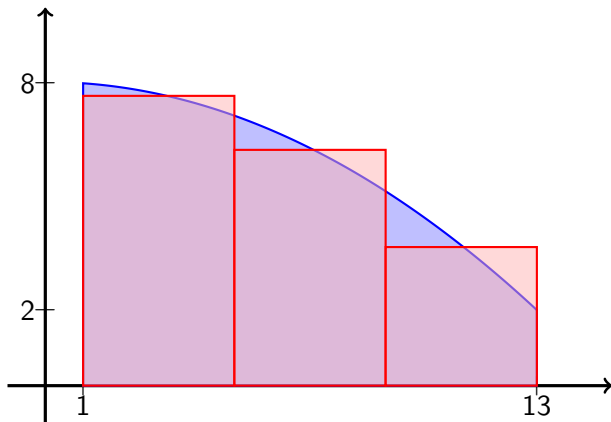
Határozott integrál

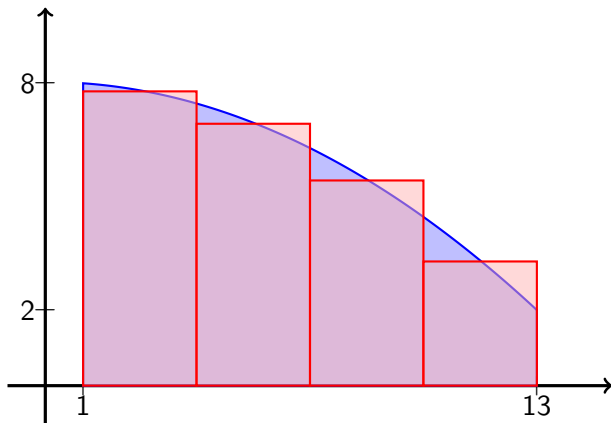


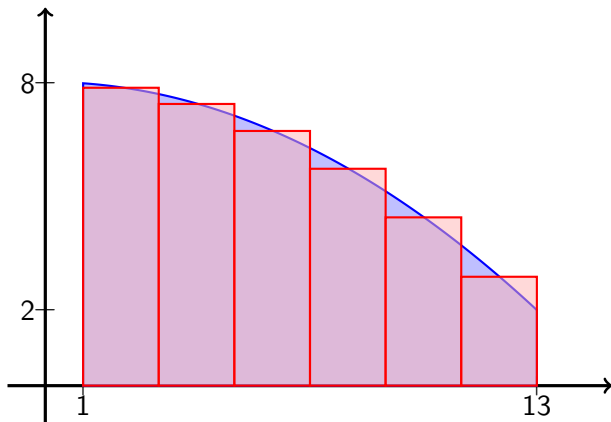


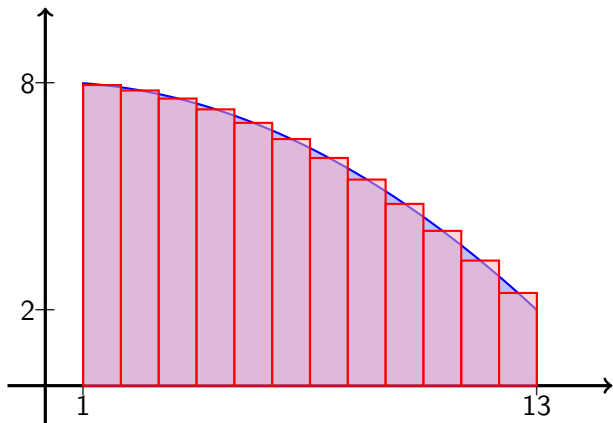


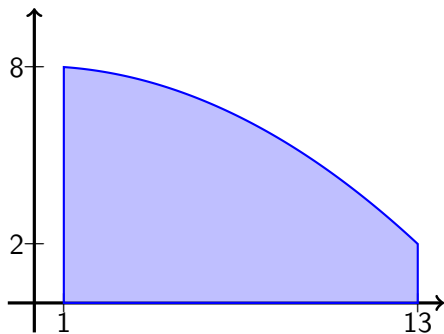
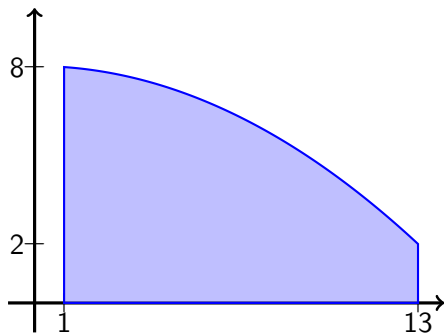


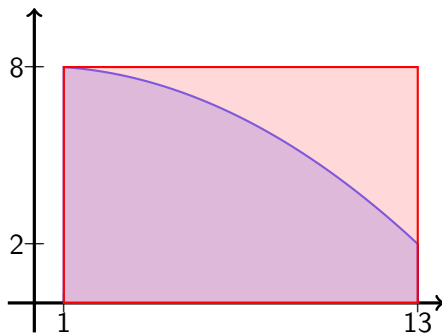
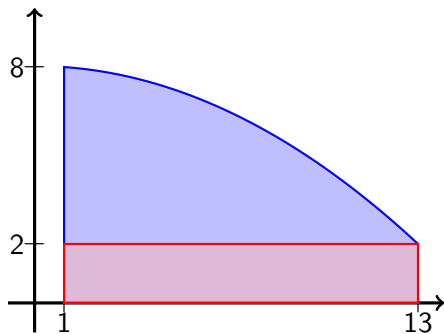


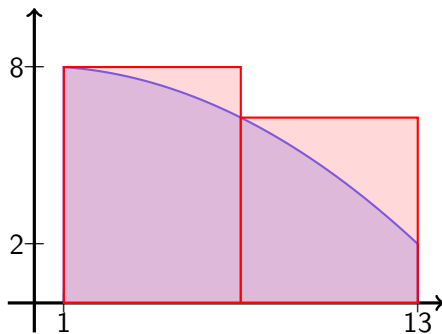
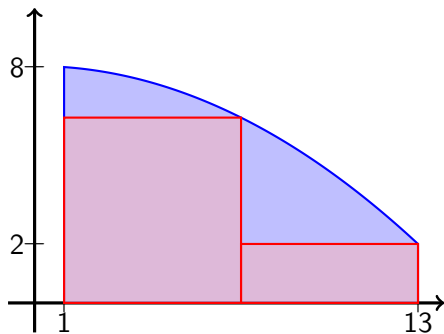


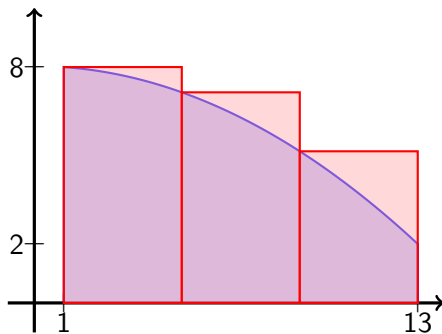
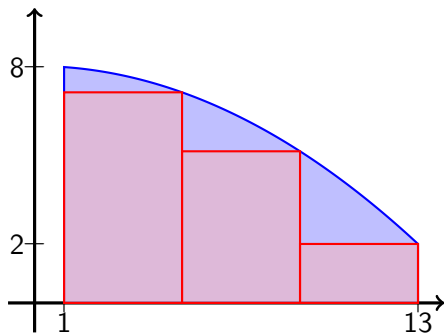


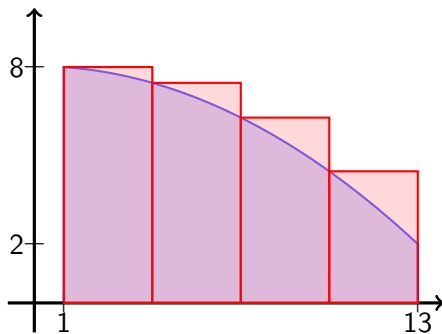
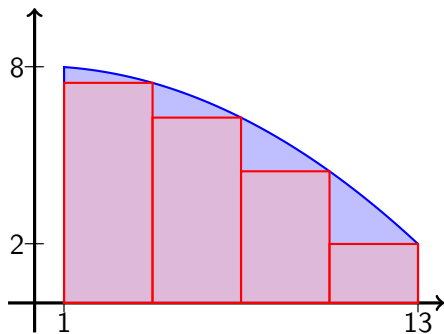


