

1. feladat

10 pont

$$f(x) = \frac{x^2 - 16}{3x - 12}$$

Létezik-e a $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ határérték?

Ha létezik, határozza meg, ha nem, indokolja!

Létezik-e olyan $\delta > 0$, amire $0 < |x - 4| < \delta \implies 2.5 < f(x) < 3$?

Ha igen, mutasson egy ilyen δ -t, ha nem, indokolja!

Megoldás: $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{3x - 12} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x - 4)(x + 4)}{3(x - 4)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x + 4}{3} = \frac{8}{3}$

Tehát létezik határérték és $\frac{8}{3}$.

Mivel $2.5 < \frac{8}{3} < 3$ ezért létezik ilyen δ . Ha $0 < |x - 4|$, akkor $f(x) = \frac{x + 4}{3}$, és így $2.5 < f(x) < 3 \iff 7.5 < x + 4 < 9 \iff 3.5 < x < 5 \iff 3.5 < x < 4.5 \iff |x - 4| < 0.5$. Tehát $\delta = 0.5$ jó választás.

2. feladat

12 pont

Vizsgálja monotonitás szempontjából a következő rekurzióval adott sorozatot!

$$b_1 = 1, \quad b_{n+1} = \sqrt{b_n^2 + 5} - 1$$

Számolja ki a következőket! Amelyik nem létezik, annál indokoljon!

(a) $\inf b_n$

(b) $\min b_n$

(c) $\sup b_n$

(d) $\max b_n$

(e) $\lim b_n$

Megoldás: $b_2 = \sqrt{6} - 1 > 1$ így sejtésünk, hogy a sorozat szigorúan monoton növekvő, és így minden eleme pozitív.

Teljes indukcióval belátjuk, hogy $0 < b_n < b_{n+1}$ teljesül ha $n \in \mathbb{N}^+$
 $n = 1$ -re $0 < b_1 < b_2$ teljesül. Ha n -re igaz, azaz

$$\begin{array}{lll} 0 < b_n & < b_{n+1} & / \wedge 2 \\ 0 < b_n^2 & < b_{n+1}^2 & / + 5 \\ 0 < b_n^2 + 5 & < b_{n+1}^2 + 5 & / \sqrt{} \\ 0 < \sqrt{b_n^2 + 5} & < \sqrt{b_{n+1}^2 + 5} & / - 1 \\ 0 < b_{n+1} & < b_{n+2} & \end{array}$$

akkor igaz $(n+1)$ -re is. Kaptuk, hogy a sorozat szigorúan monoton növekvő, így $\inf b_n = \min b_n = b_1 = 1$, továbbá $\nexists \max b_n$ és $\exists \lim b_n = \sup b_n$.

A rekurzió fixpontjának meghatározása:

$$\begin{array}{ll} x = \sqrt{x^2 + 5} - 1 & / + 1 \\ x + 1 = \sqrt{x^2 + 5} & / \wedge 2 \text{ (megjelenhet hamis gyök)} \\ x^2 + 2x + 1 = x^2 + 5 & / - x^2 - 1 \\ 2x = 4 & / : 2 \\ x = 2 & \end{array}$$

Kell ellenőrizni: $2 = \sqrt{2^2 + 5} - 1$ valóban teljesül.

Ha b_n felülről korlátos, akkor $\lim b_n = 2$, ha nem akkor $\lim b_n = \infty$.

Próbáljuk meg teljes indukcióval belátni, hogy $0 < b_n < 2$ teljesül ha $n \in \mathbb{N}^+$.

$n = 1$ -re teljesül.

Ha n -re teljesül, azaz $0 < b_n < 2$, akkor $0 < b_n^2 < 4 \implies 5 < b_n^2 + 5 < 9 \implies 0 < \sqrt{5} - 1 < b_{n+1} < 2$.

Kaptuk, hogy $\lim b_n = \sup b_n = 2$.

3. feladat**16 pont**

Számolja ki az alábbi sorozat határértékét, ha létezik!

(a) $c_n = \left(\frac{2n-1}{2n+2}\right)^{3n+4};$

(b) $d_n = \sqrt[n]{\frac{3^{2n+1} + 5^{2n}}{2^{5n} + 4^{2n+2}}};$

Megoldás:

(a) $\left(\frac{2n-1}{2n+2}\right)^{3n+4} =$

$$= \left(\left(\frac{2n-1}{2n+2}\right)^n\right)^3 \cdot \left(\frac{2n-1}{2n+2}\right)^4 = \left(\frac{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}\right)^3 \cdot \left(\frac{2n-1}{2n+2}\right)^4 \rightarrow \left(\frac{e^{-\frac{1}{2}}}{e}\right)^3 \cdot 1^4 = e^{-\frac{9}{2}}$$

