

1. feladat 16 pont

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 + 3x}}{x - 1}$$

- (a) Létezik-e a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ határérték? Ha létezik, határozza meg, ha nem, indokolja!
- (b) Létezik-e a $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ határérték? Ha létezik, határozza meg, ha nem, indokolja!

Megoldás:

$$(a) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2 + \frac{2}{x}} - \sqrt{1 + \frac{3}{x}}}{-1 + \frac{1}{x}} = 1 - \sqrt{2}$$

$\frac{\sqrt{x^2}}{-x} = 1$, mivel a $-\infty$ közelében negatív számok vannak.

Tehát létezik határérték és $1 - \sqrt{2}$.

$$(b) \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 2x - (x^2 + 3x)}{(\sqrt{2x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 + 3x})(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)}{(\sqrt{2x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 + 3x})(x-1)} = \frac{1}{4}$$

Tehát létezik határérték és $\frac{1}{4}$.

2. feladat 8 pont

$$c_n = \frac{n+1}{10n+2024}$$

- (a) Mutassa meg, hogy c_n nem nullsorozat!
- (b) Adjon olyan $\varepsilon > 0$ számot, amire $|c_n| \not< \varepsilon$ végtelen sok $n \in \mathbb{N}^+$ esetén.

Megoldás:

- (a) $\lim c_n = 0.1$ és egy sorozatnak csak 1 határértéke lehet.

A (b) feladatból is következik.

- (b) Mivel $\lim c_n = 0.1$, ezért $\varepsilon < 0.1$ biztosan jó. Például ha $\varepsilon = 0.05$, akkor $|c_n| < 0.05 \iff \frac{n+1}{10n+2024} < 0.05 \iff 2n+2 < n+202.4 \iff n < 200.4$. Nem, hogy végtelen sok n -re nem teljesül, de 200 kivétellel egyikre sem.

Megoldás:

- (a) A (b) feladatból is következik.

- (b) $1017 \leq 1017n \implies 10n+2024 \leq 1017n+1017 \implies \frac{1}{1017} \leq c_n$, vagyis $\varepsilon = \frac{1}{1017}$ esetén a sorozat egyetlen elemére sem teljesül, hogy $|c_n| = c_n < \varepsilon$.

3. feladat**16 pont**

Határozza meg a következő sorozatok torlódási pontjait!

(a) $a_n = \left(\frac{n + (-1)^n}{n + 2} \right)^{2n};$

(b) $b_n = \frac{3^{3n-1} + 4^{n+n}}{5^{2n} + (-9)^{n+1}}$

Megoldás:

(a) Ha n páratlan, akkor $a_n = \left(\frac{n-1}{n+2} \right)^{2n} = \left(\frac{\left(1 + \frac{-1}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n} \right)^2 \rightarrow \left(\frac{e^{-1}}{e^2} \right)^2 = e^{-6}.$

Ha n páros, akkor $a_n = \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^{2n} = \left(\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n} \right)^2 \rightarrow \left(\frac{e}{e^2} \right)^2 = e^{-2}.$

Mivel minden elem belekerült valamelyik részsorozatba, 2 torlódási pont van: $\frac{1}{e^6}$ és $\frac{1}{e^2}.$

(b) $b_n = \frac{\frac{1}{3} \cdot 27^n + 16^n}{25^n + (-9) \cdot (-9)^n} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \overbrace{\left(\frac{27}{25}\right)^n}^{\rightarrow \infty} + \overbrace{\left(\frac{16}{25}\right)^n}^{\rightarrow 0}}{1 - 9 \cdot \underbrace{\left(-\frac{9}{25}\right)^n}_{\rightarrow 0}} \rightarrow \infty, \text{ így az egyetlen torlódási pont a } \infty.$

4. feladat**10 pont**

Melyik állítás igaz, minden $A, B \subset \mathbb{R}$ és $x \in \mathbb{R}$ esetén? (Indoklással!)

- (a) Ha x belső pontja A -nak vagy B -nek, akkor $(A \cup B)$ -nek is.
- (b) Ha x belső pontja $(A \cup B)$ -nek, akkor A -nak vagy B -nek is.
- (c) Ha x külső pontja A -nak vagy B -nek, akkor $(A \cup B)$ -nek is.
- (d) Ha x külső pontja $(A \cup B)$ -nek, akkor A -nak vagy B -nek is.
- (e) Ha x határpontja A -nak vagy B -nek, akkor $(A \cup B)$ -nek is.
- (f) Ha x határpontja $(A \cup B)$ -nek, akkor A -nak vagy B -nek is.

Megoldás:

- (a) Igaz, mert ha x belső pontja A -nak vagy B -nek, akkor $\exists \delta > 0$, amire $]x - \delta, x + \delta[\subset A$ vagy $]x - \delta, x + \delta[\subset B$, de ekkor $]x - \delta, x + \delta[\subset U$.
- (b) Nem igaz, például ha $A =]-1, 0]$ és $B = [0, 1[$ és $x = 0$.
- (c) Nem igaz, például $A = \emptyset$, $B = \mathbb{R}$, $x = 0$ esetén.
- (d) Igaz, sőt mindkettőnek külső pontja, hiszen x külső pontja U -nak, azt jelenti, hogy $\exists \delta > 0$ amire $]x - \delta, x + \delta[\cap U = \emptyset$, de mivel $A \subset U$, ezért $]x - \delta, x + \delta[\cap A = \emptyset$.
- (e) Nem igaz, például ha $A =]-1, 0]$ és $B = [0, 1[$ és $x = 0$.
- (f) Ez igaz, ugyanis egyiknek sem lehet belső pontja (a) szerint, és ha mindkettőnek külső pontja lenne, akkor U -nak is. Valóban, ha $\exists \delta_A, \delta_B > 0$, amire $]x - \delta_A, x + \delta_A[\cap A = \emptyset$ és $]x - \delta_B, x + \delta_B[\cap B = \emptyset$, akkor $\delta_U = \min\{\delta_A, \delta_B\}$ jelöléssel $]x - \delta_U, x + \delta_U[\cap U = (]x - \delta_U, x + \delta_U[\cap A) \cup (]x - \delta_U, x + \delta_U[\cap B) = \emptyset$.