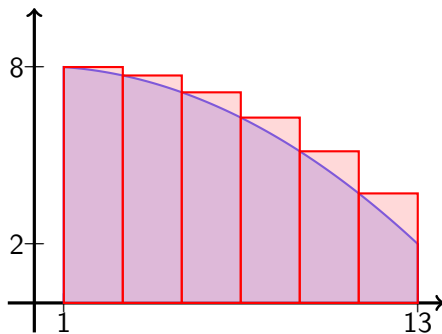
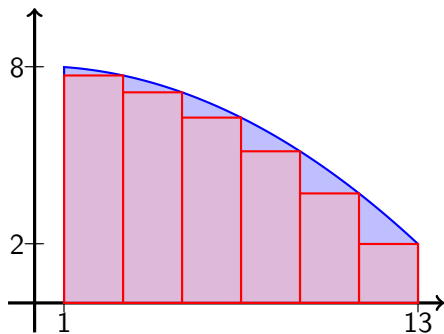


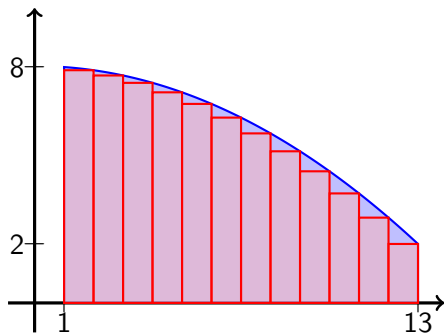












Definíció

Legyen $[a, b]$ egy kompakt intervallum. Egy $P \subset [a, b]$ véges halmazt az $[a, b]$ egy felosztásának nevezzük, ha $a, b \in P$. Ha $n + 1$ a P elemszáma, akkor P elemeit növekvő sorrendben jelölje

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b!$$

Jelölje továbbá Δ_k a k -adik részintervallum hosszát, azaz legyen

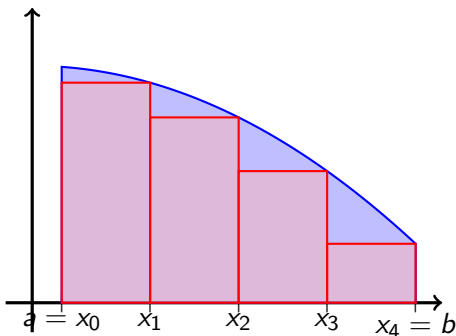
$$\Delta_k = x_k - x_{k-1} \quad (k = 1, \dots, n)!$$

Definíció

Legyen f korlátos $[a, b]$ -n, és P az $[a, b]$ egy felosztása. Ekkor az f P felosztáshoz tartozó **alsó integrálközelítő összegének** nevezzük az

$$s_P = \sum_{k=1}^n \left(\Delta_k \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f \right)$$

valós számot.

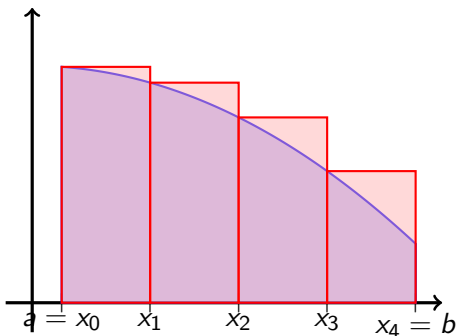


Definíció

Legyen f korlátos $[a, b]$ -n, és P az $[a, b]$ egy felosztása. Ekkor az f P felosztáshoz tartozó **felső integrálközelítő összegének** nevezzük az

$$S_P = \sum_{k=1}^n \left(\Delta_k \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f \right)$$

valós számot.

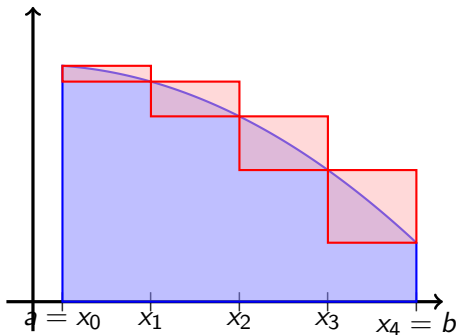


Definíció

Legyen f korlátos $[a, b]$ -n, és P az $[a, b]$ egy felosztása. Ekkor az f P felosztáshoz tartozó **oszcillációs összegének** nevezzük az

$$O_P = \sum_{k=1}^n \left(\Delta_k \left(\sup_{[x_{k-1}, x_k]} f - \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f \right) \right)$$

valós számot.



Megjegyzés

Legyen f korlátos $[a, b]$ -n, és P az $[a, b]$ egy felosztása. Ekkor

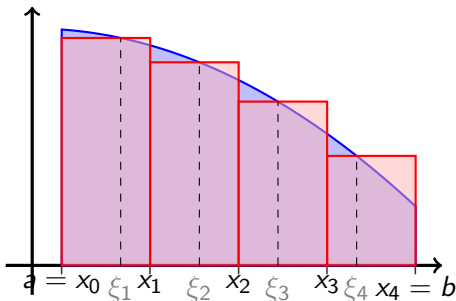
$$O_P = S_P - s_p.$$

Definíció

Legyen f korlátos $[a, b]$ -n, P az $[a, b]$ egy felosztása, és $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ az osztóintervallumok **reprezentáns**pontjai minden $k = 1, \dots, n$ esetén. Ekkor az f P felosztás, és $\xi_1, \dots, \xi_n$ reprezentánspontokhoz tartozó **integrálközelítő összeg**ének nevezzük az

$$\sigma_P = \sum_{k=1}^n (\Delta_k f(\xi_k))$$

valós számot.



Tétel

Legyen f korlátos $[a, b]$ -n, P az $[a, b]$ egy felosztása, és $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ az osztóintervallumok reprezentáns pontjai minden $k = 1, \dots, n$ esetén. Ekkor

$$s_P \leq \sigma_P \leq S_P.$$

Definíció

Legyen f korlátos $[a, b]$ -n! Ekkor az f **alsó**, illetve **felső Darboux-integráljának** nevezzük a következőket.

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x) \, dx = \sup\{s_P \mid P \text{ felosztása } [a, b]\text{-nek}\}$$

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x) \, dx = \inf\{S_P \mid P \text{ felosztása } [a, b]\text{-nek}\}$$

Tétel

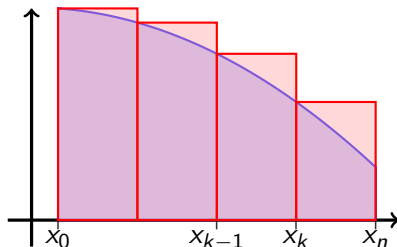
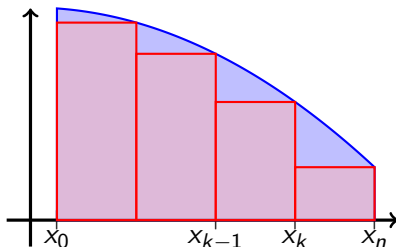
Ha f korlátos $[a, b]$ -n, akkor Darboux-integráljai végesek, és

$$\int_{\underline{a}}^b f(x) \, dx \leq \int_a^{\overline{b}} f(x) \, dx.$$

Útmutatás.

Megmutatjuk, hogy ha P_1 és P_2 felosztások, akkor

$$s_{P_1} \leq s_{P_1 \cup P_2} \leq S_{P_1 \cup P_2} \leq S_{P_2}.$$



Tétel

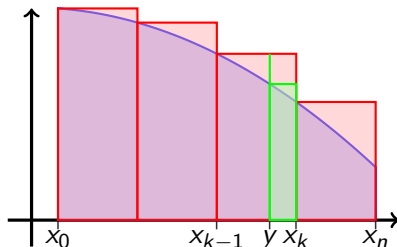
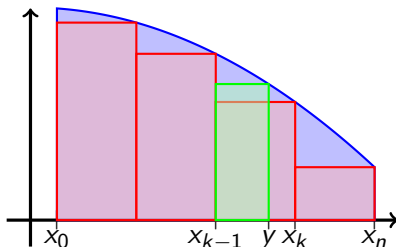
Ha f korlátos $[a, b]$ -n, akkor Darboux-integráljai végesek, és

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx.$$

Útmutatás.

