

1. feladat 15 pont

Számolja ki a határértékeket!

(a) $\lim_{x \rightarrow 0+} [\sqrt{x} \ln(x^2)]$

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + 2^{2x}}{3^{x+1} - 4^x}$

(c) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{3x + 9}$

Megoldás:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0+} [\sqrt{x} \ln(x^2)] = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(x^2)}{\frac{1}{\sqrt{x}}} \stackrel{\infty/\infty \text{ L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{2}{x}}{\frac{-1}{2\sqrt{x^3}}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{4\sqrt{x^3}}{-x} = \lim_{x \rightarrow 0+} (-4\sqrt{x}) = 0$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + 2^{2x}}{3^{x+1} - 4^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{e}{4}\right)^x + 1}{3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^x - 1} = -1$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{3x + 9} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x - 3}{3} = -2 \text{ vagy } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{3x + 9} \stackrel{0/0 \text{ L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x}{3} = -2.$$

2. feladat 8 pont

(a) Igazolja, hogy az

$$f(x) = 3x + 2 \cos x$$

függvény invertálható, és adja meg inverzének deriváltját az $a = 1 + \pi$ helyen!Tehát $(f^{-1})'(1 + \pi) = ?$ Megoldás: $f'(x) = 3 - 2 \sin x > 0$, így f szigorúan monoton növekvő, ezért invertálható.Mivel $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 + \pi$, ezért $(f^{-1})'(a) = (f^{-1})'\left(f\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{1}{3 - \sqrt{3}}$.

3. feladat 9 pont

Adja meg a legbővebb intervallumokat, ahol az $f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 - 4x + 8}{x}$ függvény szigorúan konvex!

Megoldás: $\text{Dom}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f'(x) = \frac{(3x^2 - 8x - 4) \cdot x - (x^3 - 4x^2 - 4x + 8) \cdot 1}{x^2} = \frac{2x^3 - 4x^2 - 8}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{(6x^2 - 8x) \cdot x^2 - (2x^3 - 4x^2 - 8) \cdot 2x}{x^4} = \frac{2x^4 + 16x}{x^4} = \frac{2x^3 + 16}{x^3} \text{ zérushelye } x_1 = -2.$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c}]-\infty, -2[& -2 &]-2, 0[& 0 &]0, \infty[\end{array}$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} f & \cup & \inf & \cap & \cup \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} f'' & + & 0 & - & + \end{array}$$

A legbővebb intervallumok, ahol az $f(x)$ függvény szigorúan konvex: $] - \infty, -2]$ és $]0, \infty[$.

Megoldás: $\text{Dom}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f'(x) = (x^2 - 4x - 4 + 8x^{-1})' = 2x - 4 - 8x^{-2}$$

$$f''(x) = 2 + 16x^{-3} \text{ zérushelye } x_1 = -2.$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c}]-\infty, -2[& -2 &]-2, 0[& 0 &]0, \infty[\end{array}$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} f & \cup & \inf & \cap & \cup \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} f'' & + & 0 & - & + \end{array}$$

A legbővebb intervallumok, ahol az $f(x)$ függvény szigorúan konvex: $] - \infty, -2]$ és $]0, \infty[$.

4. feladat 10 pont

Számolja ki a következő integrálokat!

(a) $\int \frac{4x^3 - x + \sqrt{x} + 1}{x} dx$

(b) $\int \frac{3x^3}{4 - x^4} dx$

Megoldás:

(a) $\int \frac{4x^3 - x + \sqrt{x} + 1}{x} dx = \int 4x^2 - 1 + x^{-1/2} + \frac{1}{x} dx = \frac{4}{3}x^3 - x + 2\sqrt{x} + \ln x + c$, hiszen az integrandusból tudjuk, hogy $x > 0$

(b) $\int \frac{3x^3}{4 - x^4} dx = -\frac{3}{4} \int \frac{-4x^3}{4 - x^4} dx = -\frac{3}{4} \ln |4 - x^4| + c$, hiszen $\frac{f'}{f}$ alakú az integrandus.

5. feladat 8 pont

Az $f(x) = \sqrt{(2x + 1)(2 - x)}$ függvény grafikonjának melyik pontja van legtávolabb az origótól?

Megoldás: Legyen $d(x) = \sqrt{x^2 + f(x)^2}$ a grafikon $(x, f(x))$ pontjának origótól vett távolsága. Mivel $\text{Dom}_d = \text{Dom}_f = [-\frac{1}{2}, 2]$, és $d(x) = \sqrt{x^2 + (2x + 1)(2 - x)}$ folytonos ezért Weierstrass-tétele szerint létezik maximum. Lehetséges maximumhely a végpontok $-\frac{1}{2}$ és 2 . Ahol d nem deriválható, de ezek pont a végpontok.

Ahol $0 = d'(x) = \frac{-2x + 3}{2\sqrt{x^2 + f(x)^2}}$, azaz $x = \frac{3}{2}$.

Mivel $d(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, $d(2) = 2$, és $d(\frac{3}{2}) = \sqrt{\frac{9}{4} + 2}$. Mivel az utolsó a legnagyobb, ezért a keresett pont a $(\frac{3}{2}, f(\frac{3}{2}))$.