(b) $\frac{25}{32} \leftarrow \frac{1}{\sqrt[n]{17}} \frac{25}{32} = \sqrt[n]{\frac{25^n}{17 \cdot 32^n}} \leq \sqrt[n]{\frac{3 \cdot 9^n + 25^n}{32^n + 16 \cdot 16^n}} = \sqrt[n]{\frac{3^{2n+1} + 5^{2n}}{2^{5n} + 4^{2n+2}}} \leq \sqrt[n]{\frac{4 \cdot 25^n}{32^n}} = \sqrt[n]{4} \frac{25}{32} \rightarrow \frac{25}{32}$

A rendőrelv miatt $d_n \rightarrow \frac{25}{32}$

- (a) Igaz-e tetszőleges
- A
- és
- B
- halmazok esetén, az

$$(A \cup B) \cap (B \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap A)$$

egyenlőség?

- (b) Igaz-e tetszőleges
- A, B
- és
- C
- halmazok esetén, az

$$(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$$

egyenlőség?

Megoldás:

- (a) Nem igaz például ha
- $A = \emptyset$
- és
- $B = \{\emptyset\}$
- , akkor
- $\emptyset \in (A \cup B) \cap (B \cup A)$
- , de
- $\emptyset \notin (A \cap B) \cup (B \cap A)$
- .

- (b) Jelölje
- L
- illetve
- R
- a bal illetve a jobb oldali halmazt! Megmutatjuk, hogy a válasz igen, azaz
- $L = R$
- .

Vizsgáljuk az $x \in A$ esetet. Ekkor $x \in A \cup B$ és $x \in C \cup A$, mert $A \subset A \cup B$ és $A \subset C \cup A$, így $x \in (A \cup B) \cap (C \cup A)$, vagyis ilyenkor $x \in L \iff x \in B \cup C$.

Másrészt ekkor $x \in A \cap B \iff x \in B$ és $x \in C \cap A \iff x \in C$, vagyis $x \in R \iff x \in B \cup (B \cap C) \cup C = B \cup C$

Az $x \notin A$ esetben $x \in A \cup B \iff x \in B$ és $x \in A \cup C \iff x \in C$, vagyis $x \in L \iff x \in B \cap (B \cup C) \cap C = B \cap C$.

Másrészt ilyenkor $x \notin A \cap B$ és $x \notin C \cap A$, mert $A \cap B \subset A$ és $C \cap A \subset A$, vagyis $x \in R \iff x \in B \cap C$.

Megoldás:

- (a) Jelölje
- L
- illetve
- R
- a bal illetve a jobb oldali halmazt!

Ha $x \in A$ és $x \in B$, akkor $x \in L$ és $x \in R$.

Ha $x \in A$ és $x \notin B$, akkor $x \in L$ és $x \notin R$.

Ha $x \notin A$ és $x \in B$, akkor $x \in L$ és $x \notin R$.

Ha $x \notin A$ és $x \notin B$, akkor $x \notin L$ és $x \notin R$.

Tehát $L = R$ csak akkor igaz, ha $A = B$.

- (b) Jelölje
- L
- illetve
- R
- a bal illetve a jobb oldali halmazt!

Ha $x \in A$, $x \in B$ és $x \in C$, akkor $x \in L$ és $x \in R$.

Ha $x \in A$, $x \in B$ és $x \notin C$, akkor $x \in L$ és $x \in R$.

Ha $x \in A$, $x \notin B$ és $x \in C$, akkor $x \in L$ és $x \in R$.

Ha $x \in A$, $x \notin B$ és $x \notin C$, akkor $x \notin L$ és $x \notin R$.

Ha $x \notin A$, $x \in B$ és $x \in C$, akkor $x \in L$ és $x \in R$.

Ha $x \notin A$, $x \in B$ és $x \notin C$, akkor $x \notin L$ és $x \notin R$.

Ha $x \notin A$, $x \notin B$ és $x \in C$, akkor $x \notin L$ és $x \notin R$.

Ha $x \notin A$, $x \notin B$ és $x \notin C$, akkor $x \notin L$ és $x \notin R$.

Tehát $L = R$.

5. feladat

6 pont

Adja meg az

$$A = \{(-2)^{-n} : n \in \mathbb{N}^+\}$$

halmaz torlódási és határpontjait, illetve a

$$B = \bigcup_{a \in A}]a, a+1[$$

halmaz belső és izolált pontjait!

Megoldás: Mivel $(-2)^{-n} \rightarrow 0 \notin A$, így A egyetlen torlódási pontja a 0. Mivel $A \subset \mathbb{Q}$, nincs belső pontja, ezért határpontjai az elemei és a 0.

Mivel $B =]-0.5, 1.25[$ nyílt, ezért elemei a belső pontjai, és nincs izolált pontja.