Megmutatjuk, hogy ha P_1 és P_2 felosztások, akkor

$$s_{P_1} \leq s_{P_1 \cup P_2} \leq S_{P_1 \cup P_2} \leq S_{P_2}.$$



Definíció

Ha f korlátos $[a, b]$ -n, és

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx,$$

akkor azt mondjuk, hogy f **Riemann-integrálható** $[a, b]$ -n, a fenti közös értéket f $[a, b]$ feletti **Riemann-integráljának**, vagy röviden **integráljának** nevezzük, és a következőképpen jelöljük.

$$\int_a^b f(x) dx, \quad \int_a^b f$$

Feladat

Számoljuk ki az $\int_0^1 c dx$ és $\int_0^1 D(x) dx$ értéket, ha létezik.

D a Dirichlet-függvény, $D(x) = 1$, ha $x \in \mathbb{Q}$ és $D(x) = 0$, ha $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Definíció

Ha P egy felosztása az $[a, b]$ intervallumnak, akkor **finomságának** nevezzük, és ΔP -vel jelöljük, a felosztás leghosszabb részintervallumának hosszát.

$$\Delta P = \max_k \Delta_k$$

Tétel (Darboux-tétele)

Ha f korlátos az $[a, b]$ -n, akkor

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \Delta P < \delta \implies \int_a^b f - s_P < \varepsilon, \text{ illetve } S_P - \int_a^b f < \varepsilon.$$

Definíció

Legyen most minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén P_n az $[a, b]$ felosztása. Azt mondjuk, hogy a P_n felosztássorozat **normális**, ha

$$\Delta P_n \rightarrow 0.$$

Következmény

Ha P_n normális felosztássorozata $[a, b]$ -nek, és f korlátos $[a, b]$ -n, akkor

$$s_{P_n} \rightarrow \int_a^b f \quad \text{és} \quad S_{P_n} \rightarrow \int_a^b f.$$

Feladat

Számoljuk ki az $\int_0^1 x \, dx$ értéket, ha létezik.

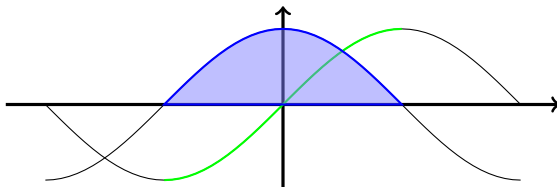
Tétel (Newton-Leibniz-tétel)

Ha f Riemann-integrálható $[a, b]$ -n, és létezik F primitív függvénye is itt, akkor

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b.$$

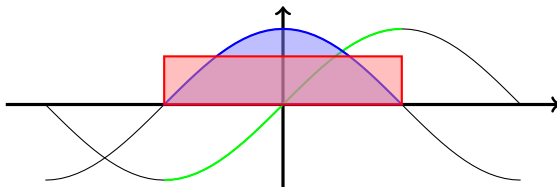
Feladat

Számoljuk ki az $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \, dx$ értéket, ha létezik.



Feladat

Számoljuk ki az $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \, dx$ értéket, ha létezik.



Megjegyzés

A tétel akkor is igaz, ha f Riemann-integrálható $[a, b]$ -n, F folytonos $[a, b]$ -n, és deriválható $]a, b[$ -n, és itt $F' = f$.

A Newton-Leibniz formula igaz marad $a > b$, illetve $a = b$ esetén is, a következő értelmezés szerint.

Definíció

Ha $a < b$, és f Riemann-integrálható $[a, b]$ -n, akkor azt mondjuk, hogy létezik

$$\int_b^a f = - \int_a^b f.$$

Továbbá, legyen

$$\int_a^a f = 0.$$

Lemma

Legyen f korlátos $[a, b]$ -n. f pontosan akkor Riemann-integrálható $[a, b]$ -n, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik $[a, b]$ -nek olyan P felosztása, melyre

$$O_P < \varepsilon.$$

Tétel

Ha f monoton és korlátos $[a, b]$ -n, akkor itt Riemann-integrálható.

Lemma

Ha P_n egy normális felosztássorozata $[a, b]$ -nek, és f itt Riemann- integrálható, akkor a reprezentációs pontok választásától függetlenül

$$\lim \sigma_{P_n} = \int_a^b f.$$

Ha P_n egy felosztássorozata $[a, b]$ -nek, és σ_{P_n} konvergens a reprezentációs pontok választásától függetlenül, akkor f Riemann-integrálható $[a, b]$ -n, és

$$\int_a^b f = \lim \sigma_{P_n}.$$

Tétel

Ha f és g Riemann-integrálható $[a, b]$ -n, és $\alpha \in \mathbb{R}$, akkor $f + g$, $f - g$ és $\alpha \cdot f$ is az, és

$$\int_a^b (f \pm g) = \int_a^b f \pm \int_a^b g, \quad \int_a^b (\alpha \cdot f) = \alpha \int_a^b f.$$

Megjegyzés

Ha f és g Riemann-integrálható $[a, b]$ -n, akkor fg is Riemann-integrálható $[a, b]$ -n.

Ha még létezik $c > 0$, amire $|g(x)| \geq c$ minden $x \in [a, b]$ esetén, akkor f/g is Riemann-integrálható $[a, b]$ -n.

$f \circ g$ Riemann-integrálhatósága nem következik.

Lemma

Ha $a < c < b$, és f korlátos $[a, b]$ -n, akkor

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f, \text{ illetve } \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Útmutatás.

Az $[a, b]$ olyan felosztásait vizsgáljuk, melyekre $c \in P$.



Tétel (Az integrál intervallum szerinti additivitása)

Ha $a < c < b$, és az alábbi egyenlet valamelyik oldala létezik, akkor a másik is, és ekkor a két oldal egyenlő.

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Tétel

Ha $a \leq b$, akkor

$$(b - a) \inf_{[a,b]} f \leq \int_a^b f, \text{ és } \int_a^b f \leq (b - a) \sup_{[a,b]} f.$$

Következmény

Ha $a \leq b$, $f(x) \leq g(x)$ minden $x \in [a, b]$ esetén, és f és g Riemann-integrálható $[a, b]$ -n,

$$\text{akkor } \int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

Illetve ha $a < b$, akkor

$$\inf_{[a,b]} f \leq \underbrace{\frac{\int_a^b f}{b-a}}_{\text{integrálközep}} \leq \sup_{[a,b]} f.$$

Tétel (Háromszög-egyenlőtlenség)

Ha f Riemann-integrálható $[a, b]$ -n, akkor $|f|$ is, és ekkor

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, dx.$$

Megjegyzés

Ha nem tudjuk, hogy $a \leq b$, akkor csak azt állíthatjuk, hogy

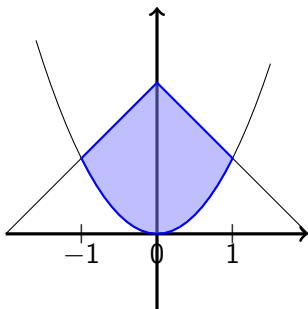
$$\left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq \left| \int_a^b |f(x)| \, dx \right|.$$

Tétel

Ha f folytonos $[a, b]$ -n, akkor itt Riemann-integrálható.

Feladat

Határozzuk meg az $f(x) = x^2$, és a $g(x) = 2 - |x|$ függvények grafikonjai által meghatározott korlátos síkidom területét!



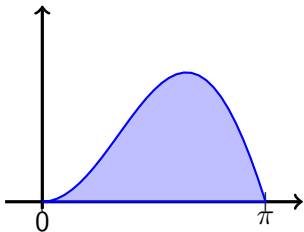
Tétel (Parciális Riemann-integrál)

Ha f és g folytonosan deriválhatóak $[a, b]$ -n, akkor

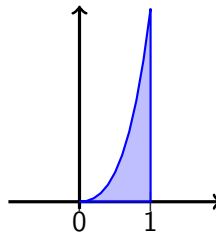
$$\int_a^b (fg') = [fg]_a^b - \int_a^b (f'g).$$

Feladat

$$\int_0^{\pi} x \sin x \, dx = ?$$



$$\int_0^1 x^2 e^x \, dx = ?$$



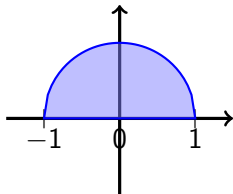
Tétel (Helyettesítéssel Riemann-integrál)

Ha g folytonosan deriválható, szigorúan monoton, és $[a, b] \subset \text{Ran}_g$, továbbá f folytonos $[a, b]$ -n, akkor

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t))g'(t) \, dt.$$

Feladat

Számoljuk ki az egységsugarú kör területét!



Tétel

Ha f korlátos, és véges sok pont kivételével folytonos $[a, b]$ -n, akkor Riemann-integrálható $[a, b]$ -n.

Definíció

Azt mondjuk, hogy az $A \subset \mathbb{R}$ halmaz **nullmértékű** (a Lebesgue mérték szerint), ha minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan x_n és y_n sorozat, hogy $x_n \leq y_n$ minden n -re, $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} [x_n, y_n]$, és

$$\sum_{n=1}^{\infty} (y_n - x_n) < \varepsilon$$

Azt mondjuk, hogy f **majdnem mindenütt folytonos** $[a, b]$ -n, ha egy nullmértékű halmaz kivételével, az $[a, b]$ minden pontjában folytonos.

Tétel (Lebesgue-kritérium)

Tegyük fel, hogy f korlátos $[a, b]$ -n.

Ekkor f pontosan akkor Riemann-integrálható $[a, b]$ -n, ha majdnem mindenütt folytonos $[a, b]$ -n.

Tétel

Tegyük fel, hogy $f(x) = g(x)$ véges sok kivétellel minden $x \in [a, b]$ esetén.
Ekkor f pontosan akkor Riemann-integrálható $[a, b]$ -n, ha g az. Illetve ekkor

$$\int_a^b f = \int_a^b g.$$

Feladat

$$\int_{-2}^{2.5} [x] \, dx = ?$$

Definíció

Ha f Riemann-integrálható $[a, b]$ -n, akkor az **integrál mint a felső határ függvényének**, vagy röviden **integrálfüggvényének** nevezzük az

$$F(x) = \int_a^x f(t) \, dt$$

függvényt. ($x \in [a, b]$, azaz $\text{Dom}_F = [a, b]$.)

Tétel (Integrálszámítás alaptétele)

Ha f Riemann-integrálható $[a, b]$ -n, akkor F integrálfüggvénye folytonos.

Ha még valamely $\xi \in [a, b]$ esetén f folytonos ξ -ben, akkor F integrálfüggvénye deriválható ξ -ben, és $F'(\xi) = f(\xi)$.

Következmény

Ha f folytonos $[a, b]$ -n, akkor integrálfüggvénye egyúttal primitív függvénye is. Így folytonos függvényre alkalmazható a Newton-Leibniz formula.

Az $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$ függvény nem elemi függvény, de tudjuk, hogy szigorúan monoton növekvő, páratlan, és $]-\infty, 0]$ -n konvex, míg a $[0, \infty[$ -n konkáv. A 0 inflexiós pont.

Feladat

► Határozzuk meg az $F(x) = \int_0^{e^x} \sin t^2 dt$ és a $G(x) = \int_{e^x}^{e^x+1} \sin t^2 dt$ függvények deriváltját!

► $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \arctg t^2 dt}{x^3} = ?$

► $\int |x| dx = ?$

Improprius integrál

Definíció (Improprius integrál, 1. típus, (az intervallum nem korlátos))

Legyen $a \in \mathbb{R}$, és f Riemann-integrálható $[a, b]$ -n, minden $b \geq a$ esetén!

Ha létezik $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f \in \mathbb{R}$, akkor azt mondjuk, hogy az f **improprius integrálható** az $[a, \infty[$ **intervallumon**, és az integrál értéke a fenti határérték, azaz

$$\int_a^\infty f = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f.$$

Ha nem létezik $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f$, vagy $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f = \pm\infty$, akkor azt mondjuk, hogy az f **nem** **improprius integrálható** az $[a, \infty[$ -en.

Feladat

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = ?$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = ?$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x} dx = ?$$

$$\int_0^{\infty} x^3 dx = ?$$

$$\int_0^{\infty} \sin x dx = ?$$

Definíció (Impropius integrál, 1. típus, (az intervallum nem korlátos))

Legyen $b \in \mathbb{R}$, és f Riemann-integrálható $[a, b]$ -n, minden $a \leq b$ esetén!

Ha létezik $\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f \in \mathbb{R}$, akkor azt mondjuk, hogy az f **impropius integrálható a $]-\infty, b]$ intervallumon**, és az integrál értéke a fenti határérték, azaz

$$\int_{-\infty}^b f = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f.$$

Ha nem létezik $\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f$, vagy $\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f = \pm\infty$, akkor azt mondjuk, hogy az f **nem impropius integrálható a $]-\infty, b]$ -n**.

Feladat

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = ?$$

$$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2 + 1} dx = ?$$

$$\int_{-\infty}^0 \frac{x}{x^2 + 1} dx = ?$$

Definíció (Impropius integrál, 2. típus, (a függvény nem korlátos))

Legyen f Riemann-integrálható $[x, b]$ -n, minden $a < x \leq b$ esetén!

Ha létezik $\lim_{x \rightarrow a+} \int_x^b f \in \mathbb{R}$, akkor azt mondjuk, hogy az f **impropius integrálható az $[a, b]$ intervallumon**, és az integrál értéke a fenti határérték, azaz

$$\int_a^b f = \lim_{x \rightarrow a+} \int_x^b f.$$

Ha nem létezik $\lim_{x \rightarrow a+} \int_x^b f$, vagy $\lim_{x \rightarrow a+} \int_x^b f = \pm\infty$, akkor azt mondjuk, hogy az f **nem impropius integrálható az $[a, b]$ -n**.

Feladat

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = ?$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = ?$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx = ?$$

$$\int_0^1 \ln x dx = ?$$

Definíció (Impropius integrál, 2. típus, (a függvény nem korlátos))

Legyen f Riemann-integrálható $[a, x]$ -en, minden $a \leq x < b$ esetén!

Ha létezik $\lim_{x \rightarrow b-} \int_a^x f \in \mathbb{R}$, akkor azt mondjuk, hogy az f **impropius integrálható** az $[a, b]$ **intervallumon**, és az integrál értéke a fenti határérték, azaz

$$\int_a^b f = \lim_{x \rightarrow b-} \int_a^x f.$$

Ha nem létezik $\lim_{x \rightarrow b-} \int_a^x f$, vagy $\lim_{x \rightarrow b-} \int_a^x f = \pm\infty$, akkor azt mondjuk, hogy az f **nem impropius integrálható** az $[a, b]$ -n.

Feladat

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x \, dx = ?$$

Definíció (Vegyes típus)

Legyen $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$! Ha létezik $n \in \mathbb{N}^+$, és $x_0, \dots, x_n \in \overline{\mathbb{R}}$ úgy, hogy $a = x_0 \leq \dots \leq x_n = b$, és minden $k = 1, \dots, n$ esetén f improprius integrálható (1. vagy 2. típus) az $|x_{k-1}, x_k|$ intervallumon, akkor azt mondjuk, hogy az f **improprius integrálható az $[a, b]$ intervallumon**, és az integrál értéke a fentiek összege, azaz

$$\int_a^b f = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f.$$

Feladat

$$\int_{-1}^1 x^{-2} dx = ?$$

$$\int_{-1}^1 x^{-3} dx = ?$$

$$\int_{-1}^1 x^{-1/3} dx = ?$$

Definíció

Ha $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ úgy, hogy $a < b$, és f improprius integrálható $|a, b|$ -n, akkor azt mondjuk, hogy létezik

$$\int_b^a f = - \int_a^b f.$$

Továbbá, legyen

$$\int_a^a f = 0.$$

Tétel

Ha $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, f és g improprius integrálható $|a, b|$ -n, és $\alpha \in \mathbb{R}$, akkor $f + g$, $f - g$ és $\alpha \cdot f$ is az, és

$$\int_a^b (f \pm g) = \int_a^b f \pm \int_a^b g, \quad \int_a^b (\alpha \cdot f) = \alpha \int_a^b f.$$

Tétel (Az improprius integrál intervallum szerinti additivitása)

Ha $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < c < b$, és az alábbi egyenlet valamelyik oldala létezik, akkor a másik is, és ekkor a két oldal egyenlő.

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

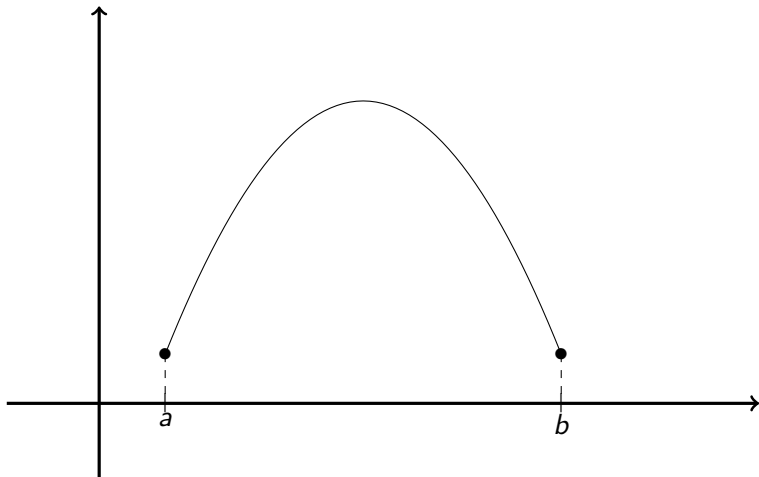
Tétel

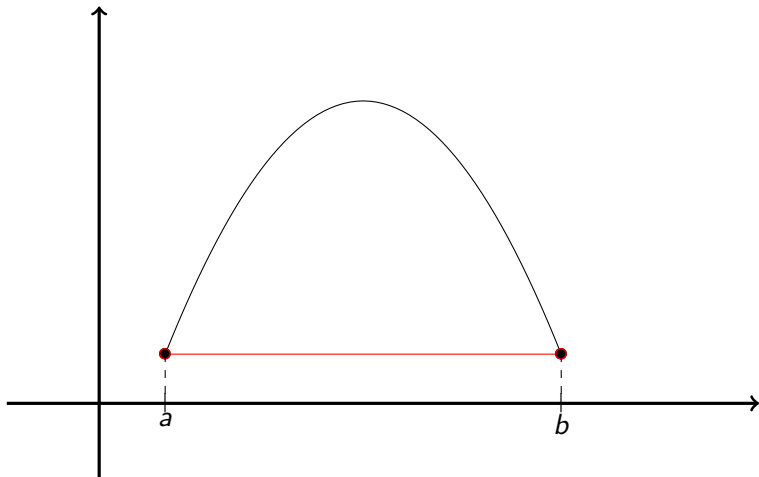
Legyen $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$, f , g és h folytonos $|a, b|$ -n, $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ minden $x \in |a, b|$ esetén! Ha f és h improprius integrálható $|a, b|$ -n, akkor g is, és

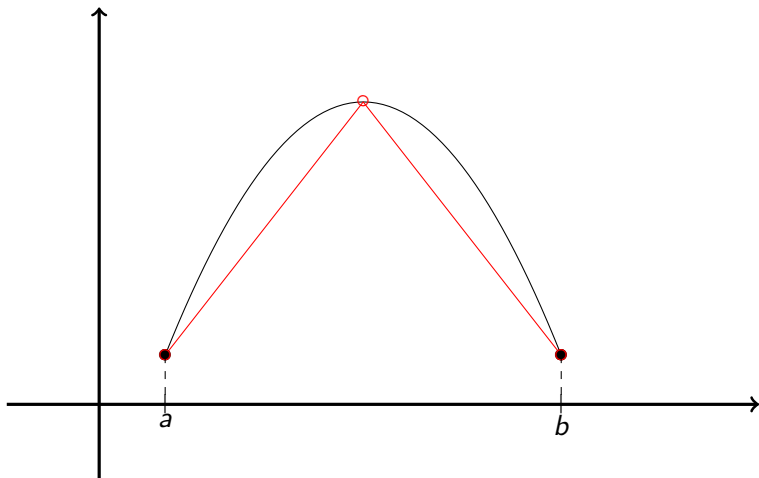
$$\int_a^b f \leq \int_a^b g \leq \int_a^b h.$$

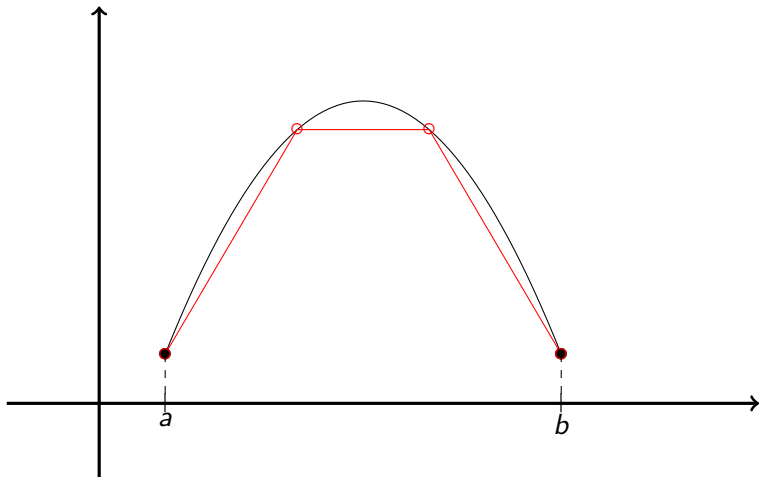
Feladat

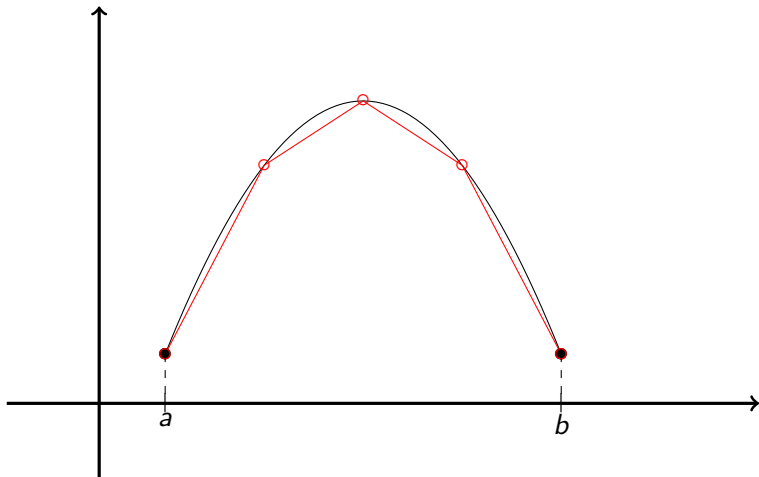
Létezik-e $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$?

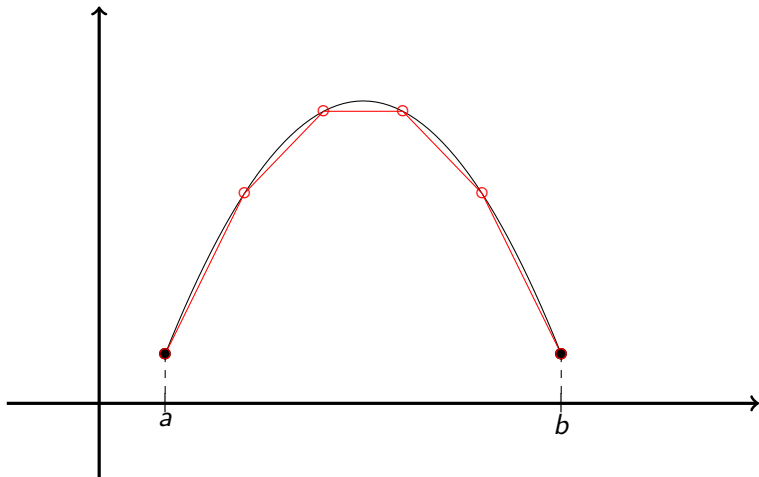


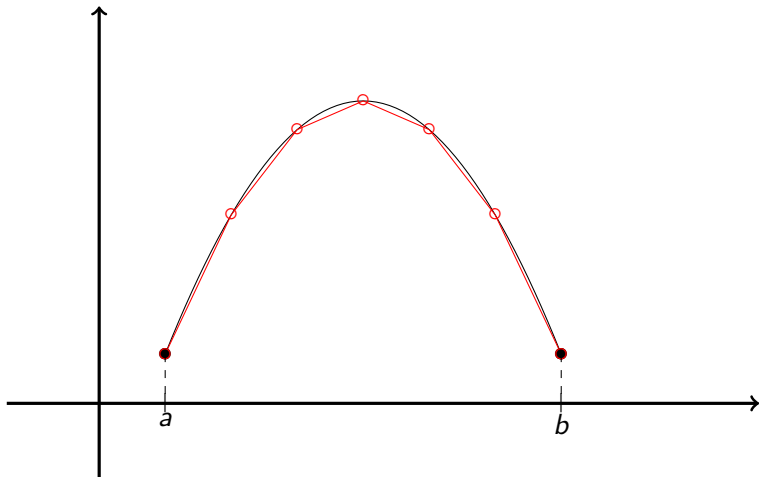


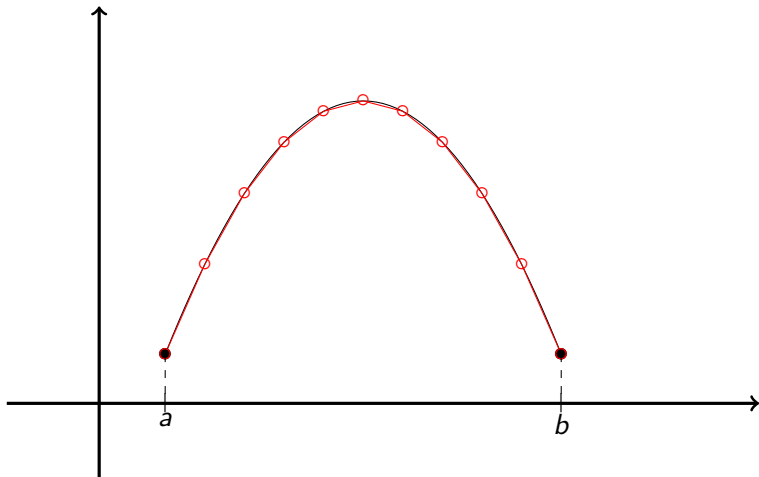


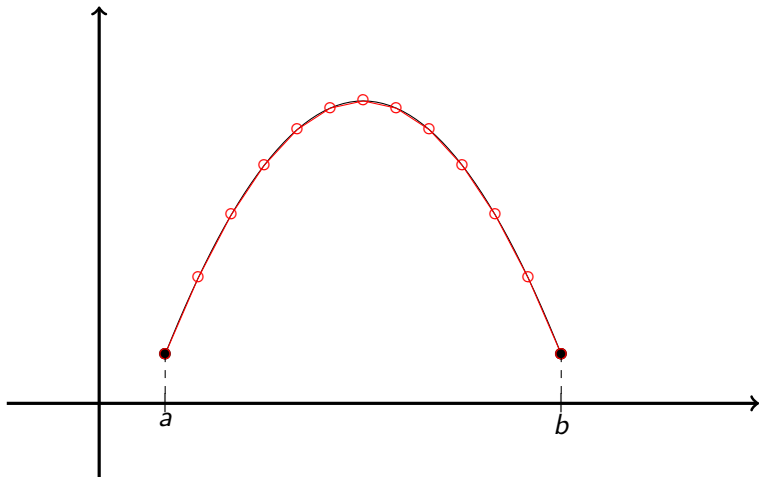


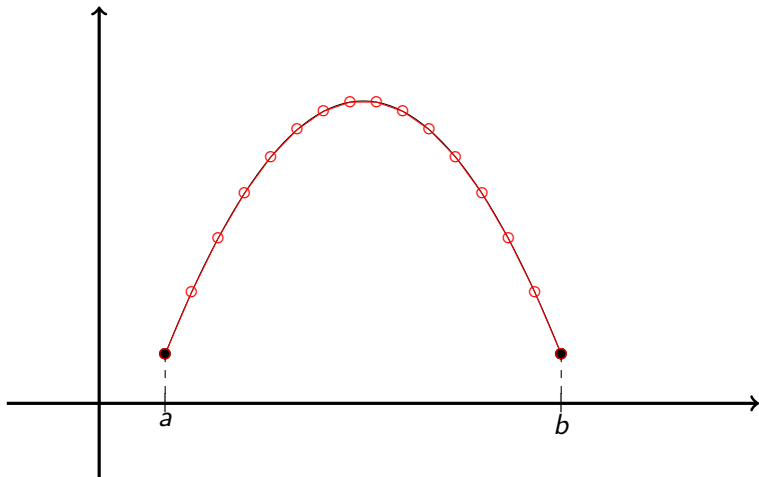


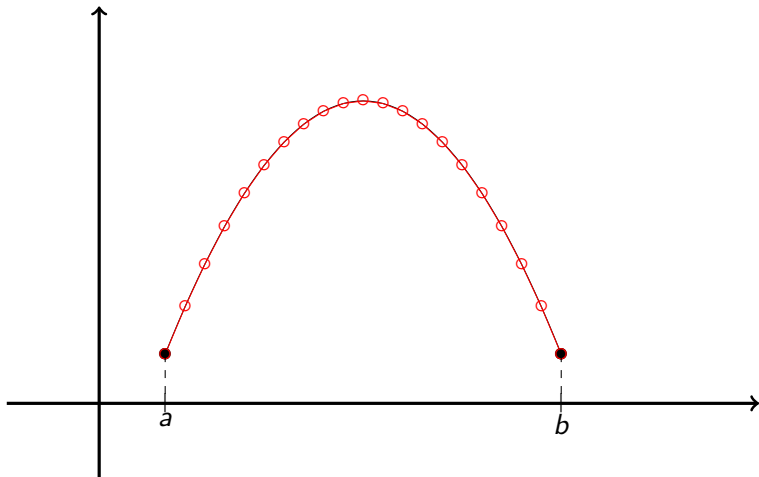


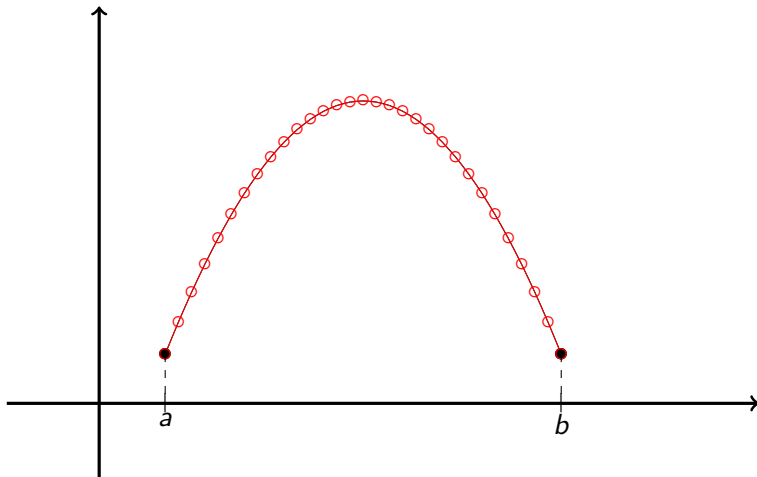


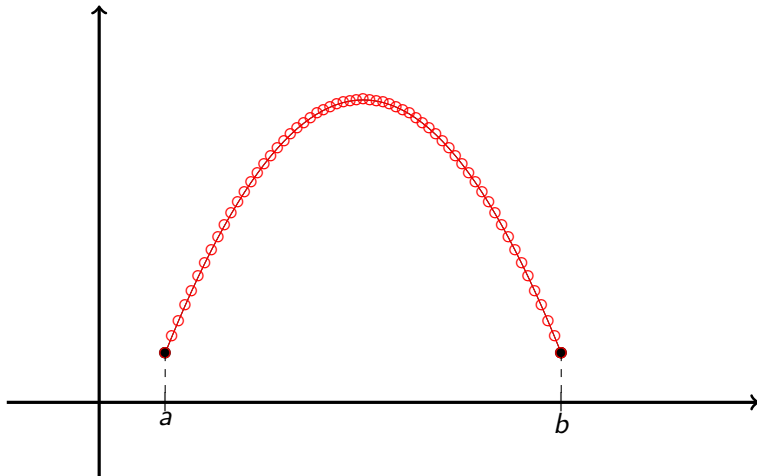








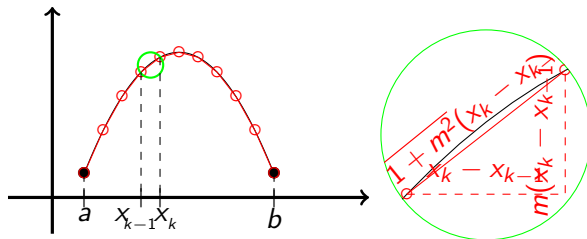




Tétel

Ha $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonosan deriválható, akkor a görbe ívhossza

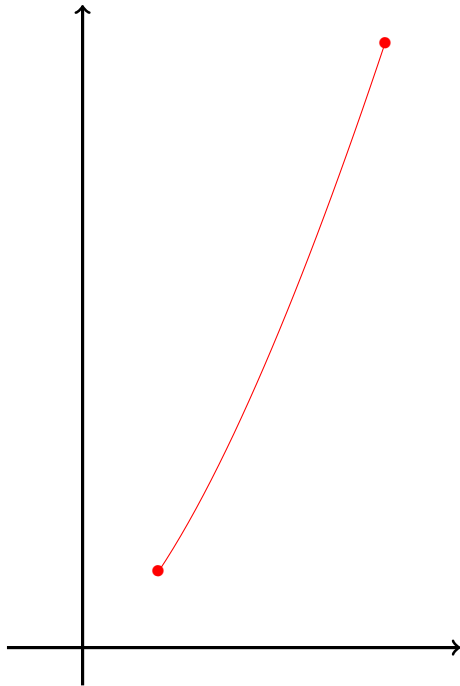
$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$



Feladat

Mennyi az $f(x) = \sqrt{x^3}$ görbe ívhossza, ha $x \in [1, 4]$?

Segítség: $\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$.

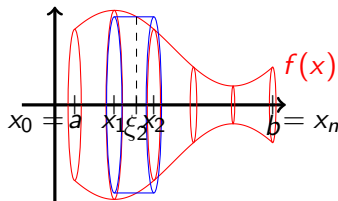


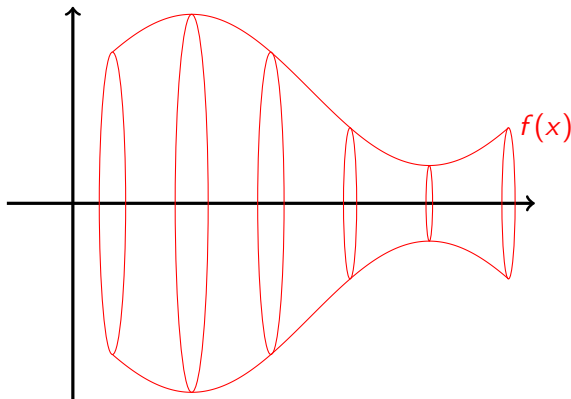
Forgástest térfogata

Tétel

Az $f[a, b] \rightarrow [0, \infty[$ folytonos függvény grafikonját megforgatjuk az x tengely körül. Az így

kapott forgástest térfogata $\pi \int_a^b f^2(x) dx$





Feladat

Az $f(x) = \sin(x) + 1.5$ függvény grafikonjának $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right]$ feletti szakaszát forgassuk meg az x tengely körül! Mennyi a kapott forgástest térfogata?

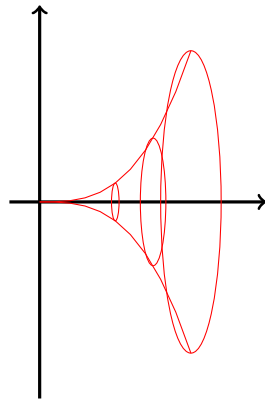
Segítség: $\pi \int_a^b f^2(x) dx$.

Forgástest felszíne

Tétel

Az $f(x)$ folytonosan deriválható, nemnegatív függvény $[a, b]$ -n vett grafikonját megforgatjuk az x tengely körül. Az így kapott

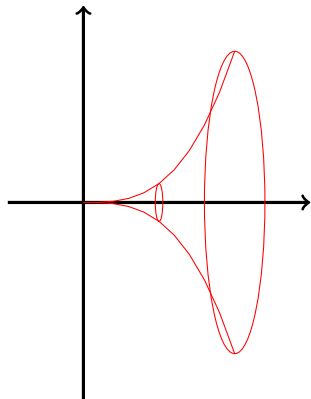
forgástest palástjának felszíne $2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$.



Feladat

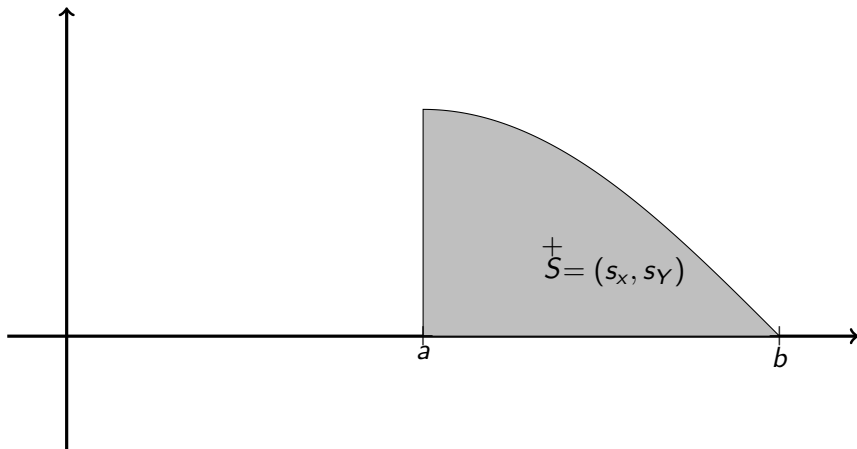
Az $f(x) = x^3$ függvény grafikonjának $[0, 1]$ feletti szakaszát forgassuk meg az x tengely körül! Mennyi a kapott forgástest palástjának felszíne?

Segítség: $2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$.



Súlypont

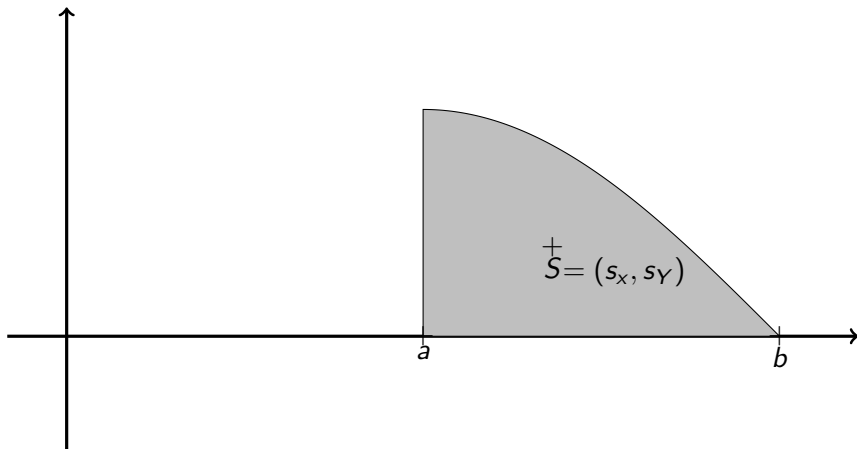
Az $f(x)$ folytonos, nemnegatív függvény $[a, b]$ intervallumra eső grafikonja alatti terület súlypontját szeretnénk meghatározni.



Feladat

Határozzuk meg a $\sin$ függvény $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ intervallum feletti grafikonja, és az intervallum közötti terület súlypontját!

Segítség: $\left(\frac{\int_a^b x f(x) dx}{\int_a^b f(x) dx}, \frac{\frac{1}{2} \int_a^b f^2(x) dx}{\int_a^b f(x) dx} \right).$



VÉGE

Köszönöm a figyelmet!

Pataki Gergely

2 Számok

Teljes rendezett test (D)	(33)(35)(37)
Bővített valós számok halmaza (D)	(38)
Szuprémum, infimum, maximum, minimum (D)	(18)(22)
Tágabb értelemben vett szuprémum és infimum (D)	(39)
Cantor-féle metszet-tulajdonság (T)	(40)
Természetes számok (D+T+B)	(42)
Archimédeszi-tulajdonság (T)	(43)
Teljes indukció (T)	(45)
Bernoulli-egyenlőtlenség (T+B)	(46)
$\mathbb{Q}$ sűrű $\mathbb{R}$ -ben (T)	(49)
Dedekind-axióma szükséges és elégséges feltétele (T)	(68)

3 Sorozatok 1 (alfogalmak)

Sorozat, néhány alfogalom (D)	(107)(109)(110)(111)(115)(214)
Korlátosság máshogy (T)	(109)
Határérték egyértelműsége (T+B)	(124)(125)
Nullsorozat, szükséges és elégséges feltétel (D+T)	(126)(127)
Határérték létezésének elégséges feltétele (T+B)	(128)
Konvergenca elégséges feltétele (T)	(129)
Konvergenca szükséges feltétele (T+B)	(130)

4 Sorozatok 2 (határérték és műveletek)

Nullsorozat és korlátos sorozat szorzata (T+B).....	(133)
Határérték és műveletek (T+B).....	(134)(137)(140)(142)(143)
$\lim x_n^{y_n}$ és $\lim \log_{x_n} y_n$ (T).....	(322)(324)
n^α határértéke (T).....	(147)(320)
A határérték monoton (T+B).....	(158)
Rendőrelv (T+B).....	(160)(161)
Mértani sorozat (D+T+B).....	(170)(171)
$\sqrt[n]{n}$ határértéke (T).....	(181)
Részsorozat (D).....	(187)

5 Sorozatok 3 (torlódási pont, rekurzív sorozat, Cauchy-sorozat)

Egzsztenciatétel: monoton részsorozat (T+B)	(188)
Bolzano-Weierstrass-tétel (T)	(189)
Torlódási pont (D)	(190)
Egzsztenciatétel: torlódási pont (T)	(190)
Torlódási pont szükséges és elégséges feltétele (T)	(191)
Határérték szükséges és elégséges feltétele (T)	(193)
limsup, liminf (D+T)	(194)
Rekurzív sorozat (T)	(200)
Cauchy-sorozat (D)	(201)
Cauchy-féle konvergencia-kritérium (T+B)	(202)

6 Folytonosság, határérték

Függvény, néhány alapfogalom (D)	(21)(225)(226)(228)(229)
Pontbeli folytonosság (D)	(231)
Féloldali folytonosság (D+T)	(237)
Folytonos függvény (D)	(238)
Átviteli elv (T+B)	(240)
Folytonosság és műveletek (T)	(243)
Összetett függvény (D)	(247)
Összetett függvény folytonossága (T+B)	(248)
Inverz függvény folytonossága (T)	(280)(282)
Függvény határértéke (D)	(252)(255)(257)(258)(264)(265)
Folytonosság és határérték kapcsolata (T)	(252)
Átviteli elv (T)	(267)
Határérték és műveletek (T)	(269)
A határérték monoton (T)	(271)
Szakadási helyek (D)	(274)

7 Topológiai fogalmak és tételek

Halmaz belső és külső, torlódási és izolált pontja (D).....	(220)(223)
Halmaz lezártja és belseje (D).....	(220)
Nyílt és zárt halmaz (D+T+B).....	(222)
Bolzano-Weierstrass-féle kiválasztási tétel (halmaz) (T).....	(223)
Nyílt halmazok uniója és metszete (T).....	(277)
Bolzano-tétel (T+K).....	(278)
Weierstrass-tétel (T+K).....	(281)

8 Elemi függvények

5 függvény és addíciós tételek (D+T+B)	(285)(285)(301)(302)(308)(309)
Az 5 függvény folytonos (T+B)	(286)(303)(310)
$\exp_a$, th, cth, tg, ctg (folytonosság, monotonitás) (D+T)	(295)(296)(306)(314)(315)
log, area és arkusz függvények (folytonosság, monotonitás) (D+T)	(292)(293)(298)(299)(300) (305)(307)(312)(313)(316)(317)
Hatványfüggvény (D+T)	(319)

9 Derivált

Pontbeli derivált (D).....	(328)
Féloldali derivált (D).....	(332)
Deriváltfüggvény (D)	(334)
Lineáris approximáció, érintőegyenes (T+D)	(338)
Deriválhatóság szükséges feltétele (T+B).....	(340)
Derivált és műveletek (T+B).....	(341)
Összetett függvény deriválása (T+B).....	(343)
Inverz függvény deriválása (T)	(346)
Nevezetes függvények deriváltjai (T).....	(350)

10 Deriválás alkalmazásai

Lokális szélsőérték szükséges feltétele (T+B)	(351)
Rolle-féle középértéktétel (T+B)	(355)
Lagrange-féle középértéktétel (T+B)	(356)
Cauchy-féle középértéktétel (T)	(358)
Darboux-tétel (T)	(359)
Magasabbrendű derivált (D)	(362)
L'Hospital szabály (T))	(366)

Monotonitás feltételei intervallumon (T+B).....	(371)(372)
Lokális monotonitás feltételei (D+T+B).....	(373)(374)
Lokális szélsőérték feltételei (T+B)	(351)(375)(377)
Konvexitás (D)	(380)
Konvexitás szükséges és elégséges feltétele (T).....	(382)(383)
Inflexiós pont (D)	(384)
Inflexió feltételei (T).....	(385)
Jensen-egyenlőtlenség (T).....	(391)
Általánosított Bernoulli-egyenlőtlenség (T).....	(392)
Súlyozott hatványközepek közötti egyenlőtlenség (T)	(393)

Q Határozatlan integrál

Primitív függvény, határozatlan integrál (D).....	(402)
Határozatlan integrál szerkezete (T+B).....	(403)
Alapintegrálok (T).....	(404)
Primitív függvény és műveletek (T).....	(405)
Parciális integrál (T+B).....	(406)
Helyettesítéses integrál (T+B).....	(410)(414)
Racionális törtfüggvény integrálása (T).....	(415)
Lebesgue-kritérium (D+T).....	(457)
Integrálfüggvény (D).....	(459)
Integrálszámítás alaptétele (T).....	(460)
Improprius integrál (D).....	(462)

K Határozott integrál

Felosztás (D).....	(432)
Alsó, felső, oszcillációs, integrálközelítő összeg (D).....	(433)(434)(435)(436)
Darboux-integrál (D).....	(437)
Darboux-integrálok végesek (T).....	(438)
Riemann-integrál (D).....	(439)
Felosztás finomsága (D).....	(440)
Darboux-tétele (T+B).....	(440)
Normális felosztássorozat (D+K).....	(441)
Newton-Leibniz-tétel (T+B).....	(442)
Riemann-integrálhatóság elégséges feltételei (T).....	(446)(452)
Integrál és műveletek (T).....	(448)
Integrál intervallum szerinti additivitása (T).....	(449)
Háromszög-egyenlőtlenség (T).....	(451)

A Integrál és alkalmazásai

Lebesgue-kritérium (D+T).....	(457)
Integrálfüggvény (D).....	(459)
Integrálszámítás alaptétele (T+B).....	(460)
Improprius integrál (D).....	(462)(464)(466)(468)
Improprius integrál és műveletek (T).....	(473)
Improprius integrál intervallum szerinti additivitása (T).....	(474)
Ívhossz (T+B).....	(476)
Forgástest térfogata (T).....	(479)
Forgástest felszíne (T).....	(481)
Súlypontok (T).....	(483)